

P
83

AGIB

P 83

P 83



609

P 83

Lehrbuch
der
Elementarmathematik

Planimetrie, Arithmetik, Trigonometrie
und Stereometrie,
Pensum bis zur Einjährig-Freiwilligen Prüfung
für höhere Schulen und zum Selbststudium

von

Professor H. Raydt,

Direktor der Öffentlichen Handelslehranstalt und Studiendirektor
der Handelshochschule zu Leipzig.



Leipzig.
Max Hesse's Verlag.
1899. 500

1819

Lehrbuch

Elementararithmetik

von Dr. Wilhelm Schöten

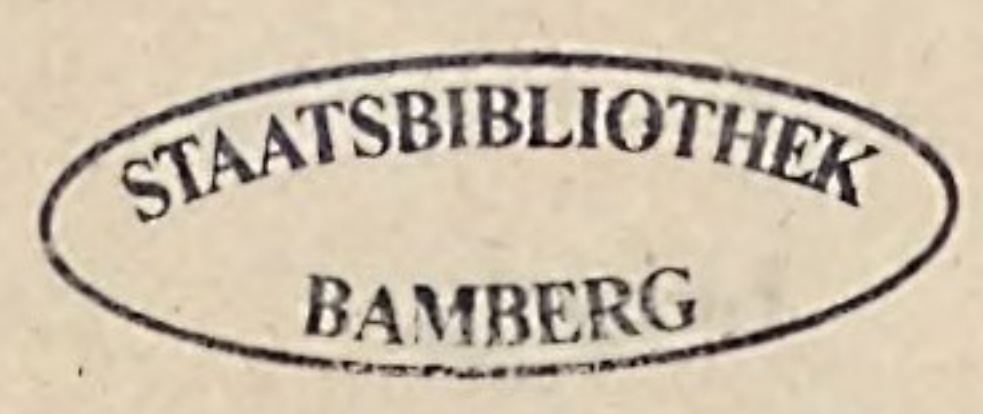
und Dr. Heinrich

Lehmann

in der

Verlagsbuchhandlung

von J. Neumann, Neudamm



Vorwort.

Bei der Mannigfaltigkeit des Lehrstoffes in unsern Schulen ist es von grosser Bedeutung, durch praktische Lehrbücher mit dazu beizutragen, dass die Schüler vor geistiger Überbürdung bewahrt werden. Dazu soll auf dem Gebiete der Mathematik dieses Lehrbuch dienen.

Ich bin jetzt gerade 25 Jahre an Gymnasien, Realgymnasien, Realschulen und einer höheren Handelslehranstalt als Lehrer der Mathematik thätig und habe gefunden, dass es gerade in der Mathematik besonders wichtig ist, dem Schüler durch ein leicht verständliches Lehrbuch eine Stütze zu geben.

Es ist mir wohl bewusst, dass das vorliegende Buch vom streng wissenschaftlichen Standpunkte aus in einzelnen Punkten anfechtbar ist. Man darf aber, meine ich, in der Schulmathematik hierin nicht zu ängstlich sein und muss sich hüten, aus wissenschaftlichen Bedenken dem Schüler unverständlich zu werden. Man soll immer im Auge behalten, dass unsere Schulen keine Universitäten sind und dass mathematisch-philosophische Grübeleien die Schüler eher verwirren, als ihnen nützen.

Den Herren Kollegen, die mich während der Korrektur mit ihren Ratschlägen unterstützt haben, sage ich auch auf diesem Wege meinen herzlichen Dank.

Leipzig, Ostern 1899.

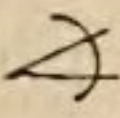
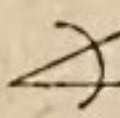
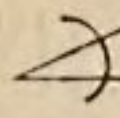
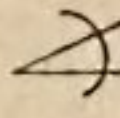
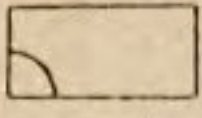
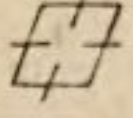
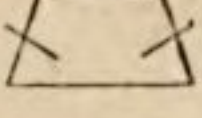
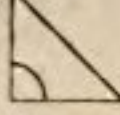
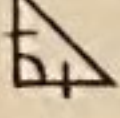
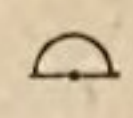
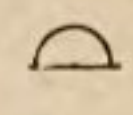
H. Raydt.

Inhalt.

	Seite		Seite
Allgemeines	1	Gleichungen vom zwei-	
A. Planimetrie.		ten Grade mit einer	
I. Einleitendes	7	Unbekannten	161
II. Von den Parallelen		XI. Progressionen oder	
und den Winkeln	9	Reihen	167
III. Von den Dreiecken	20	XII. Zinseszins- und Ren-	
IV. Von den Vierecken	33	tenrechnung	174
V. Vom Kreise	42	XIII. Anhang. Die wichtig-	
VI. Um- und einbeschrie-		sten Formeln der	
bene Figuren	52	Arithmetik	179
Reguläre Polygone	57	C. Trigonometrie.	
VII. Inhaltsgleichheit und		I. Einleitendes	183
Inhaltsberechnung ge-		II. Die trigonometrischen	
radliniger Figuren	60	Winkelfunktionen	185
VIII. Von der Proportionali-		III. Beziehungen zwischen	
tät und Ähnlichkeit	67	d. einzelnen Funktionen	186
IX. Berechnung des Kreises	79	IV. Berechnung des recht-	
X. Anhang A. Von der		winkligen und gleich-	
geometrischen Auf-		schenkligen Dreiecks,	
gabe	81	sowie des regulären	
Anhang B. Vom geo-		Polygons	197
metrischen Ort	90	V. Formeln und Sätze vom	
B. Arithmetik.		schiefwinkligen Drei-	
I. Einleitendes	95	eck	206
II. Addieren	97	VI. Berechnung des schief-	
III. Subtrahieren	99	winkligen Dreiecks	
IV. Multiplizieren	102	und des Parallelo-	
V. Dividieren	105	gramms	215
VI. Teilbarkeit der Zahlen.		VII. Anhang. Die wichtig-	
Zerlegen in Faktoren	108	sten Formeln der Tri-	
Von den Brüchen	111	gonometrie	225
Verhältnisse und Pro-		D. Stereometrie.	
portionen	118	I. Einleitendes	226
VII. Potenzieren	122	II. Allgemeine Lehrsätze	228
VIII. Radizieren	127	III. Von den Körpern.	
IX. Logarithmieren	141	Einleitendes	231
X. Gleichungen.		Vom Prisma	232
Einleitendes	150	Vom Cylinder	237
Gleichungen vom er-		Von der Pyramide	240
sten Grade mit einer		Vom Kegel	244
Unbekannten	152	Von der Kugel	248
Eingekleidete Gleich-		IV. Anhang. Die wichtig-	
ungen	156	sten Formeln der	
Gleichungen vom er-		Stereometrie	253
sten Grade mit mehre-			
ren Unbekannten	156		

Vorkommende Abkürzungen und Zeichen.

z. B. zum Beispiel.	: dividiert durch.
g. L. gerade Linie.	$\frac{a}{b}$ a durch b .
Gr. Grundsatz.	b^e b hoch e .
Vor. oder V. Voraussetzung.	$\sqrt{\quad}$ Wurzel aus.
Beh. Behauptung.	log Logarithmus.
Bew. Beweis.	= gleich.
b. schon bewiesen.	$>$ grösser als.
W.z.b.w. Was zu beweisen war.	$<$ kleiner als.
Geg. Gegeben.	$\approx$ ungleich.
Ges. Gesucht.	$\sim$ ähnlich.
Kon. Konstruktion.	$\cong$ kongruent.
H. K. Hilfskonstruktion.	— folglich.
Det. Determination.	$\parallel$ parallel.
K. Kongruenzsatz.	$\equiv$ parallel und gleich.
h. St. homologe Stücke.	$\sphericalangle$ Winkel.
Ä. Ähnlichkeitssatz.	$\odot$ Vollwinkel.
g. O. geometrischer Ort.	$\sphericalangle$ gestreckter Winkel.
K. A. Korrespondierende Addition.	$\perp$ oder R rechter Winkel.
K. S. Korrespondierende Subtraktion.	$\curvearrowright$ konvexer Winkel.
Pr. (a, b) Projektion von a auf b .	$\perp$ senkrecht auf (auch Lot oder Senkrechte).
sin Sinus.	1° Ein Grad.
cos Cosinus.	$1'$ Eine Minute.
tg Tangens.	$1''$ Eine Sekunde.
ctg Cotangens.	$1'''$ Eine Tertie.
sec Sekans.	N. $\sphericalangle$ Nebenwinkel.
cosec Cosekans.	Sch. $\sphericalangle$ Scheitelwinkel.
+ plus.	G. $\sphericalangle$ Gegenwinkel.
— minus.	W. $\sphericalangle$ Wechselwinkel.
. mal.	

E. 	entgegengesetzte Winkel.		Trapez.
A. 	Aussenwinkel.		Trapezoid.
C. 	Centriwinkel.		Quadrat.
P. 	Peripheriewinkel.		Rechteck.
	Dreieck.		Rhombus.
	gleichseitiges Dreieck.		gleichschenkliges Trapez.
	gleichschenkliges Dreieck.		Kreis.
	rechtwinkliges Dreieck.	r	Radius.
	rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck.	d	Durchmesser.
h	Höhe.	s	Sehne.
m	Winkel halbierende Transversale im Dreieck, Mittellinie im Trapez.		Halbkreis.
t	Seitenhalbierende Transversale.		Segment.
g	Grundlinie.		Sektor.
G	Grundfläche.	$\widehat{AB}$	Bogen AB .
	Viereck.	ϱ	Radius des einbeschriebenen Kreises.
	Parallelogramm.	P_n	Polygonwinkel des regulären n Ecks.
		C_n	Centriwinkel des regulären n Ecks.
		U	Umfang.

Allgemeines.

§ 1.

Mathematik*) ist die Lehre von der Grösse der Dinge.

Weil die Mathematik nur die Grösse der Dinge betrachtet, nennt man in ihr die behandelten Dinge auch einfach „Grössen“ und sagt demnach: Die Mathematik ist die Lehre von den Grössen.

§ 2.

In der Mathematik unterscheidet man zwei Arten von Grössen:

1. Raumgrössen, z. B. die Kugel,
2. Zahlengrössen, z. B. 5.

Die Lehre von den Raumgrössen heisst Geometrie**), die Lehre von den Zahlengrössen Arithmetik.**)

§ 3.

Unter Raum verstehen wir dasjenige, in welchem sich alles befindet, was wir mit unsern Sinnen wahrnehmen können. Er dehnt sich nach allen Seiten bis ins Unendliche aus. Im Raume kommen für die Mathematik in Betracht:

1. Körper, z. B. der Würfel,
2. Flächen, z. B. das Dreieck,
3. Linien, z. B. die Kreislinie,
4. der Punkt.

*) Die Mathematik ist schon von den Phöniziern, den alten Ägyptern und Indern und darnach von den Griechen getrieben worden und dürfte eine der ältesten Wissenschaften sein. Der Ausdruck Mathematik stammt aus dem Griechischen und bedeutet soviel wie „Wissenschaft“. Das bekannteste griechische mathematische Werk sind die „Elemente“ Euklids (300 v. Chr. zu Alexandrien).

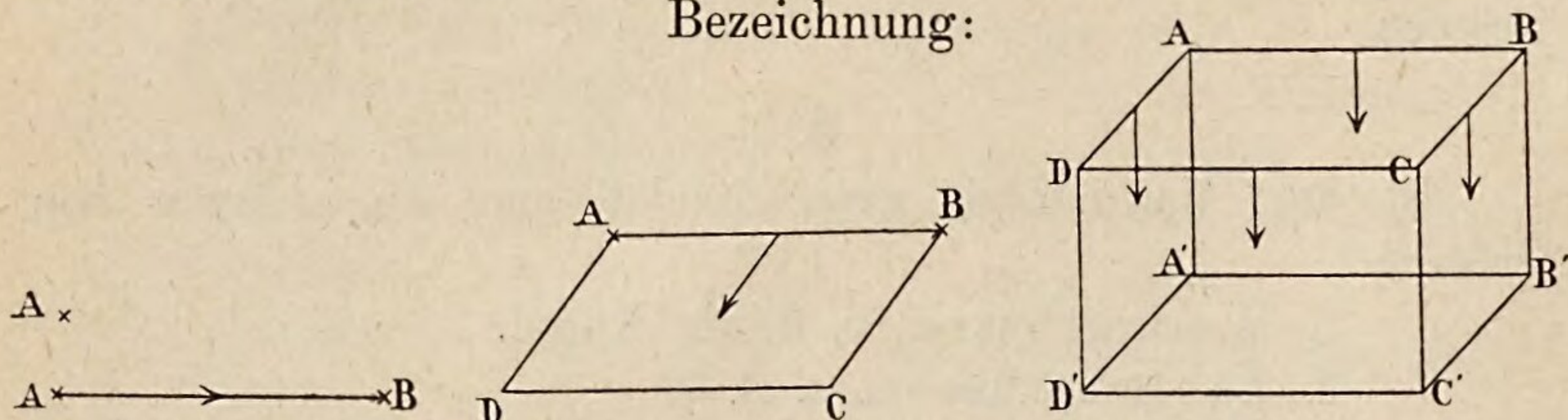
**) Die Ausdrücke stammen aus dem Griechischen und bedeuten „Erdmesskunst“ und „Zahlenkunst“. Die Geometrie soll unter dem König Sesostri in Ägypten aus praktischen Bedürfnissen, die mit den Überschwemmungen des Landes durch den Nil und den dadurch herbeigeführten Veränderungen zusammenhängen, entstanden sein.

§ 4.

Der Körper ist ein allseitig begrenzter Teil des Raumes, die Fläche ist die Grenze des Körpers, die Linie ist die Grenze der Fläche, der Punkt ist die Grenze der Linie.

Der Körper hat drei Dimensionen*) (Hauptrichtungen): Länge, Breite und Höhe (Tiefe, Dicke); die Fläche hat zwei Dimensionen, Länge und Breite; die Linie hat nur eine Dimension, die Länge; der Punkt hat gar keine Dimension. Der Punkt bezeichnet eine Stelle im Raum. (Übliche Bezeichnung durch einen daneben gesetzten grossen lateinischen Buchstaben, z. B. Punkt A .) Durch Bewegung des Punktes entsteht die Linie (Bezeichnung meistens durch zwei Buchstaben, z. B. AB), durch Bewegung der Linie die Fläche, durch Bewegung der Fläche der Körper.

Bezeichnung:



In der Mathematik kommen drei Beziehungen der Grössen in Betracht: 1. die Gleichheit bez. Ungleichheit, 2. die Ähnlichkeit und 3. die Kongruenz.**)

1. Zwei Grössen heissen gleich ($=$), wenn sie gleichen Inhalt haben. Grössen, welche verschiedenen Inhalt haben, heissen ungleich ($\neq$).

$x > y$ heisst: x ist grösser als y .

$y < x$ „ : y „ kleiner „ x .

2. Zwei Grössen heissen ähnlich ($\sim$), wenn sie gleiche Form haben; z. B. alle Kugeln sind $\sim$.

3. Zwei Grössen heissen kongruent ($\cong$), wenn sie in Inhalt und Form übereinstimmen, wenn sie also $=$ und $\sim$ sind. Es ist dies der Fall, wenn man sie sich so ineinander oder aufeinander gelegt denken kann, dass sie ganz in eine Grösse zusammenfallen (sich gegenseitig decken). Zwei kongruente Grössen unterscheiden sich also nur durch den verschiedenen Ort, an dem sie sich befinden.

*) Aus dem Lateinischen; bedeutet „Ausdehnung“ oder „Abmessung“.

**) Aus dem Lateinischen; bedeutet „Zusammenfallen“.

§ 5.

In der Mathematik unterscheiden wir:

1. Erklärungen (Definitionen),
2. Aufgaben (Probleme),
3. Grundsätze (Axiome),
4. Lehrsätze (Theoreme),
5. Zusätze.

Über Aufgaben s. Anhang A.

Der Grundsatz ist eine an sich deutliche Wahrheit, welche nicht bewiesen zu werden braucht (s. § 6).

Der Lehrsatz ist eine Wahrheit, welche erst bewiesen werden muss. Einen Lehrsatz beweisen heisst, ihn auf frühere Sätze, Grundsätze und Erklärungen zurückführen. Wir unterscheiden beim Lehrsatz 1. die Voraussetzung (Annahme), 2. die Behauptung (Folgerung) und 3. den Beweis. Zwischen Behauptung und Beweis wird zuweilen noch als besonderer Teil eine Hilfskonstruktion eingeschaltet.

Die Voraussetzung giebt kurz die Bedingungen an, unter denen die Behauptung stattfindet.

Die Behauptung giebt in möglichster Kürze die zu beweisende Thatsache an.

Der Beweis besteht darin, dass die in der Behauptung ausgesprochene Wahrheit durch Schlussfolgerungen auf Grundsätze, frühere Lehrsätze und Erklärungen zurückgeführt wird. Wir unterscheiden zwei Arten von Beweisen, den direkten und den indirekten.

Der direkte Beweis geht von der Voraussetzung aus und zeigt durch direkte Schlussfolgerungen die Richtigkeit der Behauptung.

Der indirekte Beweis geht aus vom mathematischen (oder kontradiktorischen) Gegenteil der Behauptung; er zeigt, dass dieses Gegenteil nicht stattfinden kann und folgert aus der Unmöglichkeit des Gegenteils die Richtigkeit der Behauptung.

Der kontradiktorische Gegensatz von grösser ist: nicht grösser, von schwarz: nicht schwarz u. s. w.

Von den Lehrsätzen bildet man die **Umkehrungen**, indem man die Voraussetzung ganz oder teilweise zur Behauptung und die Behauptung ganz oder teilweise zur Voraussetzung macht. Die Umkehrungen der Lehrsätze bedürfen eines besonderen Beweises.

Zusätze sind Folgerungen aus den Lehrsätzen, zu denen sie gemacht werden. Sie sind ohne ausführlichen Beweis einleuchtend.

§ 6.

Grundsätze.

Gr. I. Jede Grösse ist sich selbst gleich und ähnlich.
Z. B. $5 = 5.$ $x = x.$ $a \sim a.$ $b \cong b.$

Gr. II. Gleiche Grössen kann man beliebig für einander setzen, wenn es nur auf den Inhalt ankommt. Kongruentes kann man immer für einander setzen.

$$\begin{array}{rcl} \text{Z. B.} & x = y + z + t \\ & z = a \\ & t = b \\ \hline & x = y + a + b. \end{array} \quad (\text{lies „folglich“})$$

Gr. III. Sind zwei Grössen einer dritten gleich, so sind sie auch untereinander gleich.

$$\begin{array}{rcl} \text{Z. B.} & x = y \\ & z = y \\ \hline & x = z. \end{array}$$

Ebenso gilt: Sind zwei Grössen einer dritten ähnlich, so sind sie auch unter einander ähnlich.

Sind zwei Grössen einer dritten kongruent, so sind sie auch unter einander kongruent.

Gr. IV. Das Ganze ist gleich der Summe seiner Teile und grösser als jeder Teil. Der Teil ist kleiner als das Ganze.

$$\begin{array}{rcl} \text{Z. B.} & 10 = 7 + 3 \\ & 10 > 7; 7 < 10 \\ & 10 > 3; 3 < 10. \\ \\ & x = y + z \\ \hline & x > y; y < x \\ & x > z; z < x. \end{array}$$

Gr. V. Wenn man mit Gleichem gleiche Rechnungen vornimmt, so erhält man Gleiches.

Unterfälle:

1. Gleiches zu Gleichem addiert*) giebt Gleiches.
2. „ von „ subtrahiert*) giebt Gleiches.
3. „ mit „ multipliziert*) „ „
4. „ durch Gleiches dividiert*) „ „
5. „ mit Gleichem potenziert*) „ „
6. „ „ „ radiziert*) „ „
7. „ auf gleiche Weise logarithmiert*) giebt Gleiches.

*) Ausdrucks- und Zeichenerklärungen s. Arithmetik.

Z. B. $16 = 16$

$2 = 2$

1. $18 = 18$

2. $14 = 14; (-14 = -14)$

3. $32 = 32$

4. $8 = 8; \left(\frac{1}{8} = \frac{1}{8}\right)$

$x = x$

$e = e$

1. $x + e = x + e$

2. $x - e = x - e; (e - x = e - x)$

3. $x \cdot e = x \cdot e$

4. $\frac{x}{e} = \frac{x}{e}; \left(\frac{e}{x} = \frac{e}{x}\right)$ u. s. w.

Gr. VI. Wenn man mit Ungleichem gleiche Rechnungen vornimmt, so erhält man Ungleiches in demselben Sinne (d. h. das Grössere da, wo es vorher war).

Unterfälle:

1. Ungleiches um Gleiches vermehrt giebt Ungleiches in demselben Sinne.

2. Ungleiches um Gleiches vermindert giebt Ungleiches in demselben Sinne.

3. Ungleiches mit Gleichem multipliziert giebt Ungleiches in demselben Sinne.

4. Ungleiches durch Gleiches dividiert giebt Ungleiches in demselben Sinne u. s. w.

Z. B. $16 > 4$
 $2 = 2$

1. $18 > 6$

2. $14 > 2$

3. $32 > 8$

4. $8 > 2.$

$x > y$
 $e = e$

1. $x + e > y + e$

2. $x - e > y - e$

3. $x \cdot e > y \cdot e$

4. $\frac{x}{e} > \frac{y}{e}$ u. s. w.

Gr. VII. 1. Gleiches um Ungleiches vermindert giebt Ungleiches im entgegengesetzten Sinne (d. h. das Grössere da, wo vorher das Kleinere war und umgekehrt).

Z. B. $20 = 20$
 $1 < 15$
 $19 > 5;$

$20 = 20$
 $18 > 3$
 $2 < 17.$

$x = x$

$y < z$

$x - y > x - z;$

$x = x$

$v > t$

$x - v < x - t.$

2. Gleiches durch Ungleiches dividiert giebt Ungleiches im entgegengesetzten Sinne (d. h. das Grössere da, wo vorher das Kleinere war und umgekehrt).

Z. B.	$64 = 64$	$64 = 64$	$x = x$	$x = x$
	$2 < 16$	$32 > 4$	$y < z$	$v > t$
	$\frac{2 < 16}{32 > 4};$	$\frac{32 > 4}{2 < 16};$	$\frac{x < z}{y > z};$	$\frac{x > t}{v < t}.$

Gr. VIII. Grösseres um Grösseres vermehrt giebt Grösseres, Kleineres um Kleineres vermehrt giebt Kleineres.

Z. B.	$5 > 3$	$2 < 20$
	$10 > 6$	$16 < 17$
	$\frac{10 > 6}{15 > 9};$	$\frac{16 < 17}{18 < 37}.$

$x > y$	$o < s$
$z > t$	$i < k$
$\frac{x > y}{x + z > y + t};$	$\frac{i < k}{o + i < s + k}.$

Gr. IX. Ist von 3 Grössen die erste grösser oder kleiner als die zweite und die zweite grösser oder kleiner als die dritte, so ist die erste erst recht grösser oder kleiner als die dritte.

Z. B.	$12 > 9$	$3 < 8$	$x > y$	$t < s$
	$9 > 7$	$8 < 20$	$y > z$	$s < o$
	$\frac{12 > 9}{12 > 7};$	$\frac{3 < 8}{3 < 20};$	$\frac{x > y}{x > z};$	$\frac{t < s}{t < o}.$

A. Planimetrie.

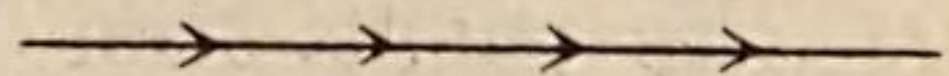
I. Einleitendes.

§ 7.

Es giebt zwei Hauptarten von Linien:

1. gerade Linie,
2. krumme Linie.

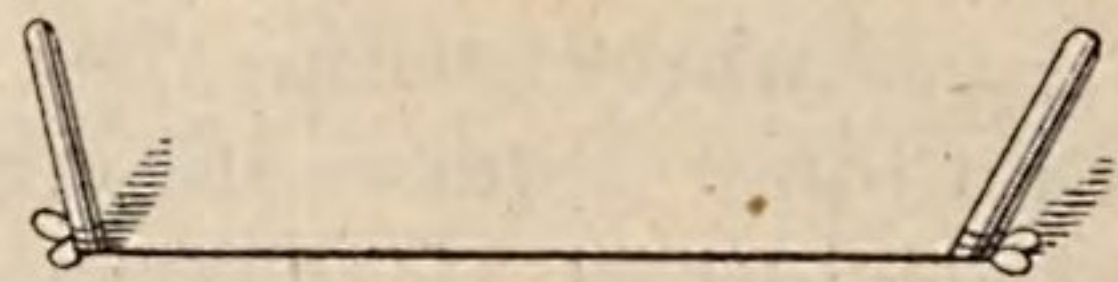
Eine gerade Linie ist eine Linie, welche in allen ihren Punkten dieselbe Richtung hat.



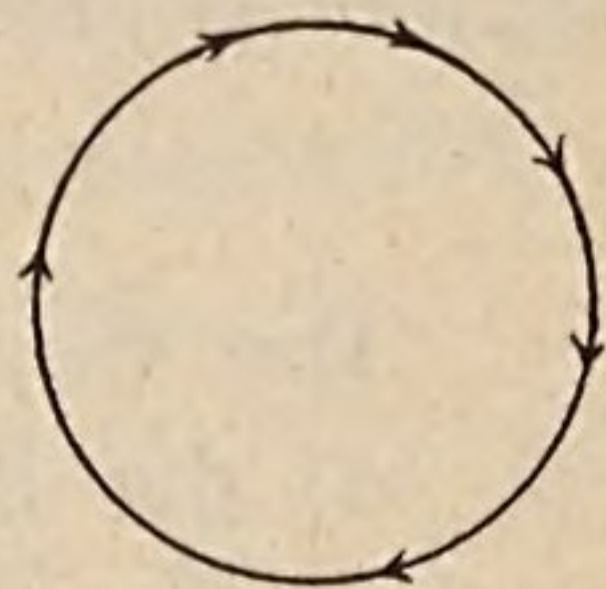
Über die gerade Linie gilt der

Gr. X. Zwischen zwei Punkten ist nur eine gerade Linie möglich. Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten. Zwei gerade Linien können sich nur in einem Punkte schneiden.

Anmerkung. Die ersten beiden Sätze werden oft auch als Erklärung der geraden Linie gegeben. Zwischen zwei Punkten sind unendlich viele krumme Linien (aber nur eine gerade Linie) möglich. Die gerade Linie ist, ebenso wie der Raum, eine Grundvorstellung; es lässt sich von ihr keine erschöpfende Erklärung geben. Das beste Bild einer geraden Linie macht sich der Schüler durch einen gespannten Faden.



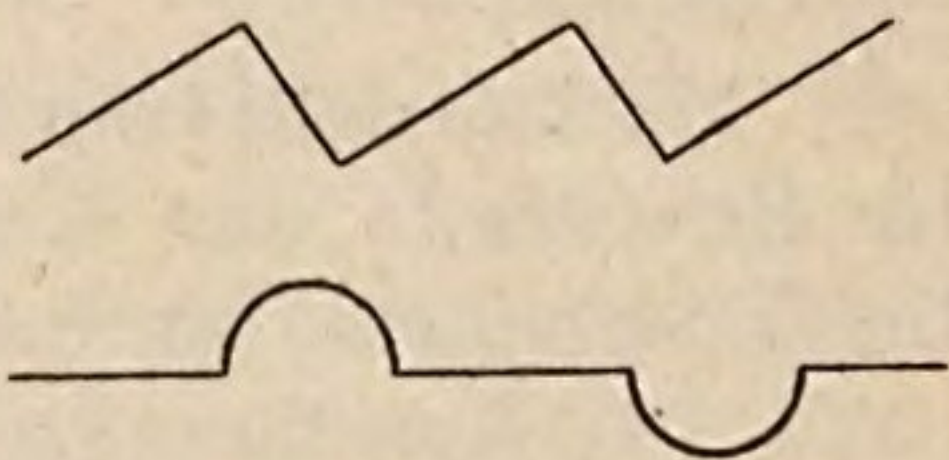
Eine krumme Linie (Kurve) ist eine Linie, welche in allen ihren Punkten die Richtung ändert, z. B. der Kreis.



Unterarten sind die gebrochene und die gemischte Linie.

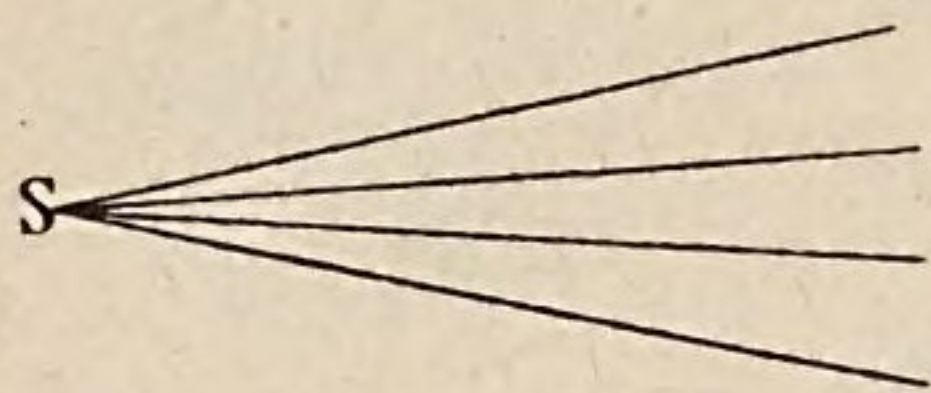
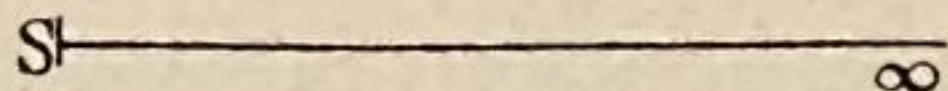
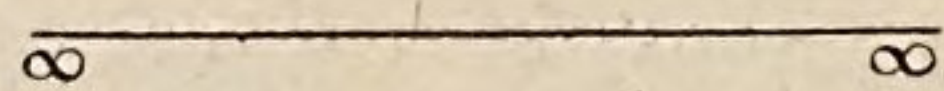
Es giebt drei Arten von geraden Linien:

1. die unbegrenzte gerade Linie,
2. der Strahl,
3. die Strecke.

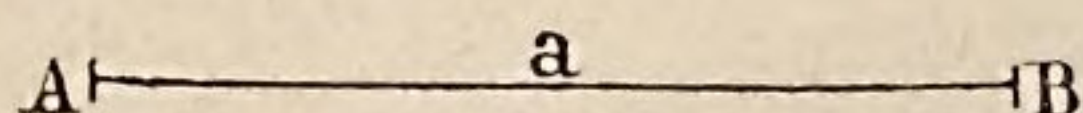


Die unbegrenzte gerade Linie (g. L.), auch schlechtweg gerade Linie oder Gerade oder auch nur Linie genannt, ist eine Linie, die sich nach beiden Seiten hin ins Unendliche (∞) erstreckt.

Der Strahl ist eine auf einer Seite begrenzte gerade Linie.



Eine Vereinigung von mehreren Strahlen heisst Strahlenbüschel, der Punkt, von dem sie ausgehen, der Strahlenmittelpunkt oder schlechtweg Strahlenpunkt (S).



Die Strecke ist eine auf beiden Seiten begrenzte gerade Linie. Sie ist das Mass für die Entfernung ihrer Endpunkte (Bezeichnung AB (BA) oder a).

Anmerkung. Die Masseinheit für die Strecke ist das Meter*) (m). Ein Meter ist gleich dem 40millionsten Teil des Erdumfangs. $1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$ (Decimeter) $= 100 \text{ cm}$ (Centimeter) $= 1000 \text{ mm}$ (Millimeter). 10 m heissen ein Dekameter [(dkm), 100 m ein Hektometer (hm) und 1000 m ein Kilometer (km).

§ 8.

Es giebt zwei Hauptarten von Flächen:

1. die gerade Fläche oder Ebene,
2. die krumme Fläche.

Eine Ebene ist eine Fläche, in welcher man von allen Punkten nach allen Richtungen gerade Linien ziehen kann.

Eine krumme Fläche ist eine solche, in welcher man nicht von allen Punkten nach allen Richtungen gerade Linien ziehen kann.

Unterarten sind die gebrochene und die gemischte Fläche.

Anmerkung. Die Masseinheit für die Fläche ist das Quadratmeter (qm). $1 \text{ qm} = 100 \text{ qdm}$ (Quadratdecimeter) $= 10\,000 \text{ qcm}$ (Quadratcentimeter) $= 1\,000\,000 \text{ qmm}$ (Quadratmillimeter). 100 qm heissen ein Ar (a), 10000 qm oder 100 a heissen ein Hektar (ha), 1000000 qm ein Quadratkilometer (qkm).

§ 9.

Die Geometrie zerfällt in zwei Abteilungen:

1. die Planimetrie**),
2. die Stereometrie.**)

*) Aus dem Griechischen; bedeutet „Mass“. Die Bezeichnungen für die Bruchteile des Meters sind durch Vorsetzen lateinischer, die für die Vielfachen durch Vorsetzen griechischer Zahlwörter gebildet.

**) Aus dem Lateinischen und Griechischen; bedeutet „Flächenmesskunst“ bez. „Körpermesskunst“.

Die Planimetrie ist die Lehre von den Gebilden, welche in einer Ebene liegen.

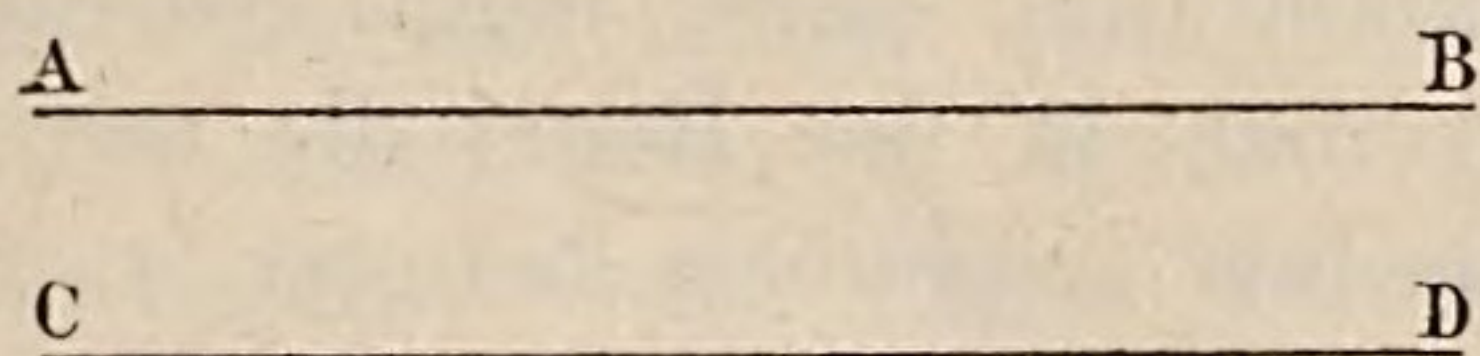
Die Stereometrie ist die Lehre von den körperlichen Grössen. Sie handelt von den räumlichen Gebilden, die nicht in einer Ebene liegen, insonderheit von den Körpern selber.

II. Von den Parallelen und den Winkeln.

§ 10.

Zwei gerade Linien können in einer Ebene zweierlei Lagen haben, je nachdem sie dieselbe oder verschiedene Richtung besitzen.

Haben zwei Linien dieselbe Richtung, so nennt man sie *parallel**) ($\parallel$), z. B. $AB \parallel CD$.

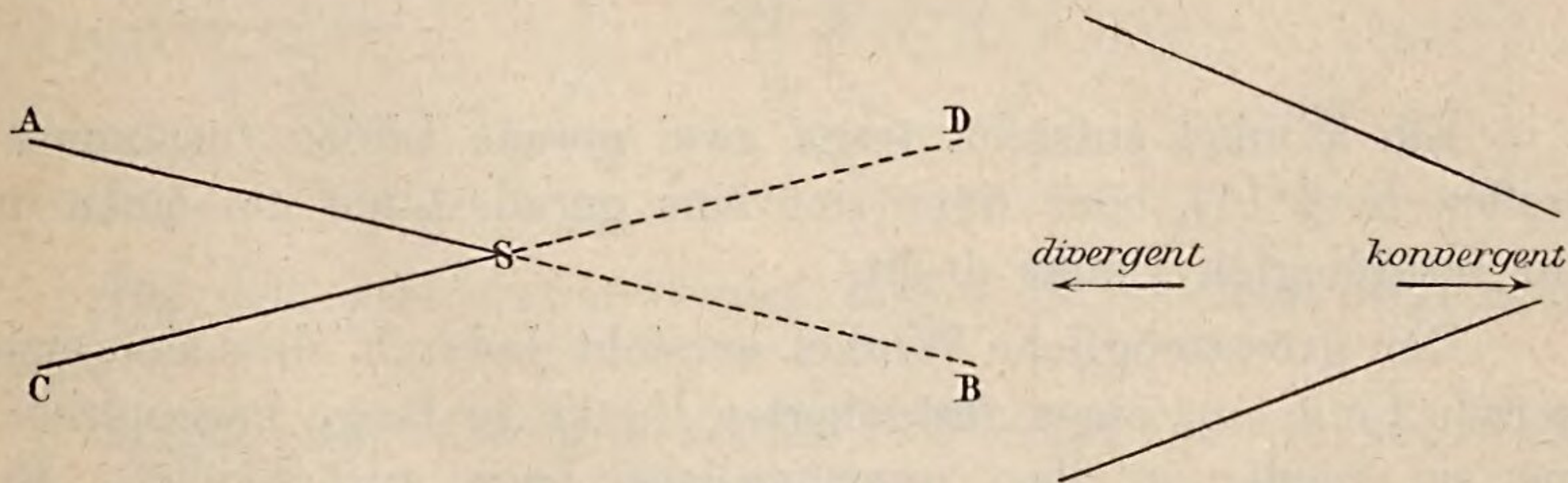


Erklärung: Parallele Linien sind solche Linien, welche dieselbe Richtung haben und sich, soweit man sie auch verlängern mag, nie treffen.

Gr. XI. Durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden lässt sich zu dieser nur **eine** Parallele ziehen.

Haben zwei Linien verschiedene Richtung, so werden sie sich bei genügender Verlängerung schneiden.

Der gemeinsame Punkt S heisst der Schnittpunkt.



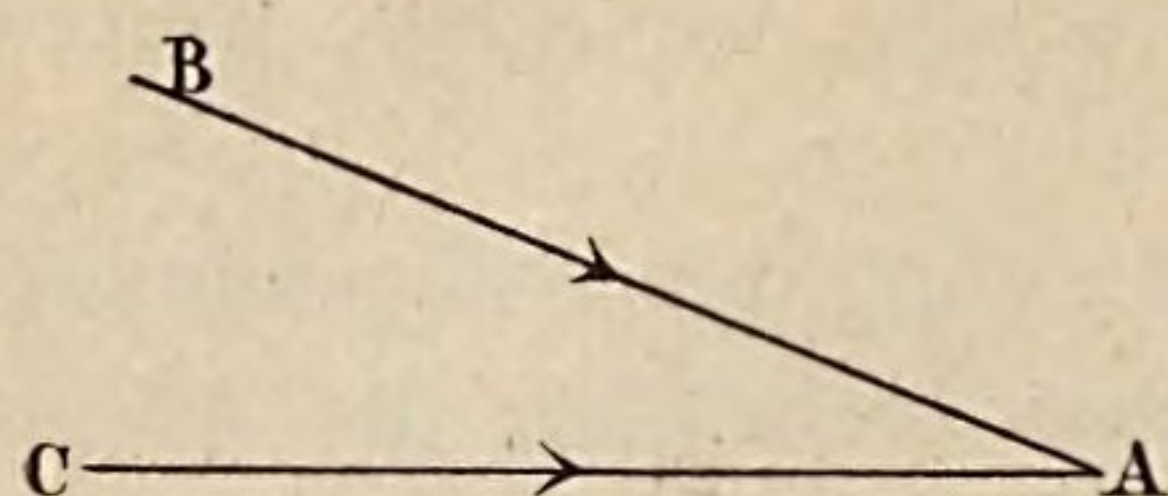
Nach dem Schnittpunkt zu heissen die Linien *konvergent***), auf der andern Seite *divergent***).

§ 11.

Zwei verschieden gerichtete gerade Linien bilden bei ihrem Zusammentreffen einen Winkel. Der Teil der Ebene, den sie

*) Aus dem Griechischen; bedeutet „nebeneinander befindlich“.

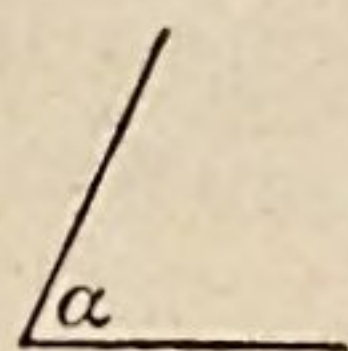
***) Aus dem Lateinischen; bedeutet „zusammenlaufend“ bez. „auseinanderlaufend“.



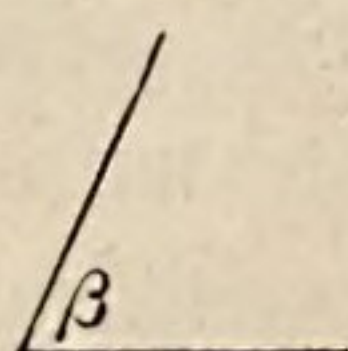
ausschneiden, heisst Winkelraum oder schlechtweg Winkel ($\sphericalangle$).

Erklärung: Ein Winkel ist der Richtungsunterschied zweier von einem Punkte ausgehenden Strahlen.

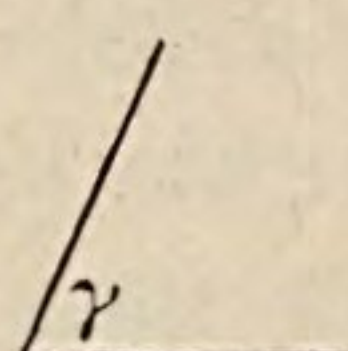
Die beiden Strahlen nennt man die Schenkel des Winkels z. B. BA u. CA , den Punkt, in welchem sie zusammentreffen, seinen Scheitelpunkt (Scheitel). Man bezeichnet den $\sphericalangle$ meistens durch drei Buchstaben, wobei der des Scheitels in die Mitte gesetzt werden muss, z. B. $\sphericalangle BAC$ oder $\sphericalangle CAB$. Ist kein Missverständnis möglich, so schreibt man auch wohl nur den Buchstaben des Scheitels, z. B. $\sphericalangle A$. Man setzt auch wohl in den Winkelraum nahe beim Scheitel einen kleinen Buchstaben, wozu man in der Regel die ersten kleinen Buchstaben des griechischen Alphabets benutzt, z. B.



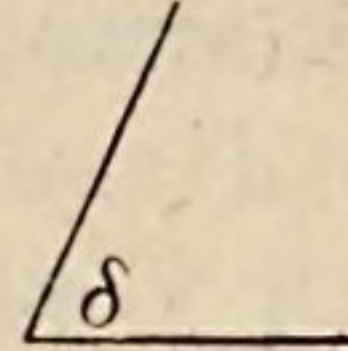
($\sphericalangle \alpha$, Alpha)



($\sphericalangle \beta$, Bēta)



($\sphericalangle \gamma$, Gamma)



($\sphericalangle \delta$, Delta)

Eine andere Art der Bezeichnung für mehrere Winkel mit einem gemeinsamen Scheitelpunkt s. § 26 f. f.

§ 12.

Ein Winkel entsteht, wenn zwei gerade Linien zusammentreffen (s. § 11), oder wenn sich eine gerade Linie um einen in ihr festgelegten Punkt dreht.

Der grösstmögliche Winkel entsteht dadurch, dass sich eine gerade Linie um einen festgelegten Punkt so lange herumdreht, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt. Er heisst Voll- oder Kreiswinkel ($\odot$).

Erklärungen. Ein Voll- oder Kreiswinkel ist eine ganze Umdrehung, ein gestreckter Winkel ($\sphericalangle$) ist eine halbe, ein rechter Winkel ($\perp$) (R) $\frac{1}{4}$ Umdrehung.

$$\begin{aligned} \odot &= 2 \sphericalangle = 4 R \\ 1 \sphericalangle &= \frac{1}{2} \odot = 2 R \\ 1 R &= \frac{1}{2} \sphericalangle = \frac{1}{4} \odot. \end{aligned}$$

Als Mass des Winkels dient der zugehörige Bogen.

Den Vollwinkel teilt man in 360 Gradwinkel*) (360°) oder Grade ein. Demnach

$$\odot = 360^{\circ}$$

$$\triangle = 180^{\circ}$$

$$R = 90^{\circ}.$$

Den Grad teilt man ein in 60 Minuten**) ($60'$), die Minute in 60 Sekunden**) ($60''$) und die Sekunde in 60 Tertien**) ($60'''$). Demnach

$$1^{\circ} = 60'; \quad 1' = 60''; \quad 1'' = 60'''.$$

Für die Grösse eines Winkels kommt es nur auf die Grösse der Drehung oder des Richtungsunterschiedes der Schenkel, nicht etwa auf die Länge der Schenkel an. Eine ganze Umdrehung ist immer gleich einer andern ganzen Umdrehung, gleichgültig ob die Schenkel länger oder kürzer sind.

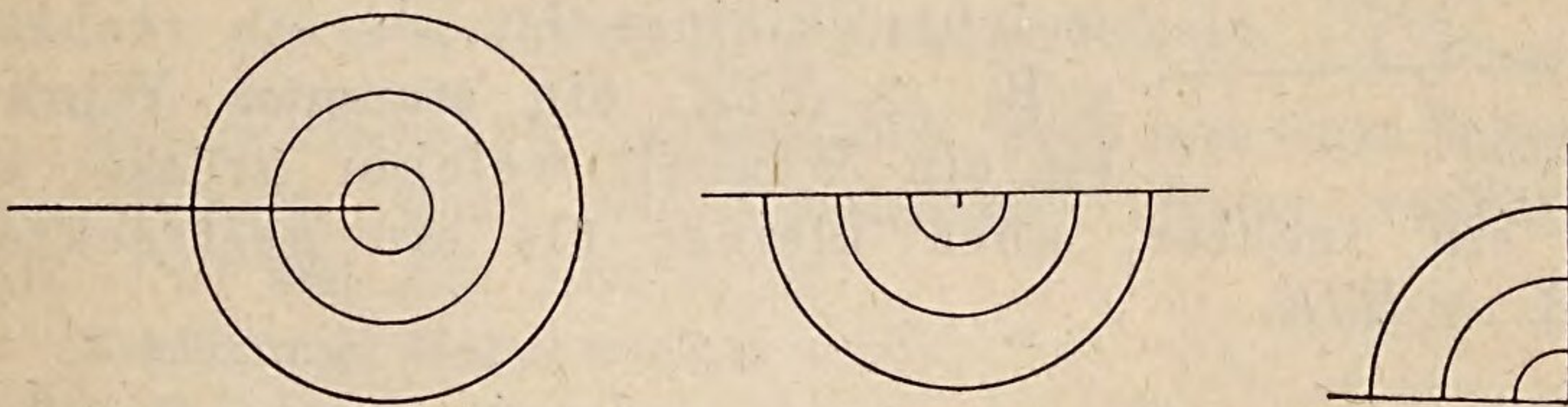
Zwei Winkel sind gleich, wenn man sie so aufeinander legen kann, dass ihre Scheitelpunkte und beide Schenkel, letztere der Richtung nach, zusammenfallen.

Man merke:

Alle Vollwinkel sind einander gleich (360°).

„ gestreckten Winkel sind einander gleich (180°).

„ rechten „ „ „ gleich (90°).



Bei dem gestreckten Winkel liegen die Schenkel in gerader Linie.

Erklärung: Ein gestreckter Winkel ist ein solcher, dessen Schenkel auf entgegengesetzten Seiten des Scheitels in gerader Linie liegen. Ein gestreckter

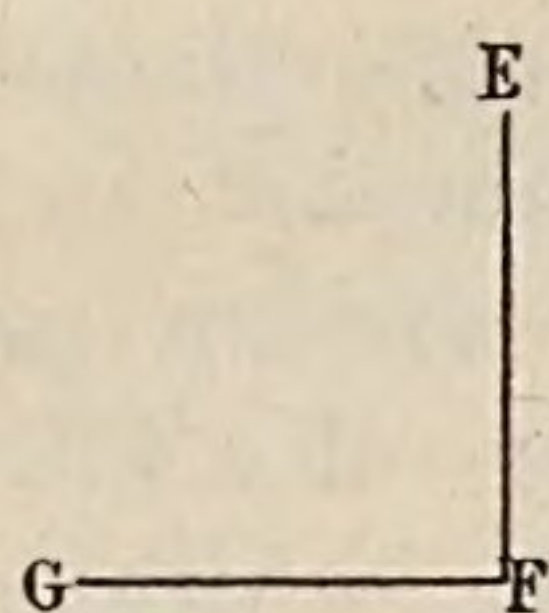
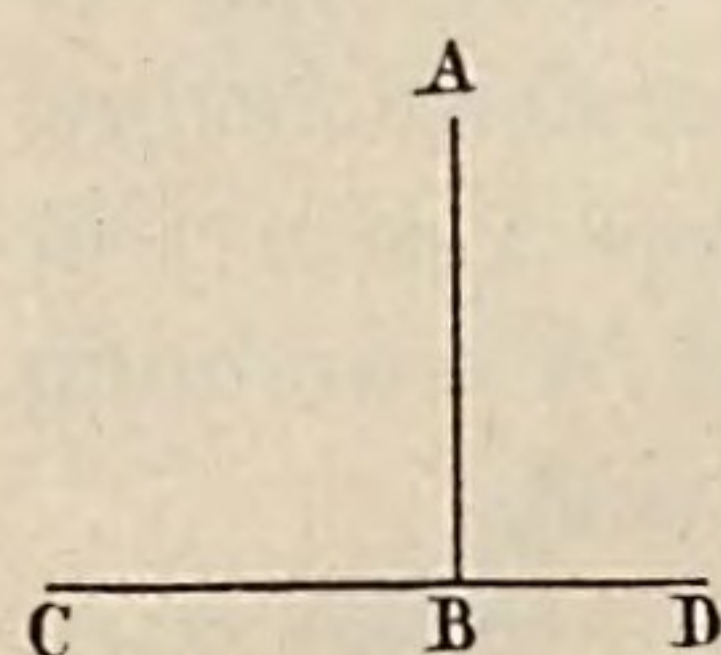
*) Die Winkelteilung ist von der Kreisteilung hergenommen. Diese findet sich schon bei den Chaldäern und alten Ägyptern. Sie hängt vermutlich mit der alten Einteilung des Sonnenjahres in 360 Tage zusammen.

**) Grad kommt von dem lateinischen gradus Schritt; man verstand darunter den Teil der Bahn, um den die Sonne täglich fortschritt. Minuten, Sekunden, Tertien rühren auch aus dem Lateinischen her und bedeuten der verkleinerte, der zum zweiten und dritten Male verkleinerte Grad.

Winkel ist $= 2 R$. Ein Winkel, welcher $= 2 R$ ist, ist ein gestreckter.

Von den Schenkeln des rechten Winkels sagt man, sie stehen senkrecht (lotrecht, perpendikulär, $\perp$) aufeinander.

Erklärung: Eine Linie ist eine Senkrechte, ein Lot, ein Perpendikel*) auf einer andern, wenn sie einen rechten Winkel mit ihr bildet, z. B. $AB \perp CD$, oder $CD \perp AB$; $EF \perp FG$ oder $FG \perp EF$. Den Endpunkt des Lotes nennt man den Fusspunkt; z. B. B oder F .

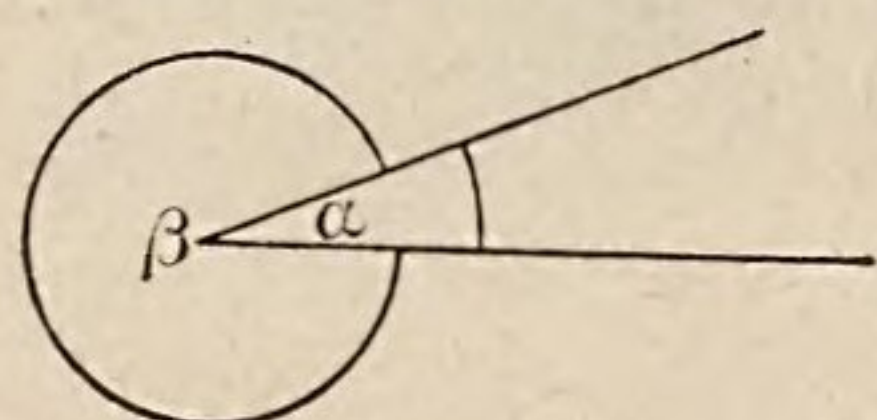


Erklärungen: Ein **konkaver**)** (hohler) Winkel ist ein Winkel, welcher kleiner ist als ein gestreckter, z. B. $\sphericalangle \alpha$.

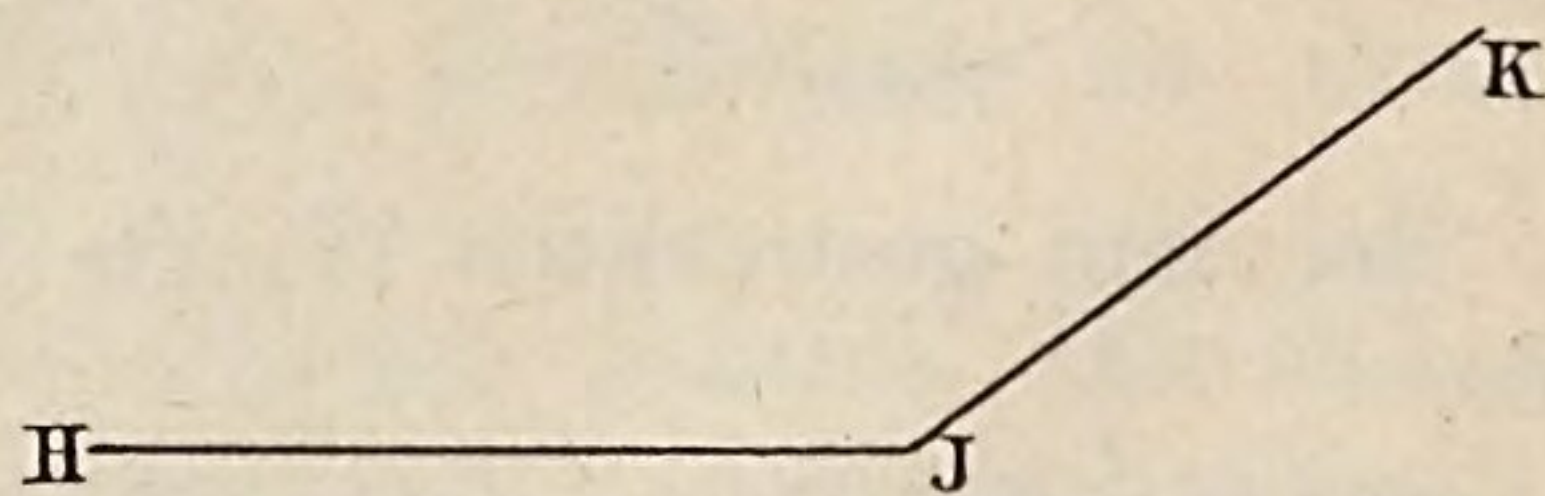
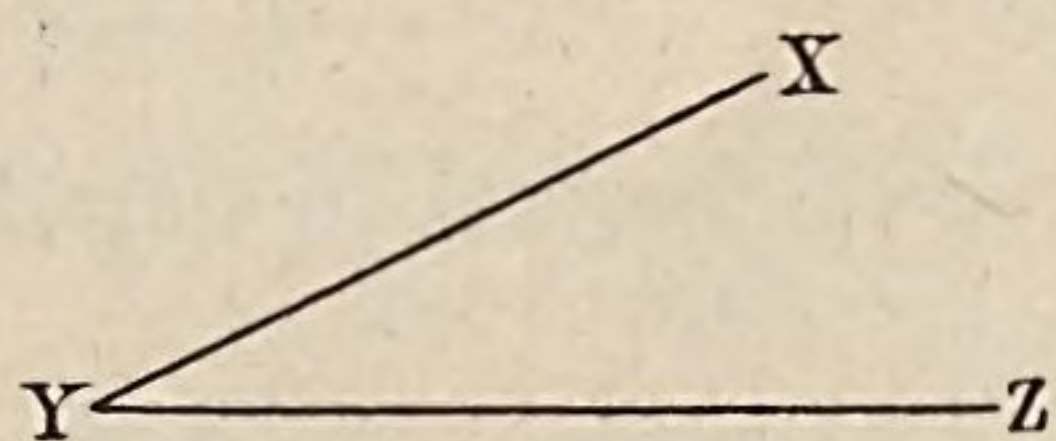
Ein **konvexer**)** (erhabener) Winkel ($\sphericalangle$) ist ein Winkel, welcher grösser ist als ein gestreckter, z. B. $\sphericalangle \beta$. Die konkaven Winkel liegen zwischen 0° und 180° ausschl.

„ konvexen „ „ „ „ 180° „ 360° „

Die konvexen Winkel sind für uns nicht wichtig; wenn im Folgenden schlechtweg von Winkeln die Rede ist, sind darunter immer konkave Winkel zu verstehen.



Ein **spitzer** Winkel ist ein Winkel, welcher kleiner ist als ein rechter, z. B. $\sphericalangle XYZ$, ein **stumpfer** Winkel ist ein Winkel, welcher grösser ist als ein rechter, aber kleiner als ein gestreckter, z. B. $\sphericalangle HJK$.



Die spitzen Winkel liegen zwischen 0° und 90° ausschl.

„ stumpfen „ „ „ „ 90° „ 180° „

Spitze und stumpfe Winkel heissen mit gemeinsamem Namen schiefe Winkel.

Ein Winkel, welcher einen andern zu $1 R$ ergänzt, heisst sein Komplementwinkel***) oder auch nur Komplement.

*) Aus dem Lateinischen; bedeutet „Senklinie“.

**) Aus dem Lateinischen; bedeutet „hohl“ bez. „erhaben“.

***) Aus dem Lateinischen; bedeutet „Ergänzung“.

Z. B. Der Komplementwinkel eines Winkels von 30° beträgt 60° und umgekehrt.

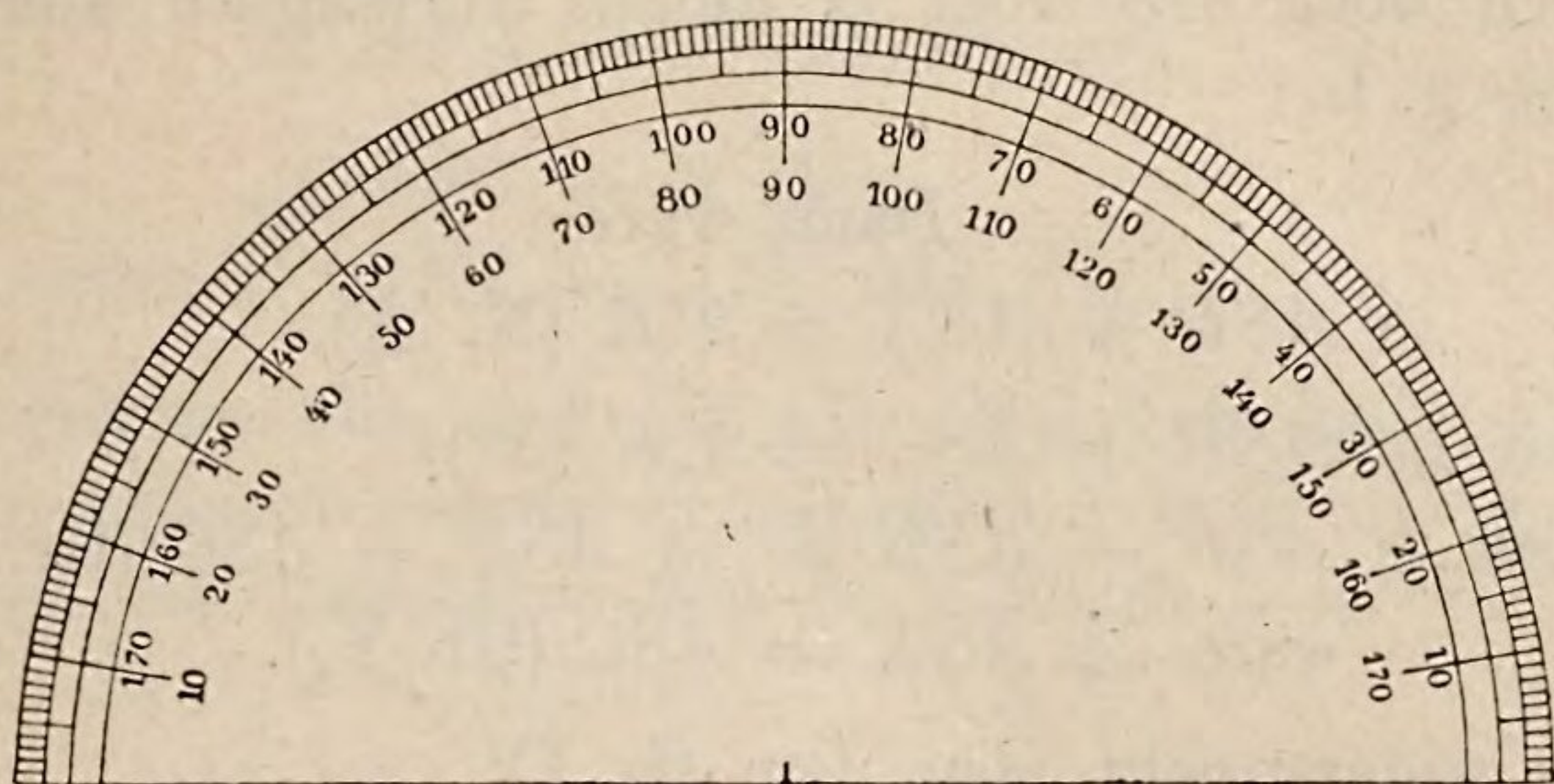
Der Komplementwinkel von $\sphericalangle \alpha$ ist $= R - \alpha$ und umgekehrt.

Ein Winkel, welcher einen andern zu $2 R$ ergänzt, heisst sein Supplementwinkel*) oder auch nur Supplement.

Z. B. Der Supplementwinkel eines Winkels von 100° beträgt 80° und umgekehrt.

Der Supplementwinkel von $\sphericalangle \alpha$ ist $= 2 R - \alpha$ und umgekehrt.

Anmerkung. Die Grösse der Winkel misst man meistens mittelst des Transporteurs**), dessen Benutzung leicht zu verstehen

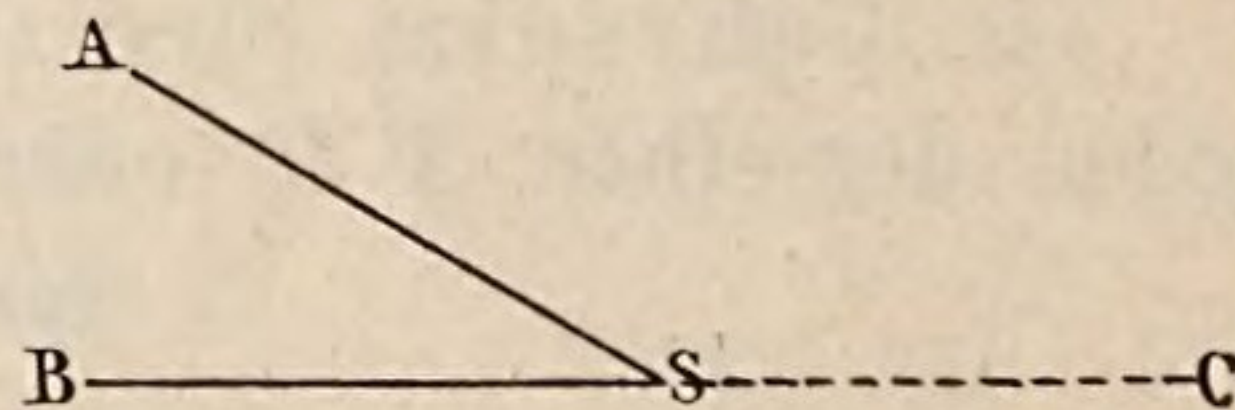


ist, wenn man sich merkt, dass der Scheitelpunkt des zu messenden Winkels mit der Mitte der geraden Grenzlinie zusammenfallen muss.

§ 13. Von den Nebenwinkeln.

Nebenwinkel (N. $\sphericalangle$) entstehen, wenn man einen Schenkel eines Winkels über den Scheitelpunkt hinaus verlängert; z. B. ASB und ASC sind N. $\sphericalangle$.

Erklärung: Nebenwinkel sind zwei Winkel, welche einen Schenkel gemein haben und deren andere beide Schenkel eine gerade Linie bilden.



1. **Lehrsatz:** Die Summe zweier Nebenwinkel ist $= 2 R$.

Vor. α und β sind N. $\sphericalangle$.

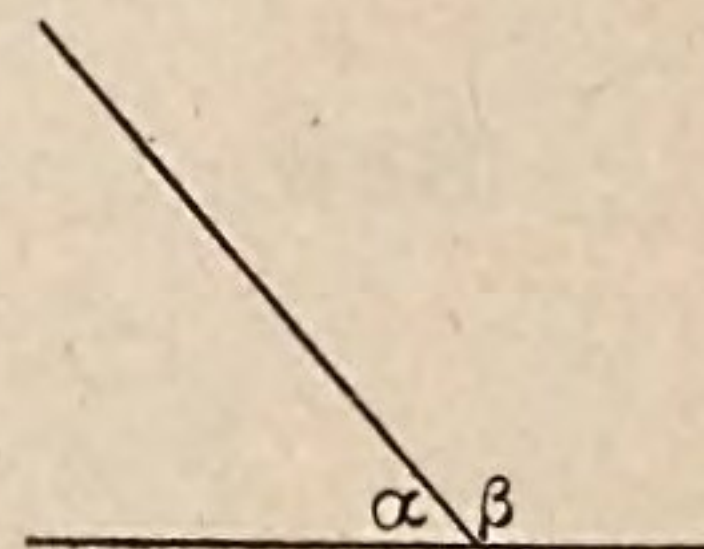
Beh. $\sphericalangle \alpha + \beta = 2 R$.

Bew. $\sphericalangle \alpha + \beta = \sphericalangle$ (V.)

$\sphericalangle = 2 R$ (Erklärung)

$\sphericalangle \alpha + \beta = 2 R$ (Gr. III).

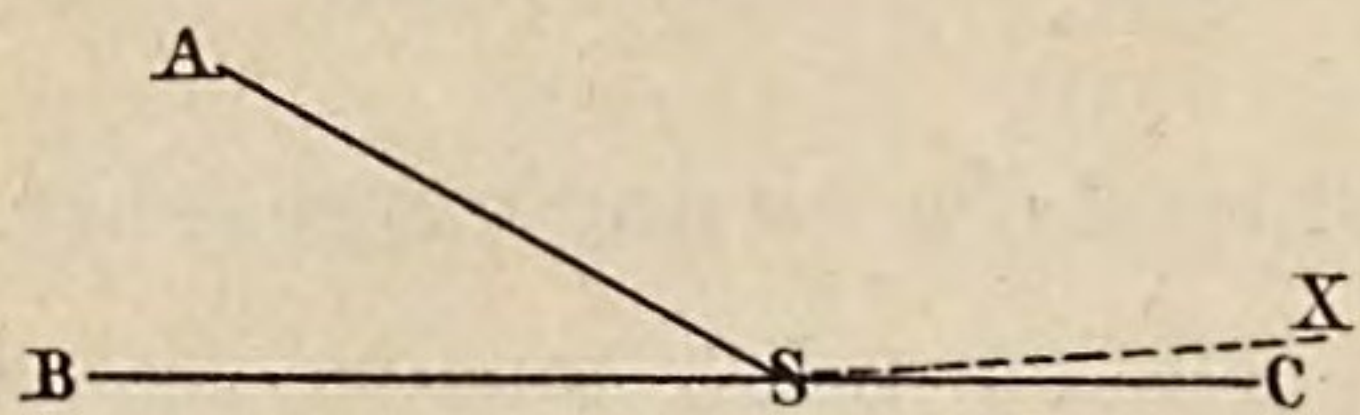
W. z. b. w.



*) Aus dem Lateinischen; bedeutet „Ergänzung“.

**) Aus dem Französischen; bedeutet „Übertrager“.

Umkehrung: Ist die Summe zweier Winkel mit einem gemeinsamen Schenkel und Scheitelpunkt, welche auf entgegengesetzter Seite dieses Schenkels liegen, $= 2 R$, so sind sie Nebenwinkel, d. h. ihre nicht gemeinsamen Schenkel bilden eine gerade Linie.



Vor. $\sphericalangle ASB + \sphericalangle ASC = 2 R$.

Beh. BSC eine g. L., oder

ASB u. ASC sind N. $\sphericalangle$.

Bew. (indirekt). Angenommen

BSC wäre nicht eine g. L., so

müsste ich doch BS über S hinaus verlängern können, z. B. BSX eine g. L.

Dann wäre:

$$\sphericalangle ASB + \sphericalangle ASX = 2 R \text{ (N. } \sphericalangle \text{)}.$$

Es ist aber $\sphericalangle ASB + \sphericalangle ASC = 2 R$ (V.)

$$\text{wäre } \sphericalangle ASB + \sphericalangle ASX = \sphericalangle ASB + \sphericalangle ASC \text{ (Gr. III)}$$

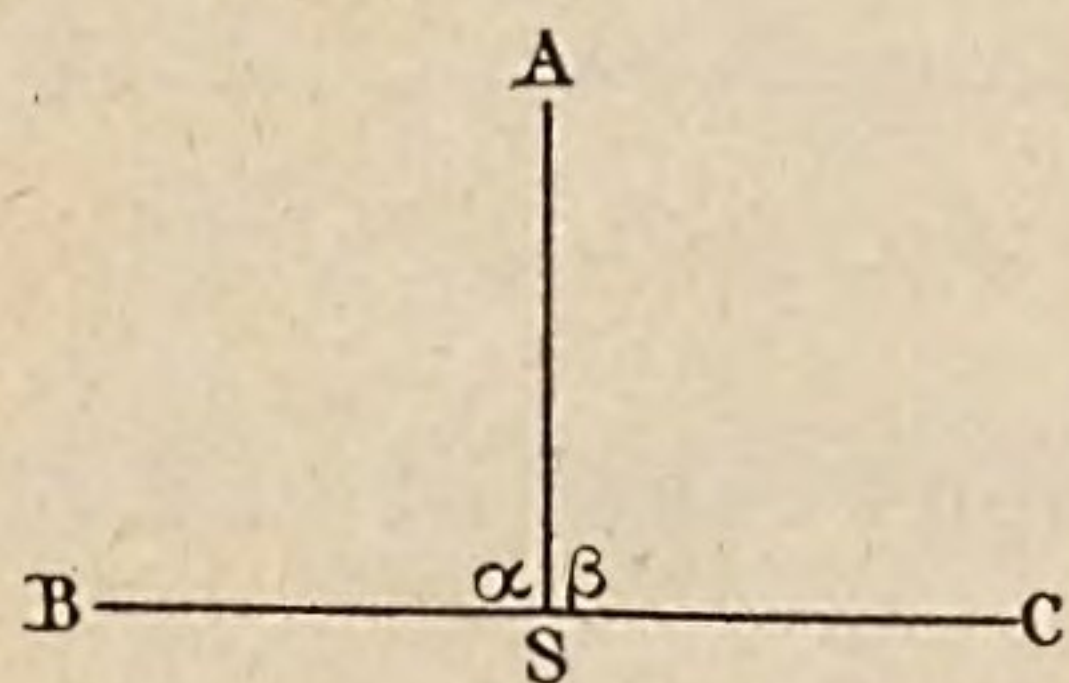
$$\text{wäre } \sphericalangle ASX = \sphericalangle ASC \text{ (Gr. V}_2\text{)}.$$

Dies widerspricht aber dem Gr. IV.

Folglich kann BSX keine g. L. sein. Ebenso würde es mit allen angeblichen Verlängerungen von BS über S hinaus gehen mit Ausnahme von SC . Folglich ist BSC eine g. L., oder ASB und ASC sind N. $\sphericalangle$. W. z. b. w.

Zusatz. Alle Winkel um einen Punkt auf derselben Seite einer Geraden betragen $2 R$.

2. Lehrsatz. Sind zwei Nebenwinkel einander gleich, so ist jeder derselben $1 R$, oder der gemeinsame Schenkel steht auf dem nicht gemeinsamen $\perp$.



Vor.: α u. β sind N. $\sphericalangle$.

$$\sphericalangle \alpha = \beta$$

Beh.: $\sphericalangle \alpha = R$

$$\sphericalangle \beta = R$$

oder $AS \perp BC$

Bew.: $\sphericalangle \alpha + \beta = 2 R$ (N. $\sphericalangle$)

$$\sphericalangle \alpha = \beta \text{ (V.)}$$

$$2 \sphericalangle \alpha \text{ oder } 2 \sphericalangle \beta = 2 R \text{ (Gr. II)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sphericalangle \alpha = 1 R \\ \sphericalangle \beta = 1 R \end{array} \right\} \text{ (Gr. V}_4\text{)}.$$

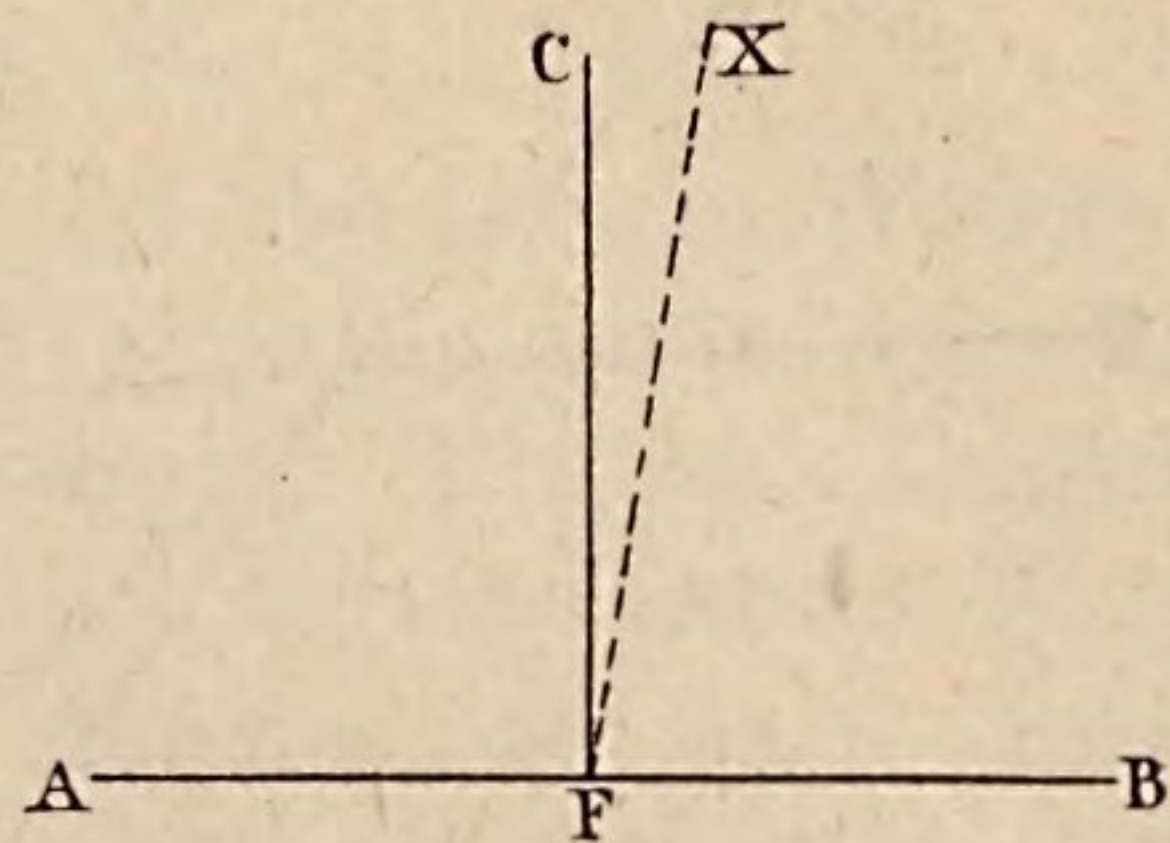
Oder $AS \perp BC$ (Erklärung). W. z. b. w.

3. Lehrsatz: Auf einer geraden Linie kann man in einem Punkte nur ein Lot errichten. (Konstruktion s. Anhang A.)

Vor. $FC \perp AB$.

Beh. FC einziges Lot auf AB in F .

Bew. (indirekt). Angenommen FC wäre nicht das einzige Lot auf AB in F , so müsste ich doch ein anderes ziehen können, z. B. $FX \perp AB$.



Dann wäre:

$$\sphericalangle AFX = R \text{ (Erklärung).}$$

Es ist aber $\sphericalangle AFC = R$ (V.)

$$\text{wäre } \sphericalangle AFX = \sphericalangle AFC \text{ (Gr. III).}$$

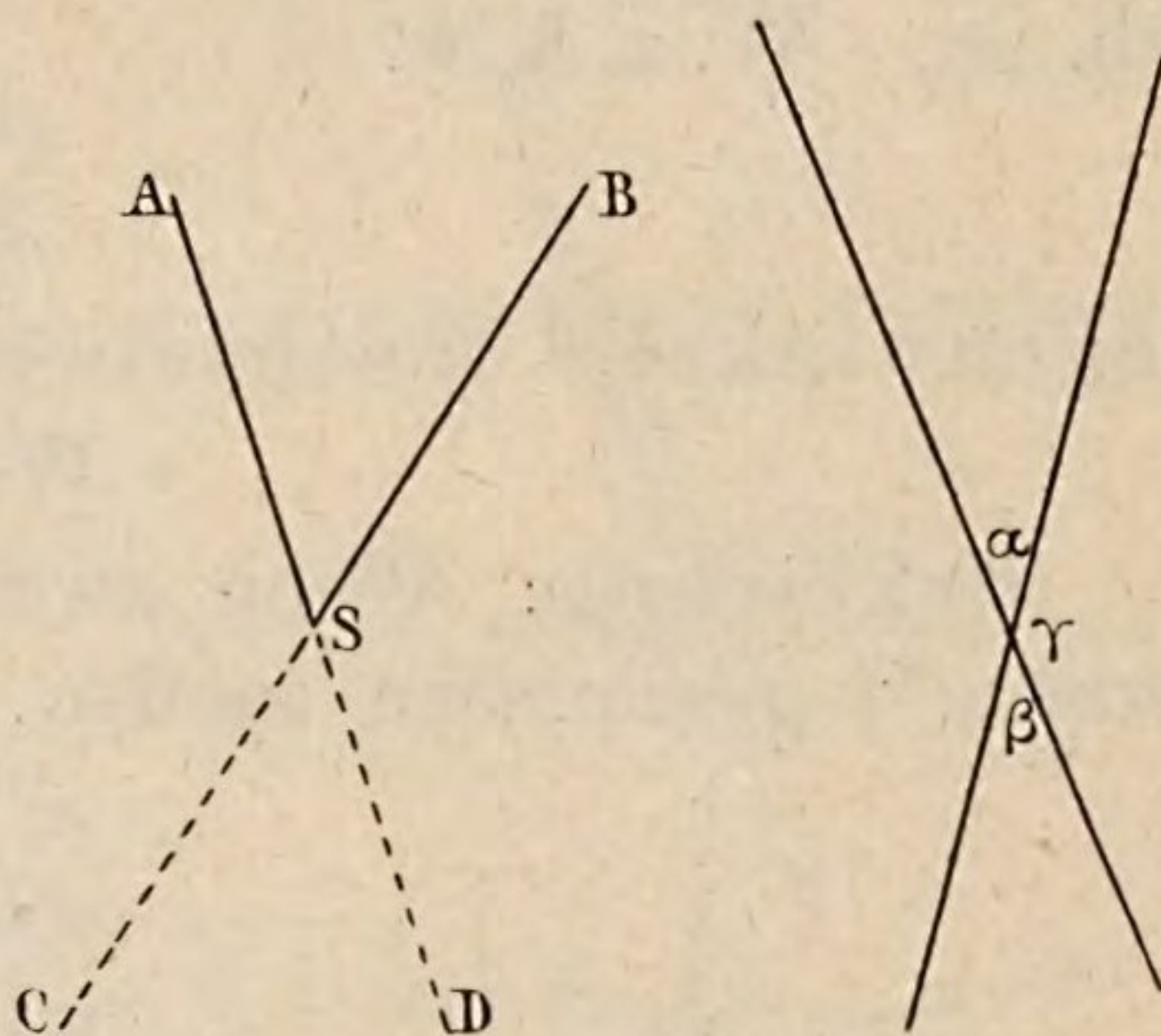
Dies widerspricht aber Gr. IV. Folglich kann FX nicht $\perp AB$ sein. Ebenso würde es mit allen von F aus gezogenen Linien gehen mit Ausnahme von FC . Folglich ist FC einziges Lot auf AB in F . W. z. b. w.

§ 14. Von den Scheitelwinkeln.

Scheitelwinkel (Sch. $\sphericalangle$) entstehen, wenn man beide Schenkel eines Winkels über den Scheitelpunkt hinaus verlängert; z. B. ASB u. CSD sind Sch. $\sphericalangle$.

Erklärung: Scheitelwinkel sind zwei Winkel, welche den Scheitelpunkt gemeinsam haben und bei denen die Schenkel des einen die Verlängerungen der Schenkel des andern sind.

Lehrsatz: Scheitelwinkel sind einander gleich.



Vor. α u. β sind Sch. $\sphericalangle$.

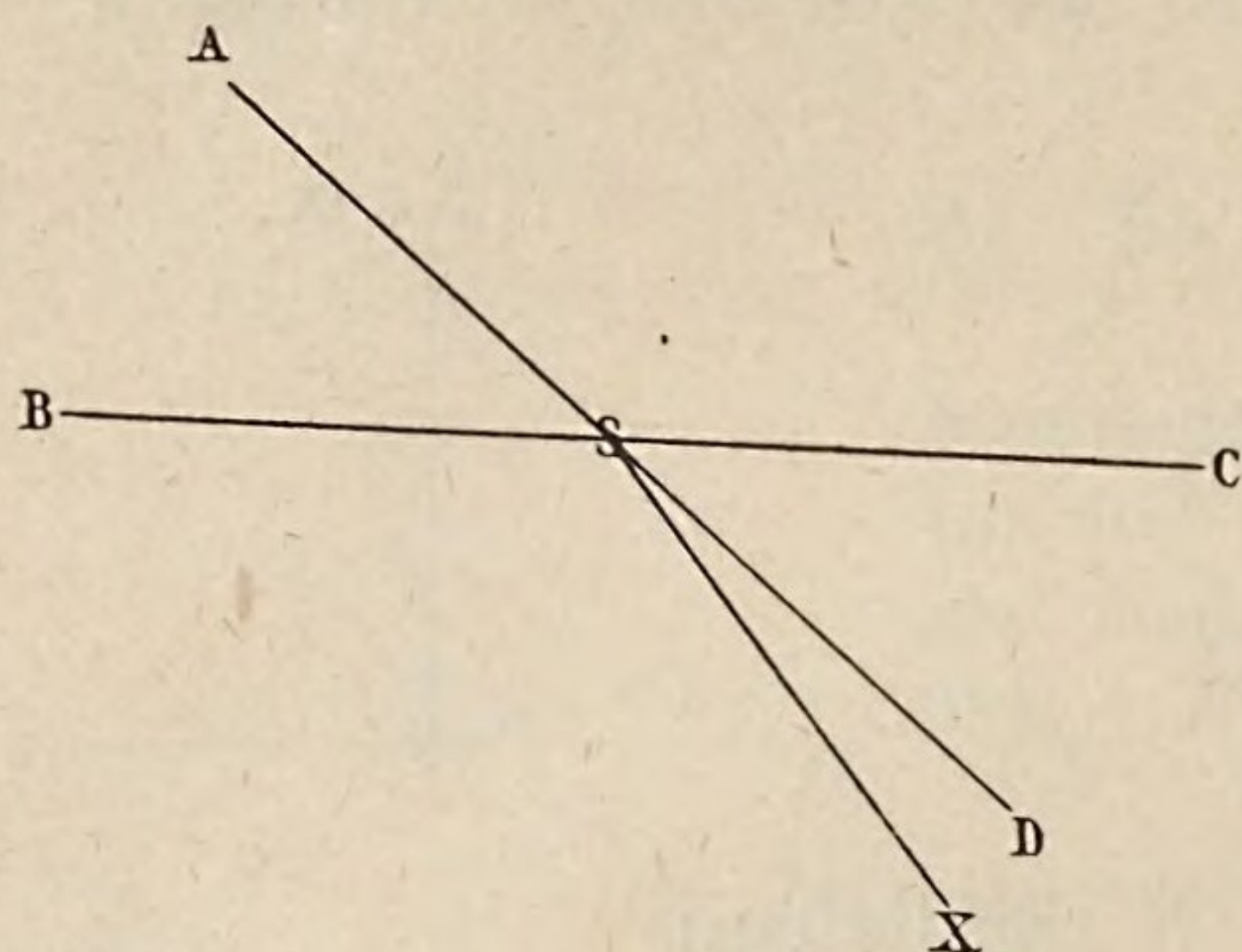
Beh. $\sphericalangle \alpha = \beta$.

Bew. $\sphericalangle \alpha + \gamma = 2 R$ } (N. $\sphericalangle$)
 $\sphericalangle \beta + \gamma = 2 R$ }

$$\sphericalangle \alpha + \gamma = \sphericalangle \beta + \gamma \text{ (Gr. III)}$$

$$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta \text{ (Gr. V}_2\text{). W. z. b. w.}$$

Umkehrung: Wenn der eine von zwei gleichen Winkeln mit einem gemeinsamen Scheitelpunkt an den Nebwinkel des andern angefügt ist, so sind die Winkel Scheitelwinkel, d. h. auch das andere Paar ihrer Schenkel bildet eine g. L.



Vor. $\sphericalangle ASB = \sphericalangle CSD$
 BSC eine g. L.

Beh. Auch ASD ist eine g. L., oder
 ASB und CSD sind Sch. $\sphericalangle$.

Bew. (indirekt). Angenommen ASD wäre nicht eine g. L., so müsste ich doch AS über S hinaus verlängern können, z. B. ASX eine g. L.

Dann wäre:

$$\sphericalangle ASB = \sphericalangle CSX \text{ (Sch. } \sphericalangle \text{)}$$

$$\sphericalangle ASB = \sphericalangle CSD \text{ (V.)}$$

$$\text{wäre } \sphericalangle CSX = \sphericalangle CSD \text{ (Gr. III).}$$

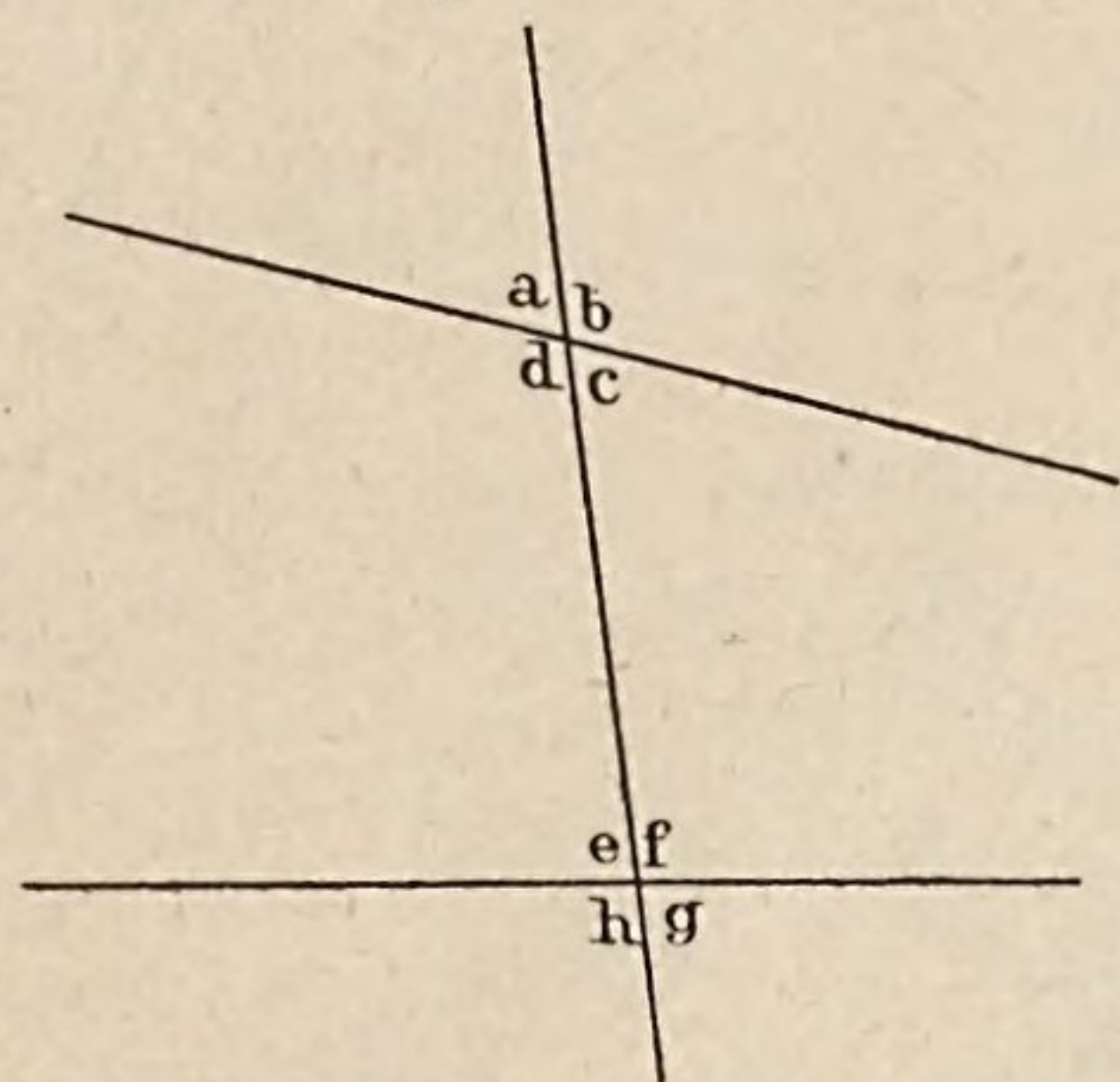
Dies widerspricht aber dem Gr. IV.

Folglich kann ASX keine g. L. sein. Ebenso würde es mit allen angeblichen Verlängerungen von AS gehen mit Ausnahme von SD . Folglich ist ASD eine g. L. oder ASB und CSD sind Sch. $\sphericalangle$. W. z. b. w.

§ 15.

Gegenwinkel, Wechselwinkel und entgegengesetzte Winkel.

Erklärung: Wenn zwei g. L. von einer dritten, Transversale,*) geschnitten werden, so entstehen acht Winkel, z. B.



$\sphericalangle a, b, c, d, e, f, g, h$. Wir unterscheiden Gegenwinkel, Wechselwinkel und entgegengesetzte Winkel.

1. **Gegenwinkel** (G. $\sphericalangle$) sind zwei Winkel, die an derselben Seite der Transversale und der geschnittenen Linien liegen; $\sphericalangle a$ u. e , b u. f , c u. g , d u. h sind G. $\sphericalangle$.

*) Aus dem Lateinischen; bedeutet „Hindurchgerichtete“.

2. **Wechselwinkel** (W. $\sphericalangle$) sind zwei Winkel, die an verschiedenen Seiten der Transversale und der geschnittenen Linien liegen; $\sphericalangle c$ u. e , $\sphericalangle d$ u. f sind innere W. $\sphericalangle$, $\sphericalangle a$ u. g , $\sphericalangle b$ u. h sind äussere W. $\sphericalangle$.

3) **Entgegengesetzte Winkel** (E. $\sphericalangle$) sind zwei Winkel, die an derselben Seite der Transversale, aber an verschiedenen Seiten der geschnittenen Linien liegen; $\sphericalangle c$ u. f , $\sphericalangle d$ u. e sind innere E. $\sphericalangle$, $\sphericalangle a$ u. h , b u. g sind äussere E. $\sphericalangle$.

Anmerkung: Die Gegenwinkel [werden oft auch korrespondierende Winkel und die entgegengesetzten Winkel konjugierte Winkel oder Ergänzungswinkel genannt.

§ 16. Hauptsatz von den Parallelen.

Lehrsatz: Werden zwei Parallelen von einer Geraden geschnitten, so sind 1. je zwei Gegenwinkel, 2. je zwei Wechselwinkel einander gleich und 3. ist die Summe je zweier entgegengesetzter Winkel gleich $2 R$.

Vor. $AB \parallel CD$.

Beh. I. 1. $\sphericalangle a = e$; 2. $\sphericalangle b = f$; 3. $\sphericalangle c = g$;
4. $\sphericalangle d = h$.

II. 5. $\sphericalangle c = e$; 6. $\sphericalangle d = f$; 7. $\sphericalangle a = g$;
8. $\sphericalangle b = h$.

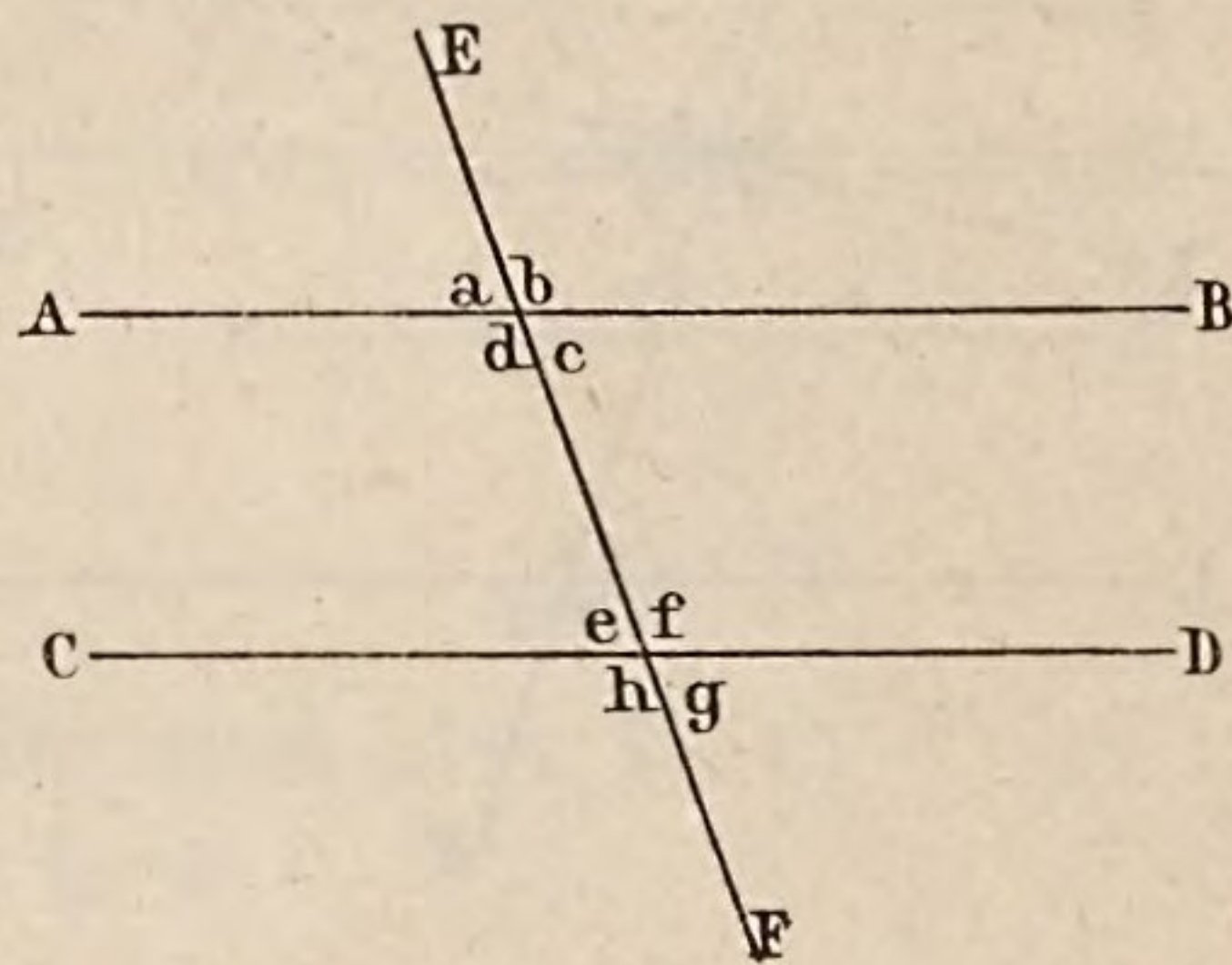
III. 9. $\sphericalangle c + f = 2 R$; 10. $\sphericalangle d + e = 2 R$;
11. $\sphericalangle a + h = 2 R$; 12. $\sphericalangle b + g = 2 R$.

Bew. I. $AB \parallel CD$ (V.).

Folglich haben AB und CD dieselbe Richtung und müssen demnach gegen eine dritte sie schneidende Linie, z. B. die Transversale EF , denselben Richtungsunterschied haben.

Die Winkel, welche den Richtungsunterschied zwischen AB u. EF angeben, sind der Reihe nach a , b , c und d .

Die Winkel, welche den Richtungsunterschied zwischen CD u. EF angeben, sind der Reihe nach e , f , g und h .



1. $\sphericalangle a = e$; 2. $\sphericalangle b = f$; 3. $\sphericalangle c = g$ und 4. $\sphericalangle d = h$.

W. z. b. w.

Anmerkung. Man kann diesen Satz auch als eine direkte Folgerung aus der Erklärung der parallelen Linien (§ 10) auffassen und sagen: „Eine Richtung (zwei Parallelen) kann mit einer andern Richtung (Transversale) nur einen Richtungsunterschied bilden.“

$$\begin{array}{rcl}
 \text{II. } \sphericalangle c = g \text{ (G. } \sphericalangle \text{ an } \parallel) & & \\
 \sphericalangle g = e \text{ (Sch. } \sphericalangle) & & \\
 \hline
 5. \sphericalangle c = e \text{ (Gr. III).} & \text{W. z. b. w.} &
 \end{array}$$

Ebenso sind 6., 7. und 8. zu beweisen.

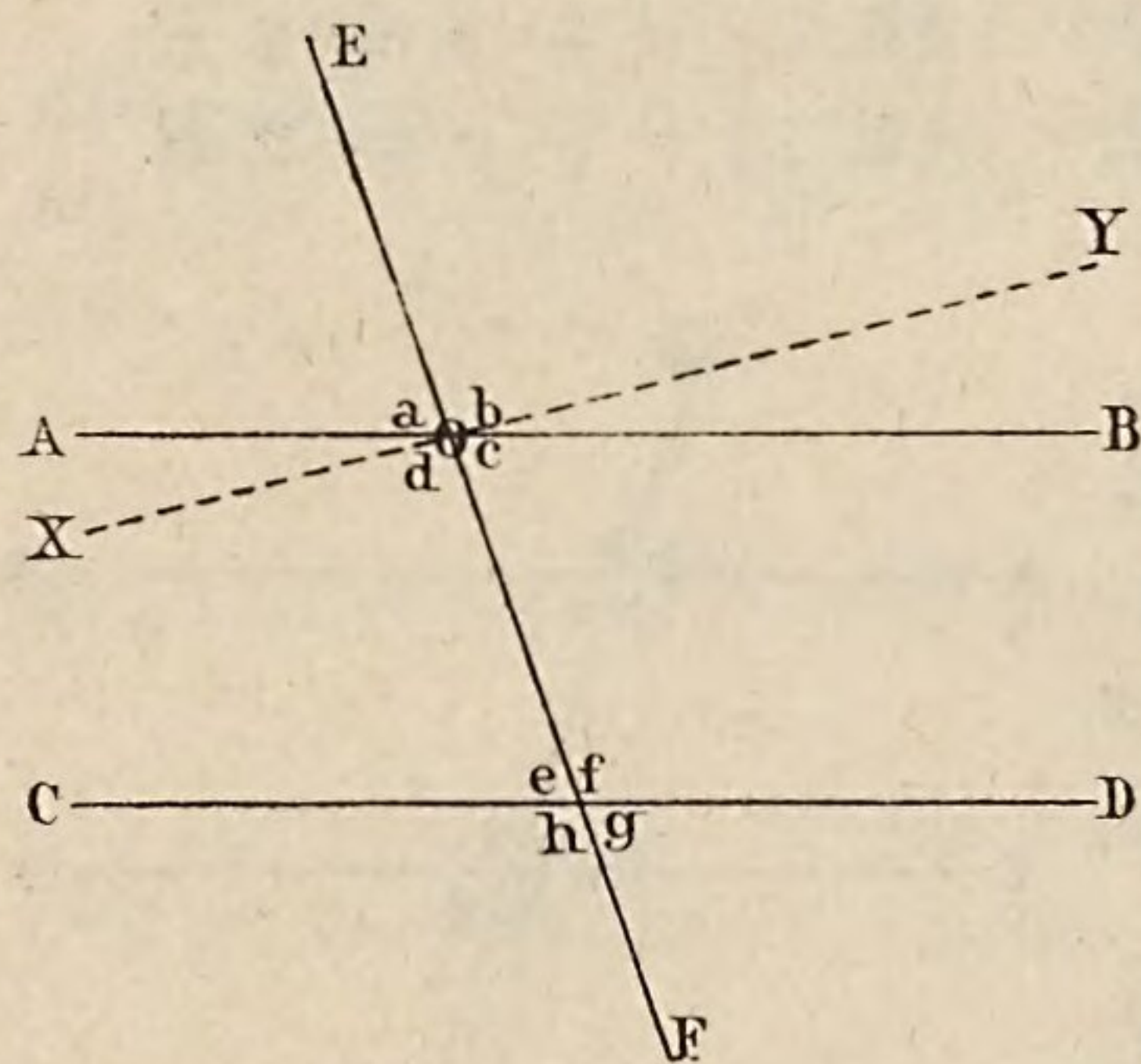
$$\begin{array}{rcl}
 \text{III. } \sphericalangle c + d = 2 R \text{ (N. } \sphericalangle) & & \\
 \sphericalangle d = f \text{ (W. } \sphericalangle \text{ an } \parallel) & & \\
 \hline
 \sphericalangle c + f = 2 R \text{ (Gr. II).} & \text{W. z. b. w.} &
 \end{array}$$

Ebenso sind 10., 11. und 12. zu beweisen.

§ 17.

Umkehrung: Werden zwei gerade Linien von einer dritten so geschnitten, dass 1. zwei Gegenwinkel oder 2. zwei Wechselwinkel einander gleich sind oder 3. die Summe zweier entgegengesetzter Winkel gleich $2 R$ ist, so sind die Linien parallel.

Vor.	I.	1. $\sphericalangle a = e$	oder	II.	5. $\sphericalangle c = e$
		2. $\sphericalangle b = f$	oder		6. $\sphericalangle d = f$
		3. $\sphericalangle c = g$	oder		7. $\sphericalangle a = g$
		4. $\sphericalangle d = h$	oder		8. $\sphericalangle b = h$



oder	III.	9. $\sphericalangle c + f = 2 R$
oder		10. $\sphericalangle d + e = 2 R$
oder		11. $\sphericalangle a + h = 2 R$
oder		12. $\sphericalangle b + g = 2 R$

Beh. $AB \parallel CD$.

Bew. I. 1. (indirekt). Angenommen AB wäre nicht $\parallel CD$, so müsste ich durch O eine andere Gerade $\parallel CD$ ziehen können, z. B. $XY \parallel CD$. Dann wäre:

$$\sphericalangle XOE = e \text{ (G. } \sphericalangle \text{ an } \parallel).$$

Es ist aber

$$\begin{array}{rcl}
 \sphericalangle a = e \text{ (V.)} & & \\
 \hline
 \text{wäre } \sphericalangle XOE = a \text{ (Gr. III).} & &
 \end{array}$$

Dies widerspricht aber dem Gr. IV. Folglich kann XY nicht $\parallel CD$ sein. Ebenso würde es mit allen andern durch O gezogenen Geraden gehen mit Ausnahme von AB . Folglich ist $AB \parallel CD$. W. z. b. w.

Ebenso sind 2., 3. u. 4. zu beweisen.

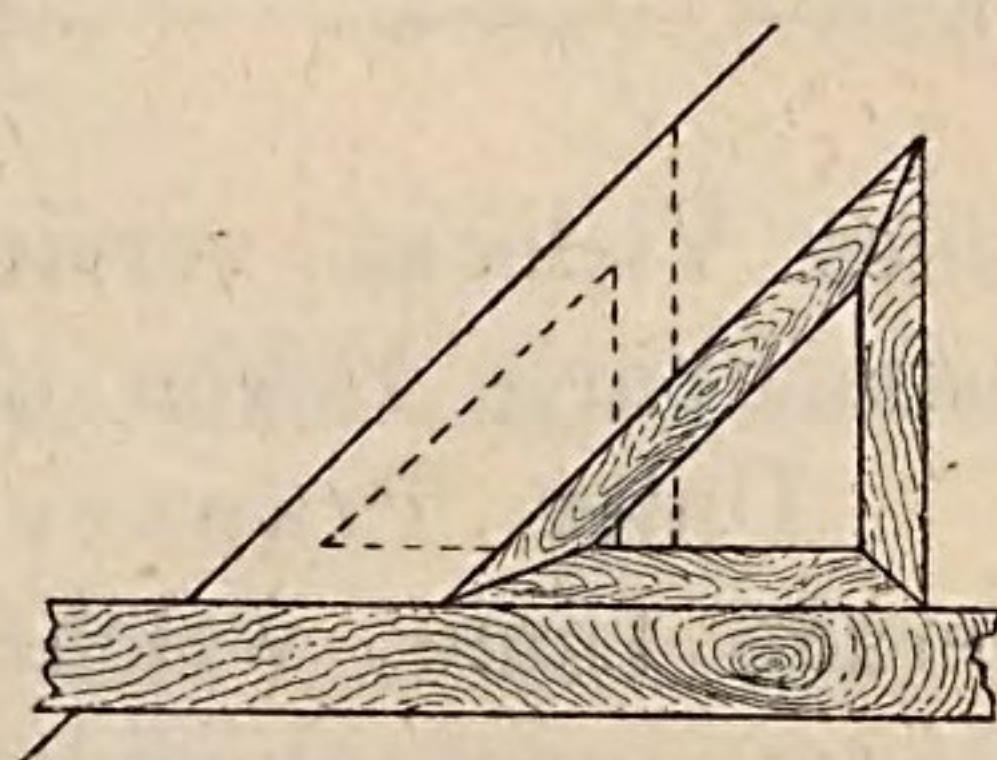
II. 5. $\sphericalangle c = e$ (V.) $\sphericalangle c = a$ (Sch. $\sphericalangle$) $\sphericalangle a = e$ (Gr. III). Dies sind aber G. $\sphericalangle$. $AB \parallel CD$ (Teil I). W. z. b. w.

Ebenso sind 6., 7. u. 8. zu beweisen.

III. 9. $\sphericalangle c + f = 2 R$ (V.). $\sphericalangle c + d = 2 R$ (N. $\sphericalangle$) $\sphericalangle c + f = c + d$ (Gr. III) $\sphericalangle f = d$ (Gr. V₂). Dies sind aber W. $\sphericalangle$. $AB \parallel CD$ (Teil II). W. z. b. w.

Ebenso sind 10., 11. u. 12. zu beweisen.

Anmerkung: An der nebenstehenden Figur mache man sich klar, dass, wenn man einen Winkel längs einer Geraden verschiebt, parallele Linien entstehen und dass, wenn man eine Gerade parallel zu sich selbst verschiebt, sich die Winkel der Grösse nach nicht ändern, welche sie mit einer andern Geraden bildet.



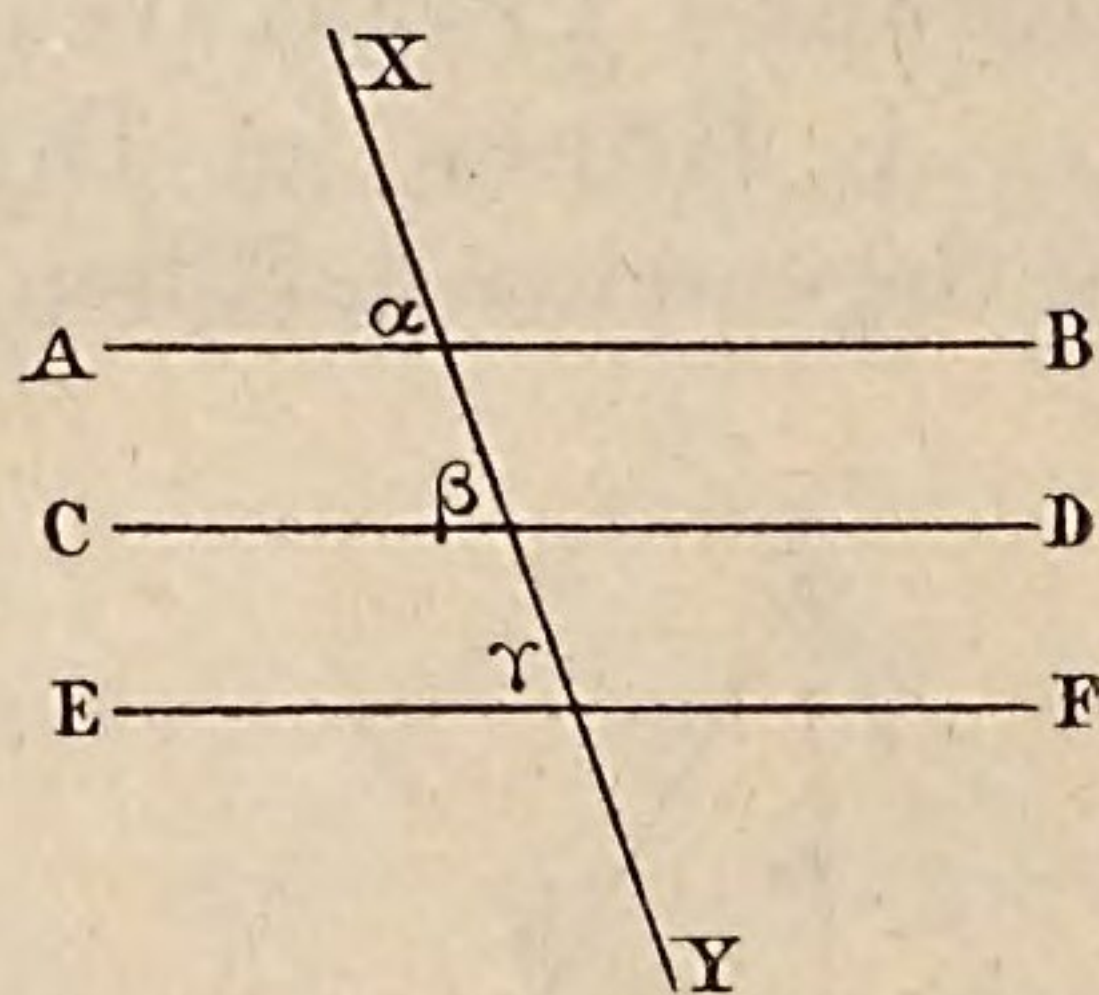
§ 18.

Lehrsatz. Sind zwei Gerade einer dritten parallel, so sind sie auch unter sich parallel.

Vor. $AB \parallel CD$ $EF \parallel CD$.Beh. $AB \parallel EF$.

H. K. Ich ziehe die Transversale XY .

Bew. $\sphericalangle \alpha = \beta$ } (G. $\sphericalangle$ an $\parallel$)
 $\sphericalangle \gamma = \beta$ }

 $\sphericalangle \alpha = \gamma$ (Gr. III). Dies sind aber G. $\sphericalangle$. $AB \parallel EF$ (§ 17₁). W. z. b. w.

§ 19.

Lehrsätze. 1. Alle Lote auf einer Geraden sind parallel.

2. Das Lot auf einer von mehreren Parallelen ist auch zu allen andern senkrecht.

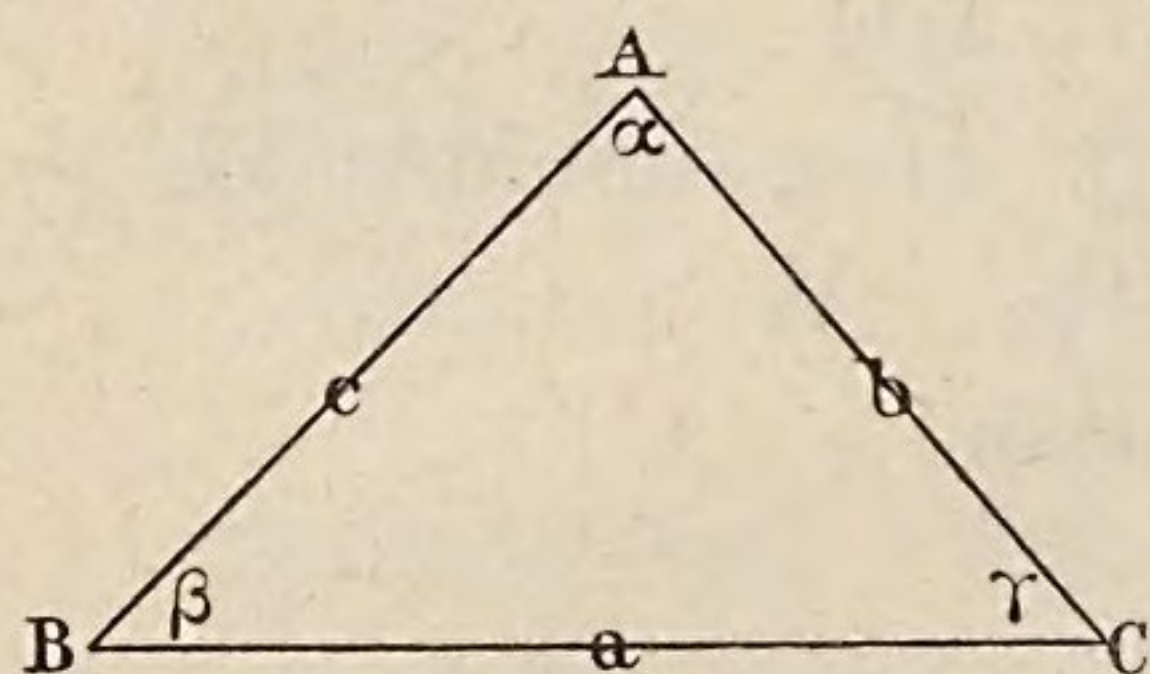
3. Winkel mit parallelen Schenkeln sind entweder einander gleich oder Supplementwinkel.

Beweise folgen aus §§ 16 und 17.

III. Von den Dreiecken.

§ 20.

Erklärung: Unter Figur*) versteht man in der Geometrie die Zeichnung für jedes räumliche Gebilde. Eine ebene Figur, oder in der Planimetrie schlechtweg Figur, ist ein begrenzter Teil der Ebene. Nach Art ihrer Begrenzung unterscheidet man geradlinige, krummlinige und gemischtlinige Figuren. Die

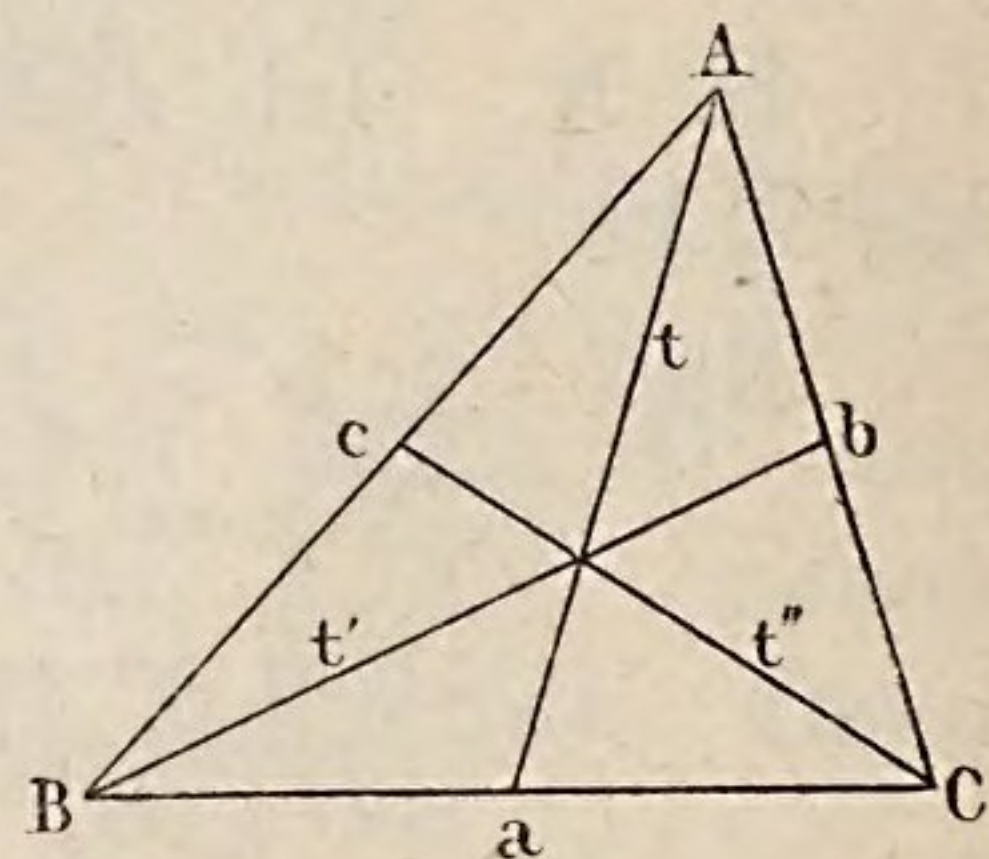
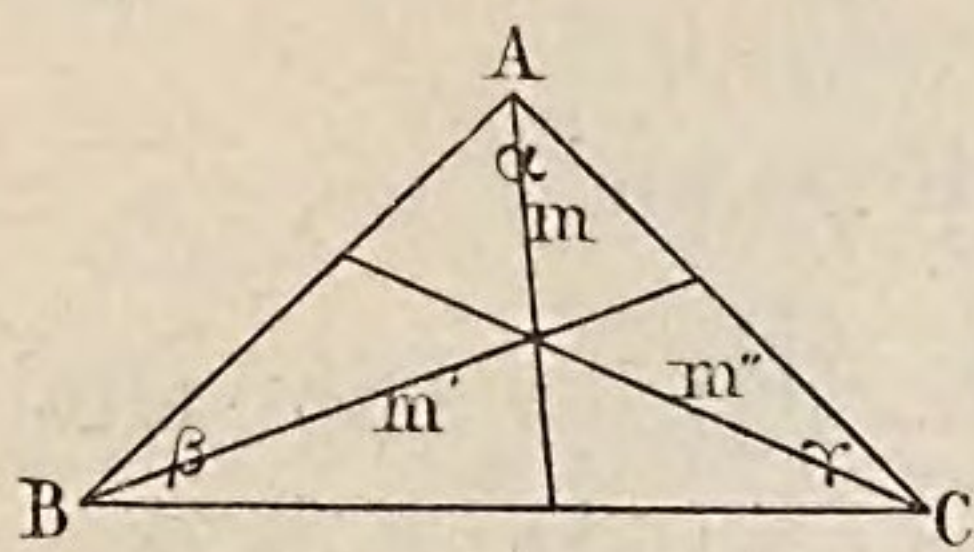
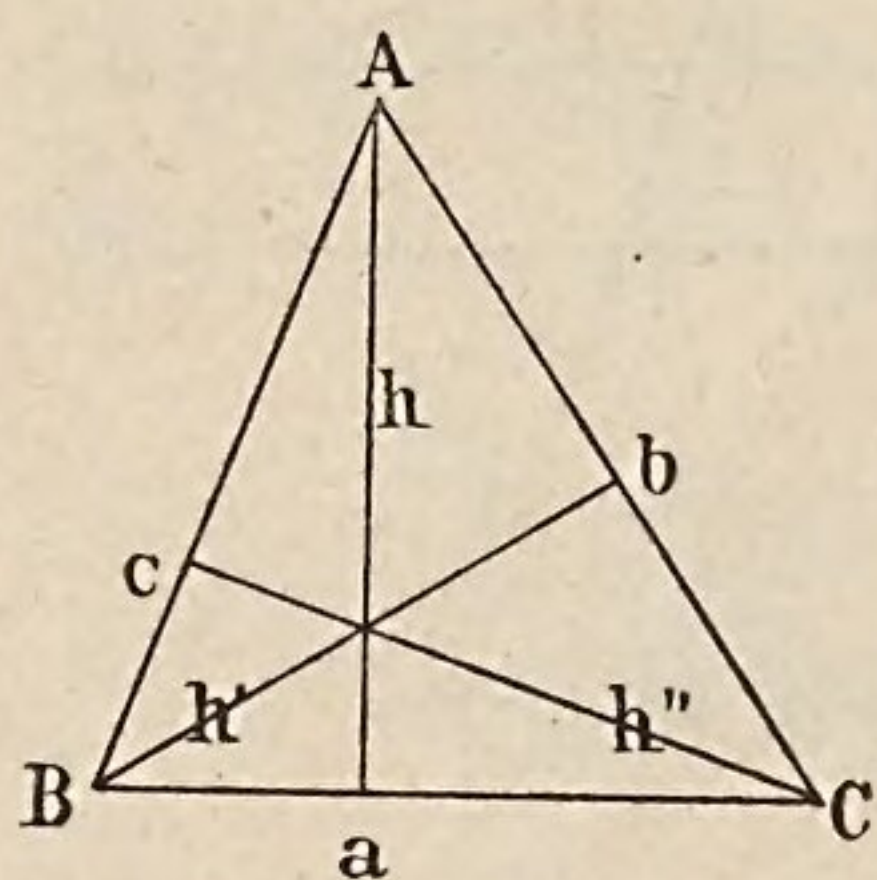


Grenzklinien der geradlinigen Figuren nennt man Seiten. Ein Dreieck ($\triangle$) ist eine dreiseitige Figur. Ein Dreieck hat drei Seiten, drei Winkel und drei Ecken, ein beliebiges Vieleck, auch wohl n Eck genannt, n Seiten, n Winkel und n Ecken. Unter Diagonale**)

eines Vielecks versteht man eine Strecke, welche zwei nicht benachbarte Ecken miteinander verbindet.

Unter Transversale eines Dreiecks versteht man eine gerade Linie, welche die Seiten des Dreiecks oder deren Verlängerungen schneidet. Geht die Transversale durch einen Eckpunkt, so heisst sie Eckpunktstransversale. Besonders wichtig sind drei Arten von Eckpunktstransversalen: 1. Höhen, 2. Winkel halbierende Transversalen, 3. Seiten halbierende Transversalen.

1. Höhen im Dreieck sind die drei von den Ecken auf die Gegenseiten gefällten (s. Anhang A) Lote. ($h \perp a, h' \perp b, h'' \perp c$.)



2. Winkel halbierende Transversalen im Dreieck sind die Halbierungslinien der drei Winkel vom Eckpunkt bis zur Gegenseite. (m halbiert $\sphericalangle \alpha$, m' halbiert $\sphericalangle \beta$, m'' halbiert $\sphericalangle \gamma$.)

3. Seiten halbierende Transversalen (Mitteltransversalen) im Dreieck sind die drei von den Ecken nach den

*) Aus dem Lateinischen; bedeutet „Gestalt“.

**) Aus dem Griechischen; bedeutet „Schräge“.

Mitten der Gegenseiten gezogenen Strecken. (t, t', t'' halbieren entsprechend a, b, c .)

Anmerkung. Wie später bewiesen wird, schneiden sich die drei Höhen, die drei Winkel halbierenden und die drei Seiten halbierenden Transversalen in je einem Punkte.

Man merke sich die aus obenstehenden Figuren ersichtliche Bezeichnung des Dreiecks, welche für dieses Lehrbuch gewählt ist.

§ 21. Winkelsumme im Dreieck.

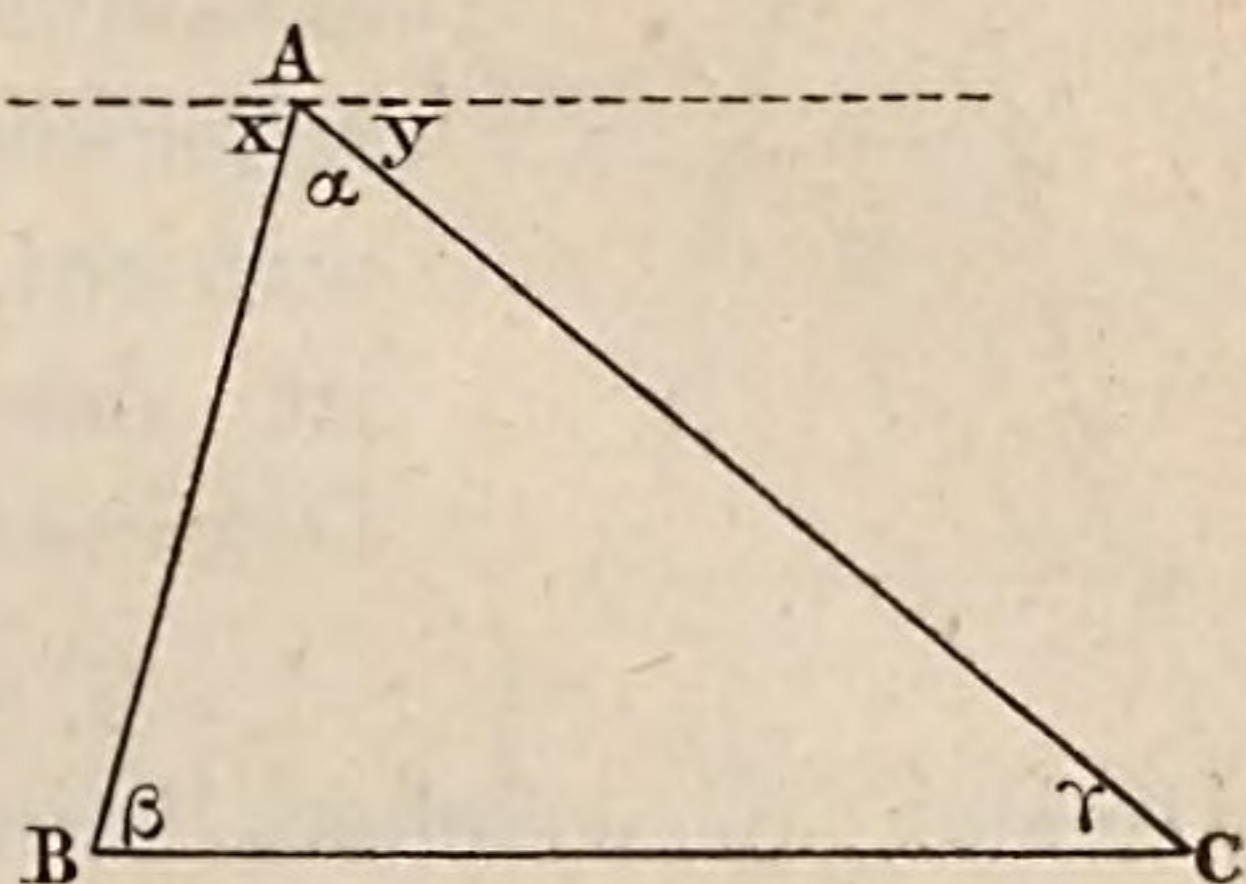
1. **Lehrsatz:** Die Winkelsumme eines Dreiecks ist $= 2 R$.

Vor. $\sphericalangle \alpha, \beta$ und γ sind $\sphericalangle$ des Dreiecks ABC .

Beh. $\sphericalangle \alpha + \beta + \gamma = 2 R$.

H. K. Durch A ziehe ich zu BC die Parallele.

Bew. $\sphericalangle x + \alpha + y = 2 R (\sphericalangle)$.



$$\sphericalangle x = \beta; \sphericalangle y = \gamma \text{ (W. } \sphericalangle \text{ an } \parallel)$$

$$\sphericalangle \beta + \alpha + \gamma = 2 R \text{ (Gr. II). W. z. b. w.}$$

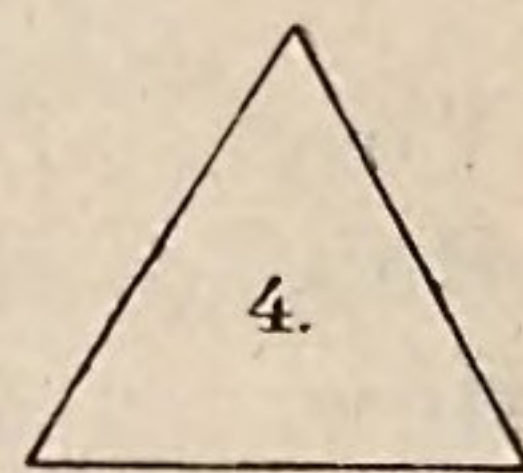
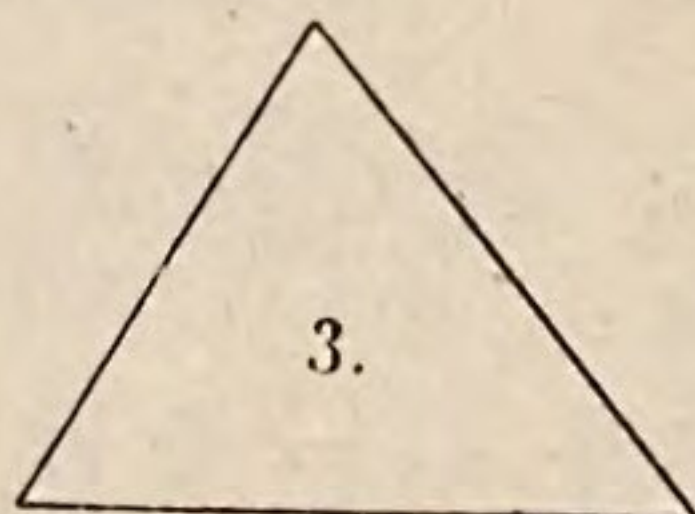
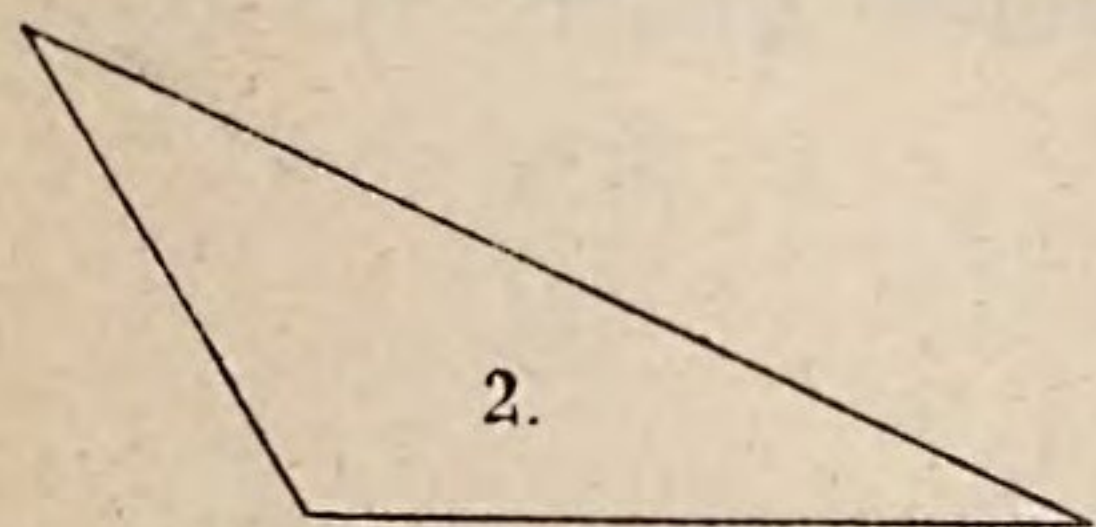
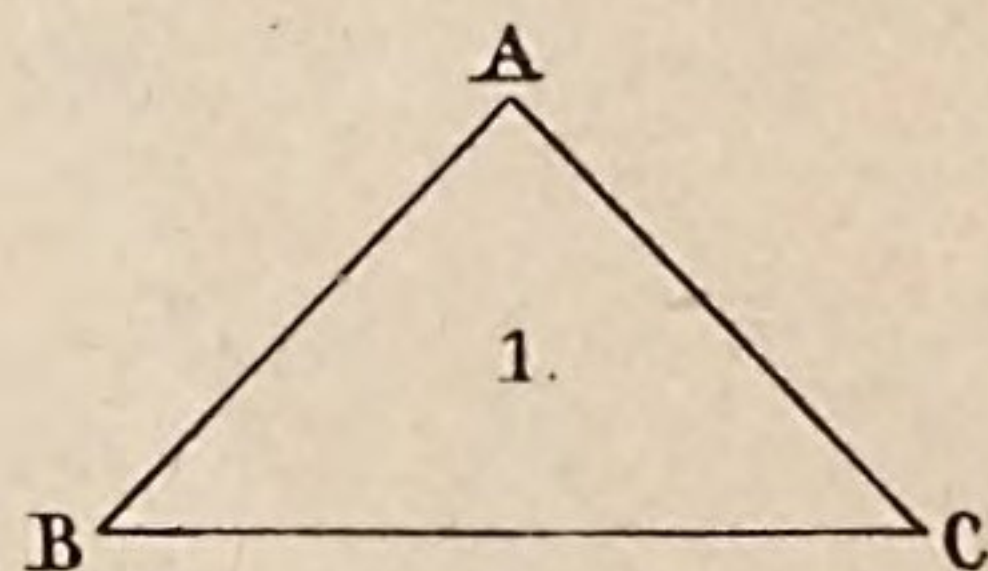
Folgerungen: Zwei Winkel eines Dreiecks betragen zusammen weniger als $2 R$; z. B. $\sphericalangle \alpha + \beta < 2 R$. Im Dreieck kann nur ein Winkel ein R oder ein stumpfer sein.

Erklärung: Wir unterscheiden sechs Arten von Dreiecken:

1. rechtwinklige, 2. stumpfwinklige, 3. spitzwinklige, 4. gleichseitige, 5. gleichschenklige, 6. ungleichseitige.

1. Ein rechtwinkliges Dreieck ($\triangle$) ist ein Dreieck, in welchem ein Winkel $1 R$ ist. Die dem R gegenüberliegende Seite heisst die Hypotenuse*)

(BC), die den R einschliessenden Seiten heissen die Katheten*) (AB und AC).



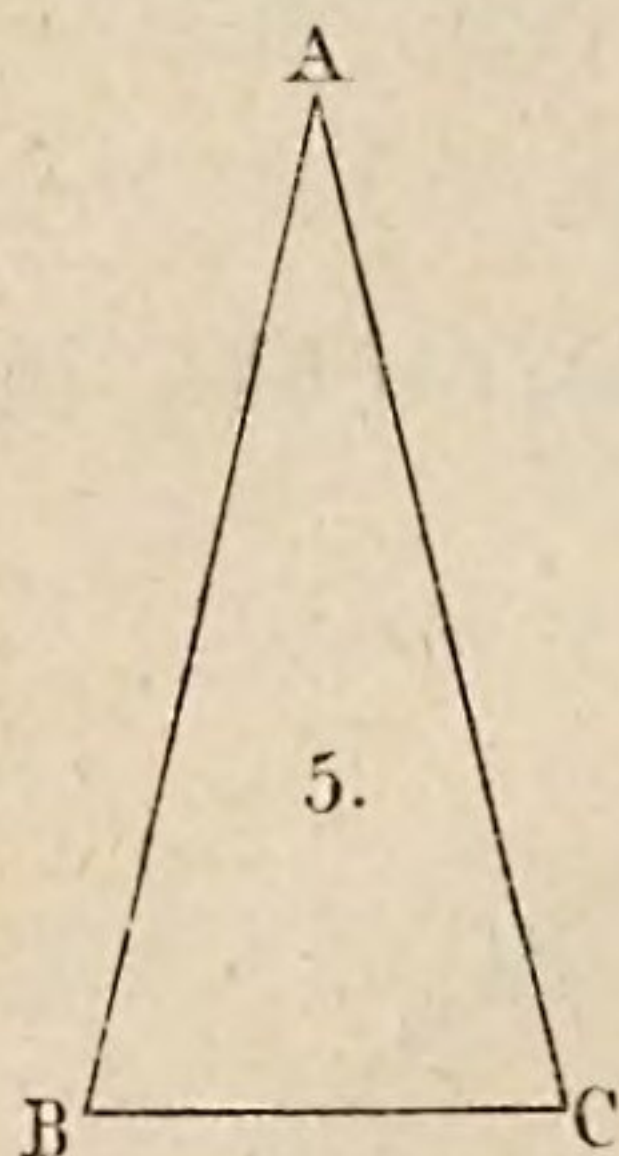
2. Ein stumpfwinkliges Dreieck ist ein Dreieck, in welchem ein Winkel ein stumpfer ist.

*) Aus dem Griechischen: bedeutet „darunter gespannte“, bez. „hinabgesenkte“.

3. Ein spitzwinkliges Dreieck ist ein Dreieck, in welchem alle drei Winkel spitze sind.

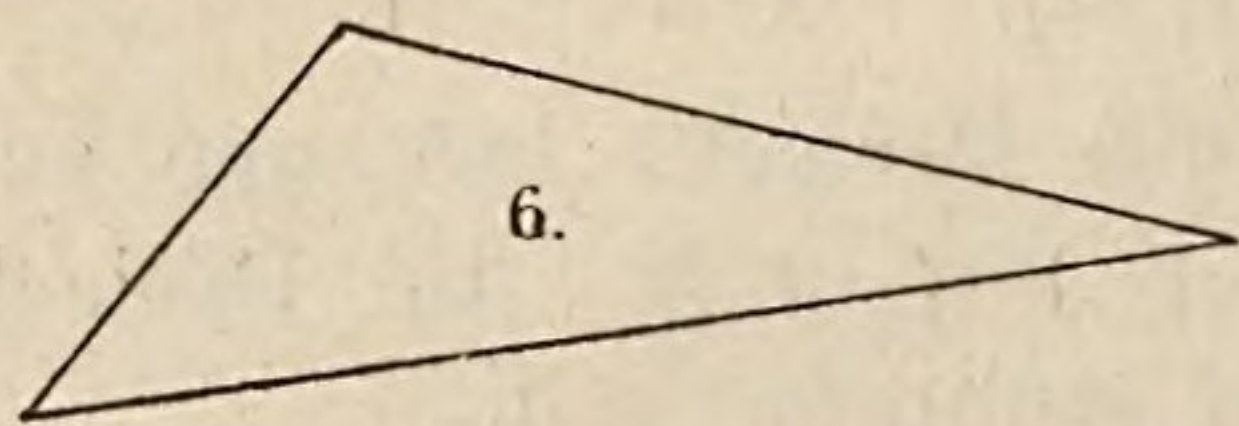
4. Ein gleichseitiges Dreieck ($\triangle$) ist ein Dreieck, in welchem die drei Seiten einander gleich sind.

5. Ein gleichschenkliges Dreieck ($\triangle$) ist ein Dreieck, in welchem zwei Seiten einander gleich sind. Die beiden gleichen Seiten heissen die Schenkel (AB u. AC), die dritte Seite heisst die Basis oder Grundlinie (BC), die Ecke, in welcher die Schenkel zusammenstossen, die Spitze des gleichschenkligen Dreiecks (A). $\sphericalangle B$ u. $\sphericalangle C$ heissen Basiswinkel (B . $\sphericalangle$). Eine wichtige Unterart ist das rechtwinklig - gleichschenklige Dreieck ($\triangle$).



6. Ein ungleichseitiges Dreieck ist ein Dreieck, in welchem keine Seite einer andern gleich ist.

Folgerungen: 1. In jedem Dreieck ist ein Winkel das Supplement der Summe der beiden andern:



$$\sphericalangle \alpha = 2 R - (\beta + \gamma)$$

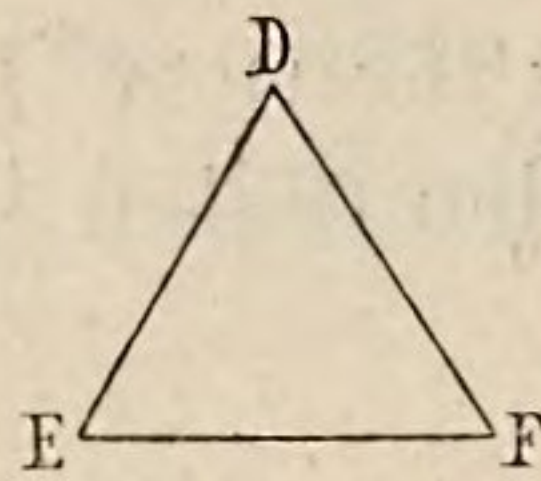
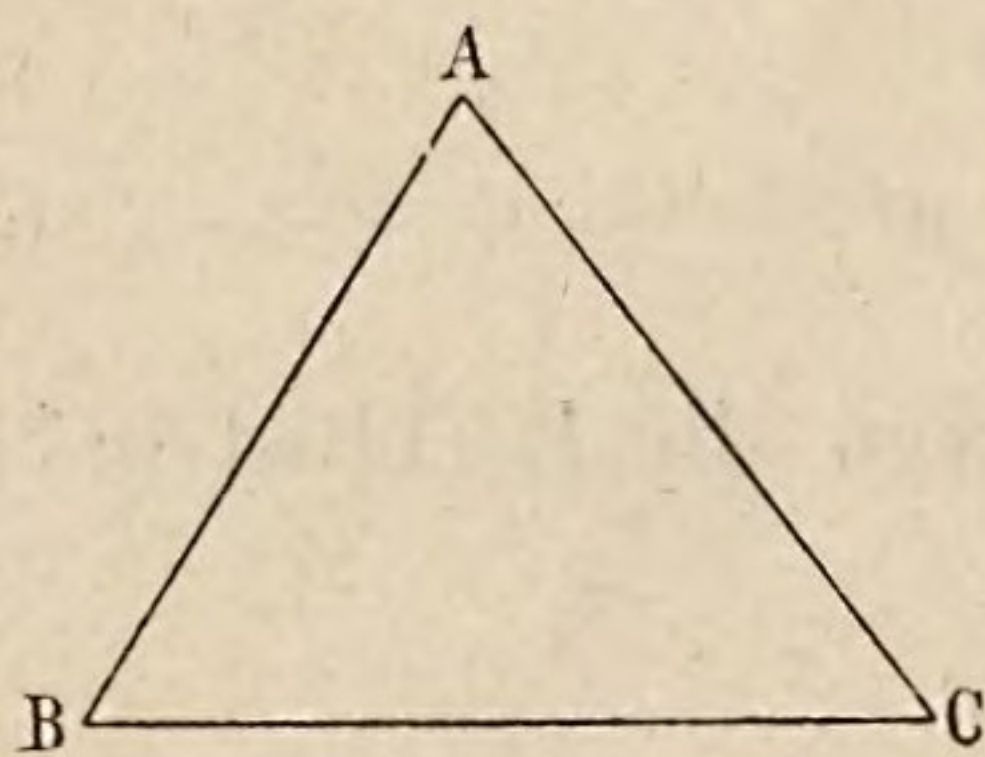
$$\sphericalangle \beta = 2 R - (\alpha + \gamma)$$

$$\sphericalangle \gamma = 2 R - (\alpha + \beta)$$

2. Im rechtwinkligen Dreieck ist der eine spitze Winkel das Komplement des andern:

$$\sphericalangle \beta = R - \gamma$$

$$\sphericalangle \gamma = R - \beta$$



2. Lehrsatz. Sind in zwei Dreiecken zwei Winkel des einen zwei Winkeln des andern gleich, so sind auch die dritten Dreieckswinkel einander gleich.

Vor. $\sphericalangle B = E$; $\sphericalangle C = F$.

Beh. $\sphericalangle A = D$.

Bew. $\sphericalangle A + B + C = 2 R$ (Winkelsumme i. $\triangle$)

$$\sphericalangle D + E + F = 2 R$$

$$\sphericalangle A + B + C = D + E + F \text{ (Gr. III)}$$

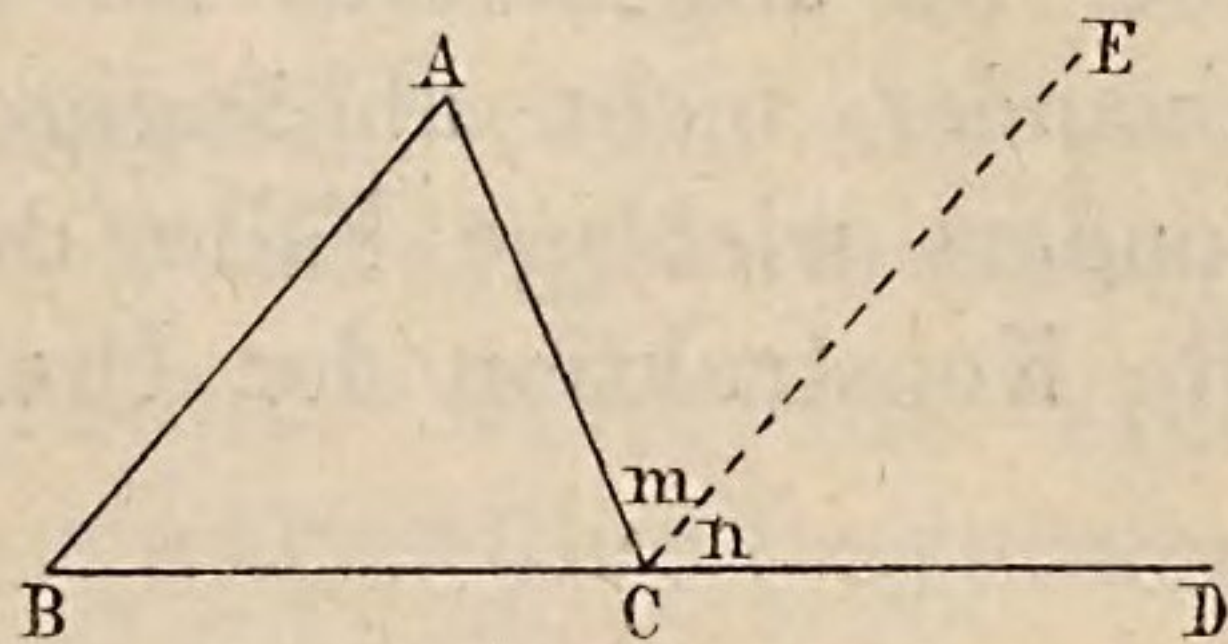
$$\left. \begin{array}{l} \sphericalangle B = E \\ \sphericalangle C = F \end{array} \right\} \text{ (V.)}$$

$$\sphericalangle A = D \text{ (Gr. V}_2\text{). W. z. b. w.}$$

§ 22. Der Aussenwinkel am Dreieck.

Erklärung. Der Aussenwinkel ($\sphericalangle$) einer Figur entsteht durch Verlängerung einer ihrer Seiten. Ein $\sphericalangle$ ist also ein Winkel, der eine Seite und die Verlängerung einer andern Seite der Figur zu Schenkeln hat.

Lehrsatz. Der Aussenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden ihm nicht anliegenden Dreieckswinkel.



Vor. $\sphericalangle ACD$ ist $\sphericalangle$ am $\triangle ABC$.

Beh. $\sphericalangle ACD = \sphericalangle A + \sphericalangle B$.

H. K. $CE \parallel AB$.

Bew. $\sphericalangle m = \sphericalangle A$ (W. $\sphericalangle$ a. $\parallel$)

$\sphericalangle n = \sphericalangle B$ (G. $\sphericalangle$ a. $\parallel$)

$\sphericalangle ACD = \sphericalangle A + \sphericalangle B$ (G. V₁). W. z. b. w.

(Der Beweis kann auch ohne Hilfskonstruktion unter Zuziehung von § 21 geführt werden.)

Folgerung: Der Aussenwinkel eines Dreiecks ist grösser als jeder der beiden ihm nicht anliegenden Dreieckswinkel.

§ 23. Von den Seiten im Dreieck.

Lehrsatz. In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten grösser und die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte.

Vor. $ABC \triangle$.

Beh. I. $AC + AB > BC$

$BC + AB > AC$

$BC + AC > AB$.

II. $AC - AB < BC$

$BC - AB < AC$

$BC - AC < AB$.

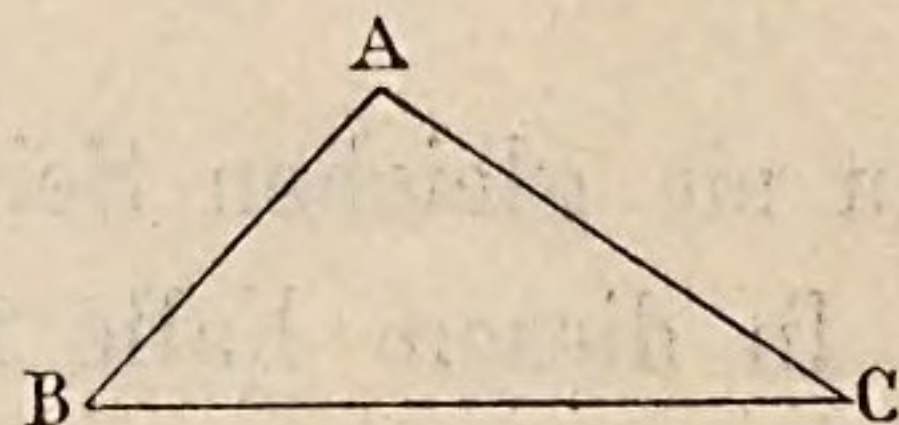
Bew. I folgt unmittelbar aus Gr. X.

„ II. $AC < BC + AB$ (Teil I).

$AB = AB$ (Gr. I)

$AC - AB < BC$ (Gr. VI₂).

W. z. b. w.



Ebenso werden die beiden andern Teile bewiesen.

§ 24. Von der Kongruenz der Dreiecke.

Zwei geradlinige Figuren sind kongruent, wenn sämtliche Seiten und Winkel in derselben Reihenfolge gleich sind; denn

dann können die Figuren immer so aufeinander gelegt werden, dass sie ganz zusammenfallen (s. § 4).

Man müsste hiernach bei Dreiecken sechs Stücke, die drei Seiten und die drei Winkel, als gleich beweisen. Es genügen aber im allgemeinen für die Kongruenz der Dreiecke drei von einander nicht abhängige Stücke. Hierbei giebt es vier besonders wichtige Fälle, die vier Kongruenzsätze (K.). Über die Konstruktion der Dreiecke s. Anhang A.

Erster Kongruenzsatz. (K. I)

Dreiecke sind kongruent, wenn sie zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich haben.

$$\text{Vor. } AB = DE$$

$$BC = EF$$

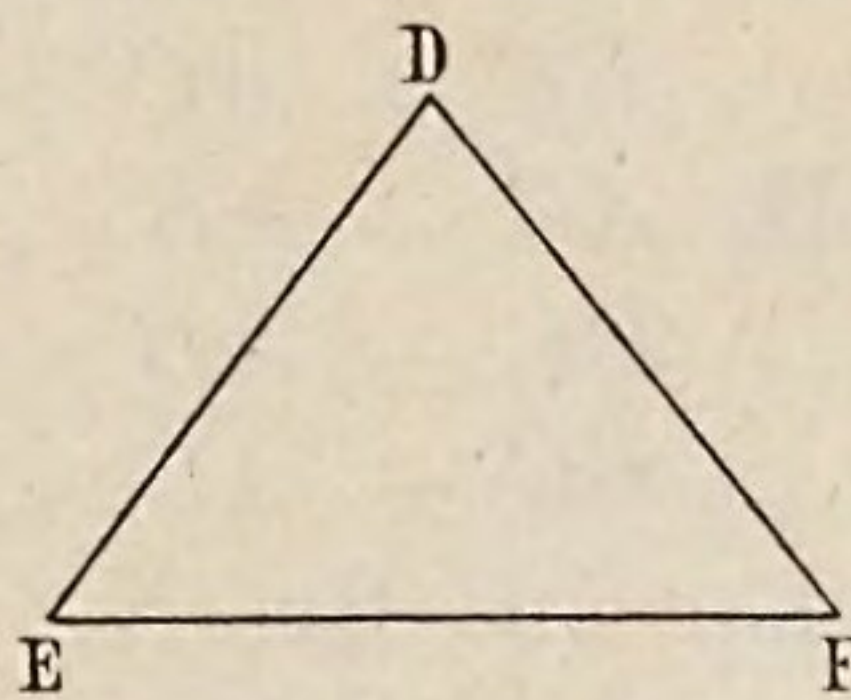
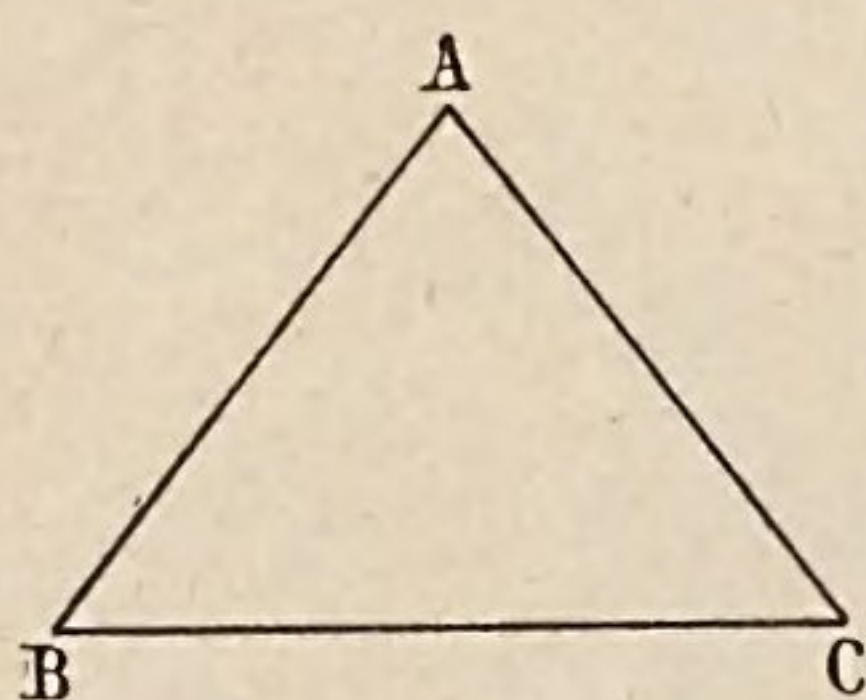
$$\sphericalangle B = E.$$

$$\text{Beh. } \triangle ABC \cong DEF.$$

Bew. Ich denke mir das $\triangle DEF$ so auf das $\triangle ABC$ gelegt, dass EF auf BC fällt (V.). Dann fällt ED in die Richtung von BA , weil $\sphericalangle E = B$ ist (V.). Es fällt dann auch Ecke D auf Ecke A , weil $ED = BA$ ist (V.). Dann muss auch DF mit AC zusammenfallen, weil nach Gr. X zwischen zwei Punkten nur eine Gerade möglich ist. Also decken sich die Dreiecke, oder

$$\triangle ABC \cong DEF. \quad \text{W. z. b. w.}$$

Folgerung: In kongruenten Dreiecken sind die homo-



logen*) (gleichliegenden) Stücke (h. St.) gleich. Zwei Seiten sind homolog, wenn sie gleichen Winkeln, und zwei Winkel sind homolog,

wenn sie gleichen Seiten gegenüberliegen.

In diesem Falle folgt:

$$\left. \begin{array}{l} \sphericalangle C = F \\ \sphericalangle A = D \\ AC = DF \end{array} \right\} \text{ (h. St.).}$$

*) Aus dem Griechischen; bedeutet „übereinstimmend“ oder „entsprechend“.

§ 25. Zweiter Kongruenzsatz. (K. II)

Dreiecke sind kongruent, wenn sie zwei Winkel und eine Seite gleich haben.

Für den Beweis unterscheiden wir zwei Fälle.

K. II₁. Dreiecke sind kongruent, wenn sie eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gleich haben.

K. II₂. Dreiecke sind kongruent, wenn sie eine Seite, einen anliegenden und den gegenüberliegenden Winkel gleich haben.

K. II₁. Vor. $BC = EF$

$$\sphericalangle B = E$$

$$\sphericalangle C = F.$$

Beh. $\triangle ABC \cong DEF.$

Bew. Ich denke mir das $\triangle DEF$ so auf das $\triangle ABC$ gelegt, dass EF auf BC fällt (V.). Dann fallen ED und FD in die Richtung von BA

und CA , weil $\sphericalangle E = B$

und $\sphericalangle F = C$ ist (V.).

Dann müssen auch die

Ecken D und A zusammenfallen, weil zwei Gerade sich nur in einem Punkte schneiden können (Gr. X).

Also decken sich die Dreiecke, oder

$\triangle ABC \cong DEF.$ W. z. b. w.

Folgerung. $\left. \begin{array}{l} \sphericalangle A = D \\ AC = DF \\ AB = DE \end{array} \right\} \text{ (h. St.).}$

K. II₂. Vor. $BC = EF$

$$\sphericalangle B = E$$

$$\sphericalangle A = D.$$

Beh. $\triangle ABC \cong DEF.$

Bew. $\left. \begin{array}{l} \sphericalangle B = E \\ \sphericalangle A = D \end{array} \right\} \text{ (V.)}$

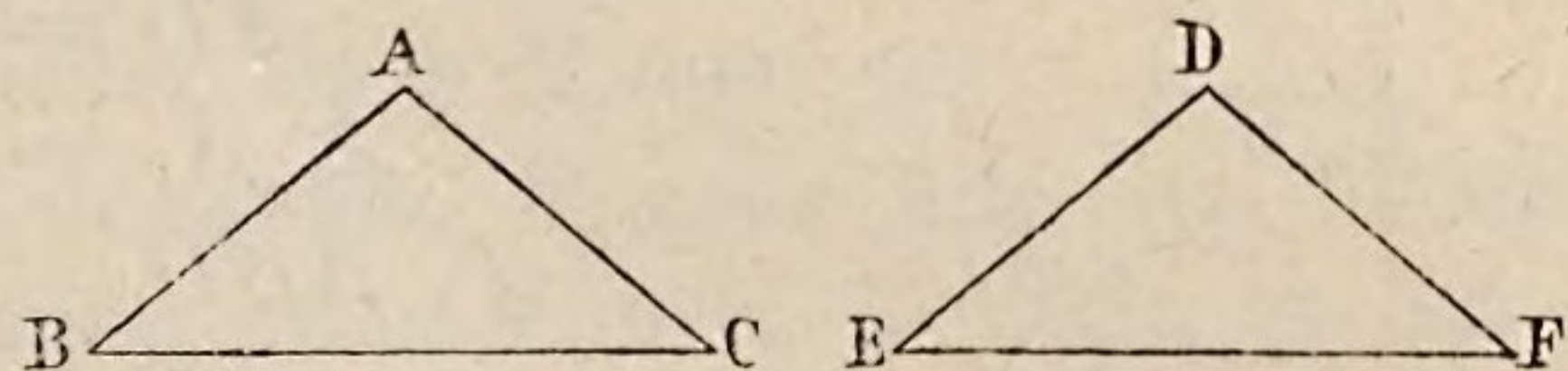
$$\sphericalangle C = F \text{ (§ 21}_2\text{)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sphericalangle B = E \\ BC = EF \end{array} \right\} \text{ (V.)}$$

$$\triangle ABC \cong DEF \text{ (K. II}_1\text{).}$$

W. z. b. w.

Folgerung. $\left. \begin{array}{l} \sphericalangle C = F \\ AC = DF \\ AB = DE \end{array} \right\} \text{ (h. St.).}$



§ 26. Seiten und Winkel im Dreieck.

Lehrsatz: In demselben Dreieck liegen gleichen Seiten gleiche Winkel, gleichen Winkeln gleiche Seiten, der grösseren Seite der grössere Winkel (der kleineren Seite der kleinere Winkel) und dem grösseren Winkel die grössere Seite (dem kleineren Winkel die kleinere Seite) gegenüber.

Teil 1 und 2 kann man auch aussprechen:

Im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich. Sind in einem Dreieck zwei Winkel gleich, so ist es gleichschenkelig.



1. Vor. $AB = AC$.

Beh. $\sphericalangle B = \sphericalangle C$.

H. K. Ich ziehe die Winkel halbierende Transversale AD ($\sphericalangle A_1 = A_2$).

Bew. $AB = AC$ (V.)

$AD = AD$ (Gr. I)

$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$ (H. K.)

$\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (K. I)

$\sphericalangle B = \sphericalangle C$ (h. St.).

W. z. b. w.

2. Vor. $\sphericalangle B = \sphericalangle C$.

Beh. $AB = AC$.

H. K. S. Teil 1.

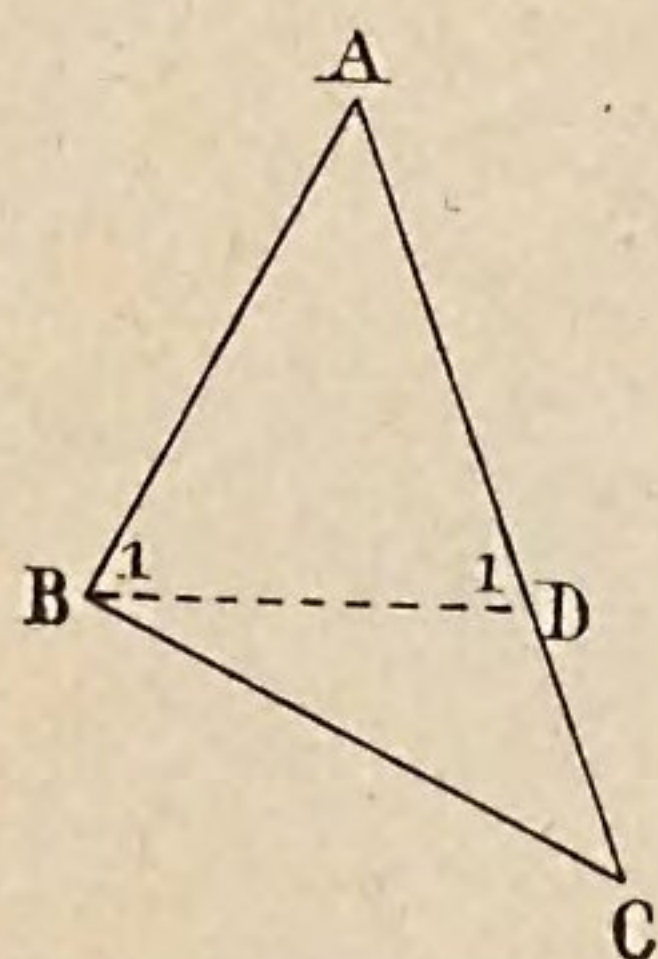
Bew. $AD = AD$ (Gr. I)

$\sphericalangle B = \sphericalangle C$ (V.)

$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$ (H. K.)

$\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (K. II)

$AB = AC$ (h. St.). W. z. b. w.



3. Vor. $AC > AB$.

Beh. $\sphericalangle B > \sphericalangle C$.

H. K. Ich schneide die kleinere Seite AB auf der grösseren AC von A aus $ab = AD$ und verbinde D mit B .

Bew. $\sphericalangle D_1 > \sphericalangle C$ (A. $\sphericalangle$)

$\sphericalangle D_1 = \sphericalangle B_1$ (Teil I)

$\sphericalangle B_1 > \sphericalangle C$ (Gr. II)

erst recht $\sphericalangle B > \sphericalangle C$ (Gr. IX). W. z. b. w.

4. Vor. $\sphericalangle B > \sphericalangle C$.

Beh. $AC > AB$.

Bew. (indirekt). Angenommen AC wäre nicht $> AB$, so könnte sein: 1. $AC = AB$ oder 2. $AC < AB$. Wäre 1. $AC = AB$, so müsste $\sphericalangle B = C$ sein (Teil 1); dies widerspricht aber der V.; folglich kann AC nicht $= AB$ sein. Wäre 2. $AC < AB$, so müsste $\sphericalangle B < C$ sein (Teil 3); dies widerspricht aber erst recht der V.; folglich kann AC ebenfalls nicht $< AB$ sein. Da nun nachgewiesenermassen AC weder $=$ noch $< AB$ sein kann, so muss $AC > AB$ sein.

W. z. b. w.

(Der Beweis kann auch direkt geführt werden, wenn man den kleineren Winkel auf dem grösseren abträgt.)

Anmerkung. Anfänger mögen besonders darauf achten, dass diese Sätze nur von Seiten und Winkeln in einem und demselben Dreiecke handeln.

Folgerungen: 1. Im gleichseitigen Dreieck sind alle drei Winkel einander gleich. Jeder ist $\frac{2}{3} R$ oder 60° .

2. Umkehrung. Sind in einem Dreieck alle drei Winkel einander gleich (oder betragen zwei Winkel je 60°), so ist es gleichseitig.

3. Die Winkel an der Basis eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks sind jeder $\frac{1}{2} R$ oder 45° .

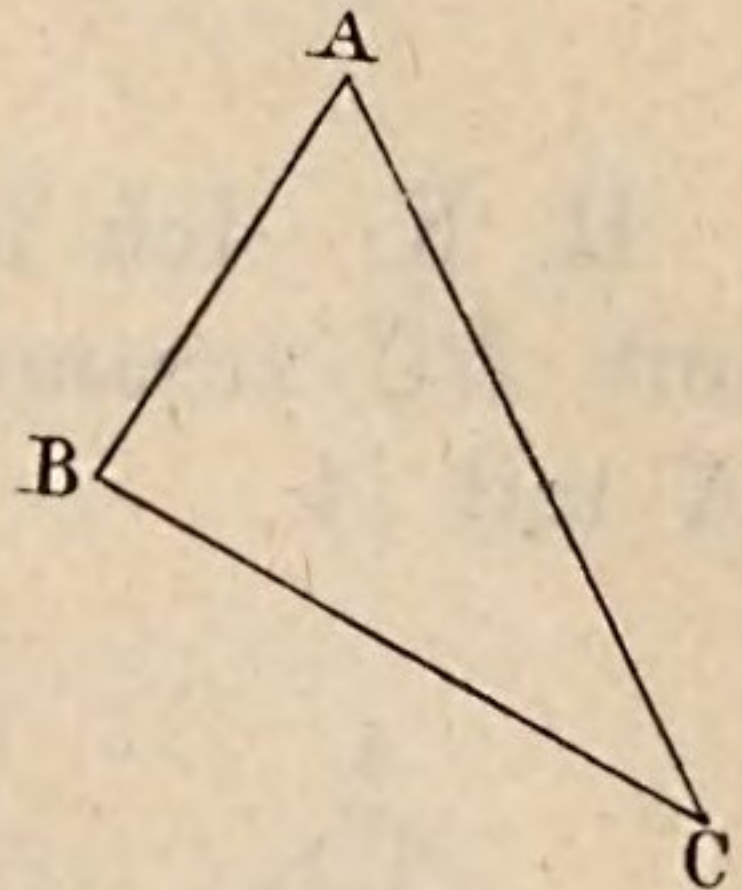
4. Umkehrung. Sind in einem Dreieck zwei Winkel je gleich 45° , so ist es rechtwinklig-gleichschenkelig.

5. Ist in einem gleichschenkligen Dreieck der Winkel an der Spitze $= \alpha$ bekannt, so ist der Basiswinkel $\beta = \frac{2 R - \alpha}{2}$.

Ist der Winkel an der Basis $= \beta$ bekannt, so ist der Winkel an der Spitze $\alpha = 2 R - 2 \beta$.

6. Der Aussenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist gleich dem doppelten Basiswinkel. Oder: der Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks ist gleich dem halben Aussenwinkel an der Spitze.

7. Im rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse die grösste Seite. Im stumpfwinkligen Dreieck ist die Seite die grösste, welche dem stumpfen Winkel gegenüber liegt.



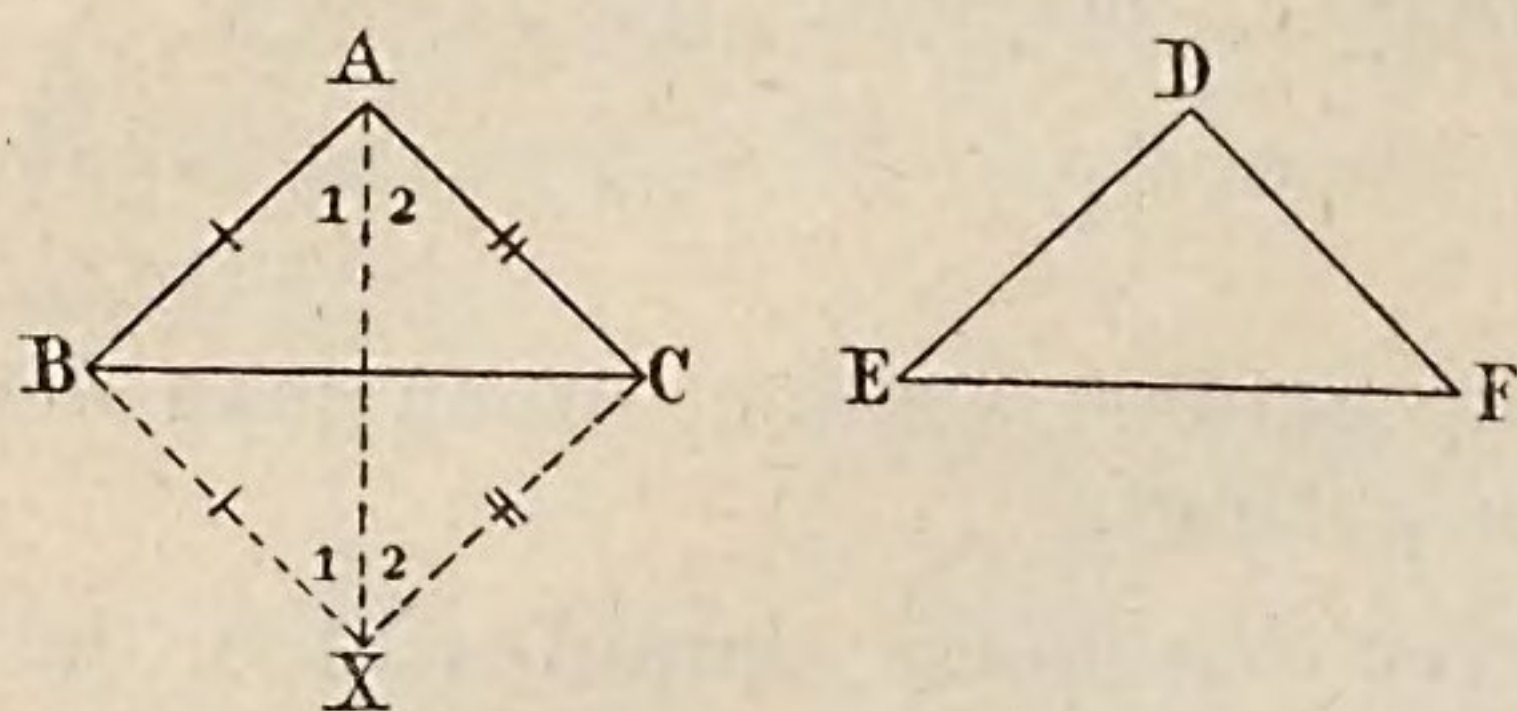
§ 27. Dritter Kongruenzsatz. (K. III)

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie die drei Seiten gleich haben.

$$\begin{aligned}\text{Vor. } AB &= DE \\ AC &= DF \\ BC &= EF.\end{aligned}$$

$$\text{Beh. } \triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

H. K. Ich lege das $\triangle DEF$ an das $\triangle ABC$, so dass EF mit BC zusammenfällt, also $\triangle XBC \cong \triangle DEF$, und verbinde X mit A .



$$\text{Bew. } AB = DE \text{ (V.)}$$

$$BX = DE \text{ (H. K.)}$$

$$1. \quad \underline{AB = BX \text{ (Gr. III)}}$$

$$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle X_1 \text{ (B. } \sphericalangle)$$

$$AC = DF \text{ (V.)}$$

$$CX = DF \text{ (H. K.)}$$

$$2. \quad \underline{AC = CX \text{ (Gr. III)}}$$

$$\sphericalangle A_2 = \sphericalangle X_2 \text{ (B. } \sphericalangle)$$

$$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle X_1 \text{ (b.)}$$

$$3. \quad \underline{\sphericalangle A = \sphericalangle X \text{ (Gr. V}_1\text{)}}.$$

Aus 1. bis 3. folgt:

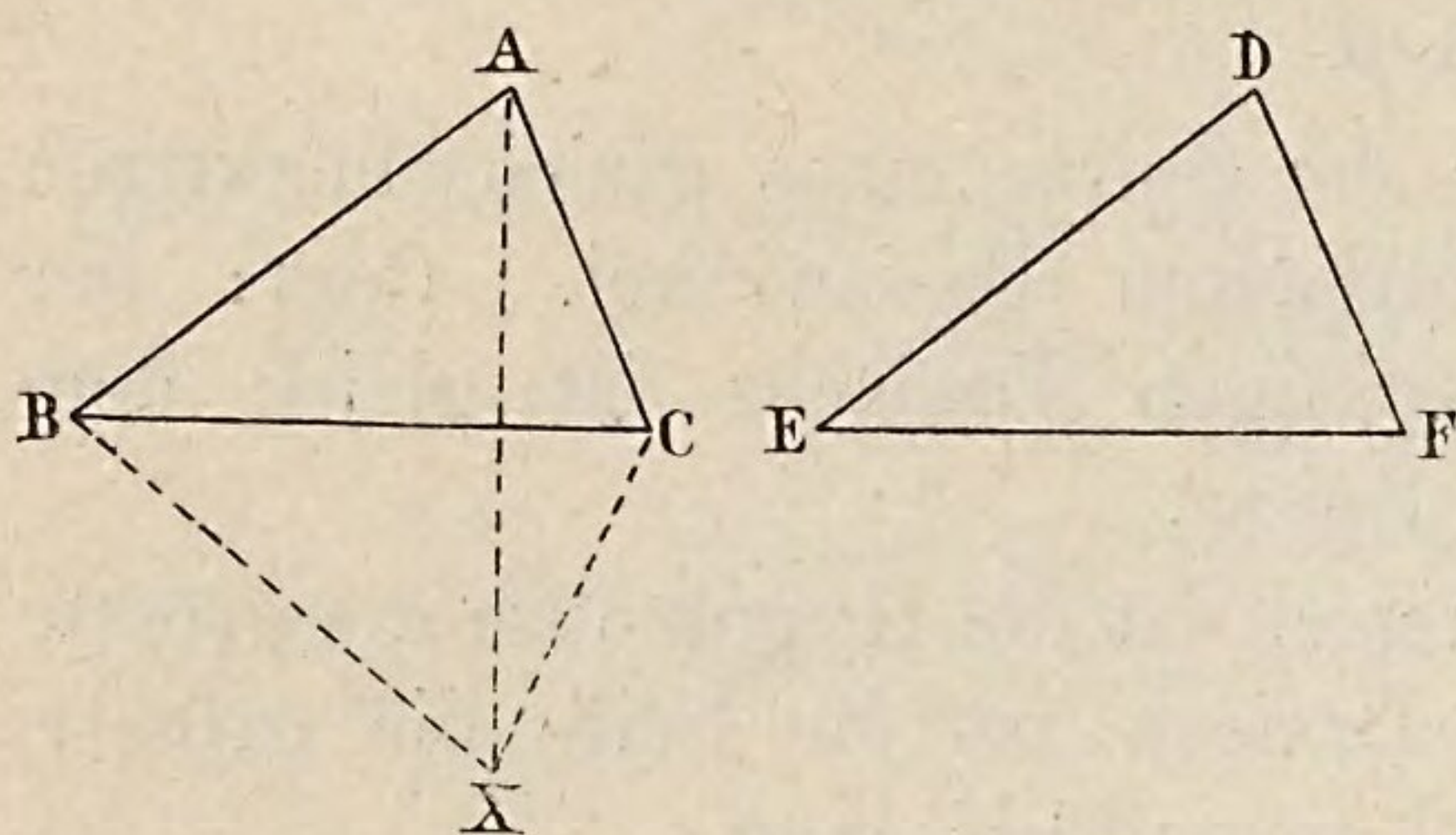
$$\triangle ABC \cong \triangle XBC \text{ (K. I.)}$$

$$\text{Nun ist aber } \triangle DEF \cong \triangle XBC \text{ (H. K.)}$$

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF \text{ (Gr. III). W. z. b. w.}$$

§ 28. Vierter Kongruenzsatz. (K. IV)

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie zwei Seiten und die der grösseren Seite gegenüberliegenden Winkel gleich haben.



$$\text{Vor. } AB = DE$$

$$BC = EF$$

$$BC > AB$$

$$EF > DE$$

$$\sphericalangle A = \sphericalangle D.$$

$$\text{Beh. } \triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

H. K. Ich lege das $\triangle DEF$ an das $\triangle ABC$, so dass die grösseren

Seiten EF und BC zusammenfallen, also $\triangle XBC \cong \triangle DEF$, und verbinde X mit A .

$$\text{Bew. } AB = DE \text{ (V.)}$$

$$\underline{BX = DE \text{ (H. K.)}}$$

$$\begin{array}{l}
 1. \ AB = BX \text{ (Gr. III.)} \\
 \hline
 \nabla BAX = BXA \text{ (B. } \nabla) \\
 \nabla A = D \text{ (V.)} \\
 \nabla D = X \text{ (H. K.)} \\
 \hline
 \nabla A = X \text{ (Gr. III)} \\
 \nabla BAX = BXA \text{ (b.)} \\
 \hline
 \nabla CAX = CXA \text{ (Gr. V}_2\text{).}
 \end{array}$$

$$2. \ AC = CX \text{ (§ 26}_2\text{).}$$

$$\begin{array}{l}
 3. \ BC = BC \text{ (Gr. I.)} \\
 \hline
 \triangle ABC \cong XBC \text{ (K. III).}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Es ist aber } \triangle DEF \cong XBC \text{ (H. K.)} \\
 \triangle ABC \cong DEF \text{ (Gr. III).} \\
 \text{W. z. b. w.}
 \end{array}$$

§ 29. Inkongruenzsätze.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten gleich, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich sind, so sind auch die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten ungleich, und zwar so, dass dem grösseren Winkel die grössere, dem kleineren Winkel die kleinere Seite gegenüber liegt.

$$\text{Vor. } AB = DE$$

$$BC = EF$$

$$\nabla B > E.$$

$$\text{Beh. } AC > DF$$

$$\text{H. K. } \triangle ABX \cong DEF.$$

$$\text{Bew. } \left. \begin{array}{l} AO + XO > AX \\ CO + BO > BC \end{array} \right\} \text{ (§ 23)}$$

$$\hline AC + BX > BC + AX \text{ (Gr. VIII)}$$

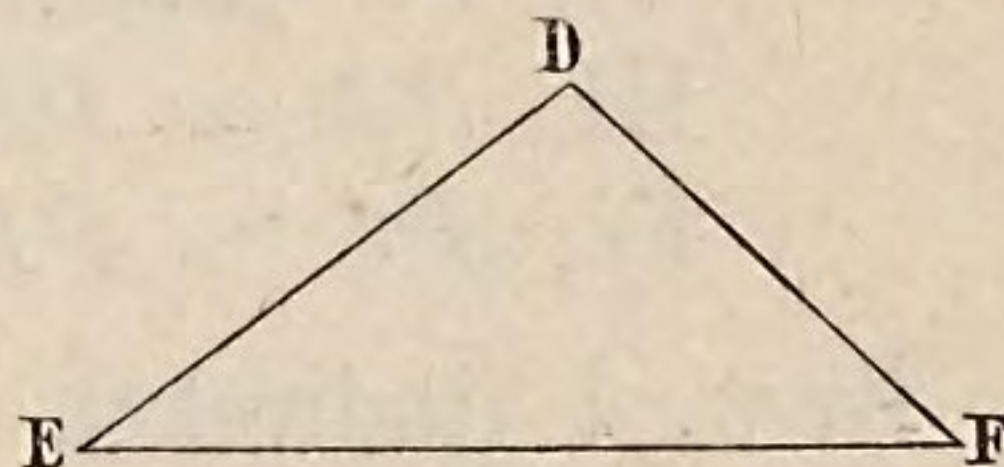
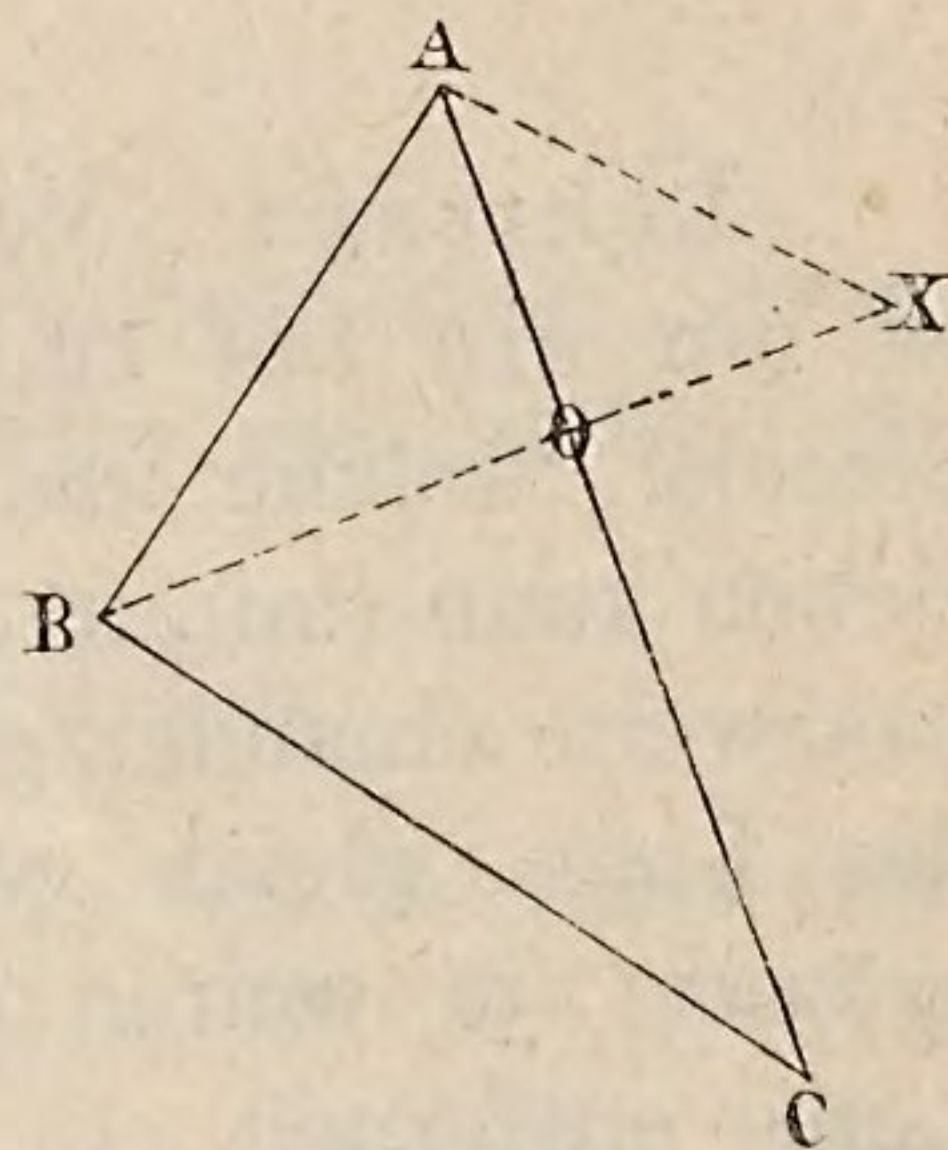
$$\begin{array}{l}
 BX = BC \left(\begin{array}{l} \text{Nebenbeweis:} \\ BX = EF \text{ (H. K.)} \\ BC = EF \text{ (V.)} \\ \hline BX = BC \text{ (Gr. III).} \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$\hline AC > AX \text{ (Gr. VI}_2\text{)}$$

$$AX = DF \text{ (H. K.)}$$

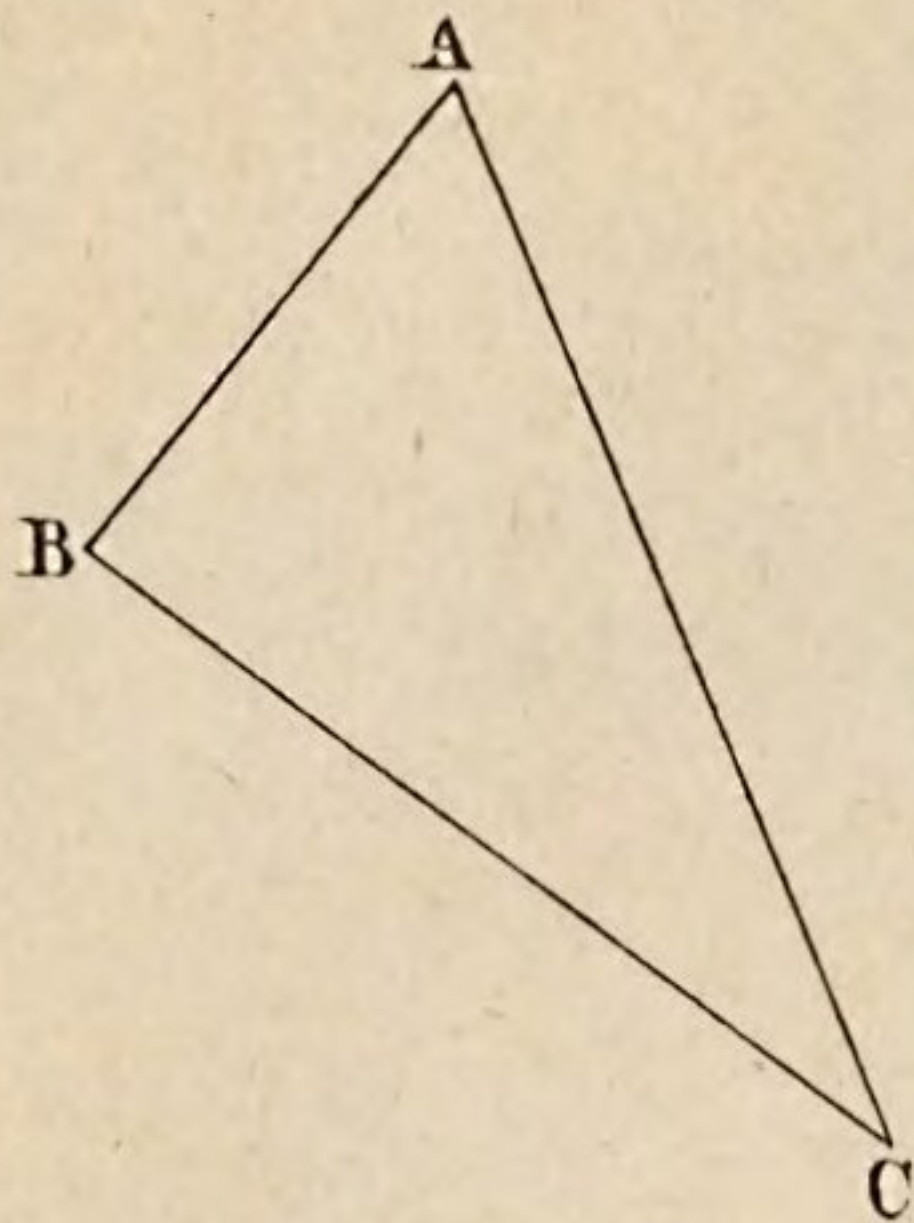
$$\hline AC > DF \text{ (Gr. II).}$$

$$\text{W. z. b. w.}$$



Umkehrung. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten gleich, die dritten Seiten aber ungleich sind, so sind auch die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel

ungleich, und zwar so, dass der grösseren Seite der grössere, der kleineren Seite der kleinere Winkel gegenüber liegt.

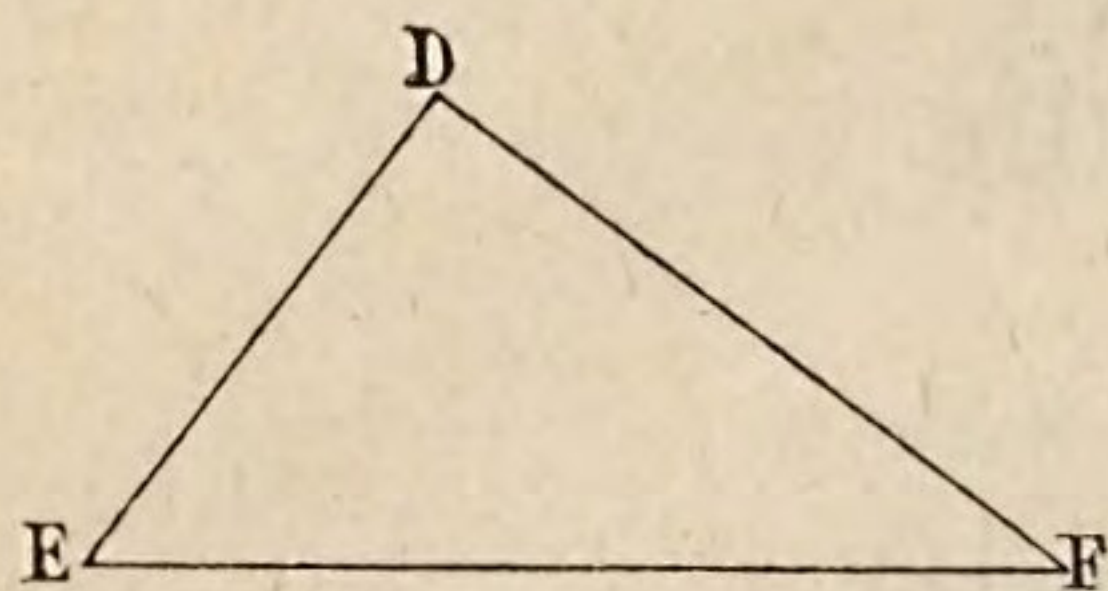


$$\begin{aligned}\text{Vor. } AB &= DE \\ BC &= EF \\ AC &> DF.\end{aligned}$$

$$\text{Beh. } \sphericalangle B > E.$$

Bew. (indirekt). Angenommen $\sphericalangle B$ wäre nicht $> E$, so könnte sein 1. $\sphericalangle B = E$ oder 2. $\sphericalangle B < E$.

Wäre 1) $\sphericalangle B = E$, so müsste $\triangle ABC \cong DEF$ (K. I) und folglich $AC = DF$ sein a. h. St. Dies widerspricht aber der V., folglich kann $\sphericalangle B$ nicht $= E$ sein.



Wäre 2) $\sphericalangle B < E$, so müsste nach vorigem Satze $AC < DF$ sein. Dies widerspricht aber ebenfalls der V.; folglich kann $\sphericalangle B$ nicht $< E$ sein.

Da nun nachgewiesenermassen $\sphericalangle B$ nicht $=$ und nicht $< E$ sein kann, so ist $\sphericalangle B > E$. W. z. b. w.

§ 30.

Lehrsatz. Von einem Punkte nach einer geraden Linie ist nur ein Lot zu fällen möglich. Dieses Lot ist die kleinste Strecke, welche man von dem Punkte nach der geraden Linie ziehen kann (minimum*). Die schrägen Verbindungsstrecken sind paarweise einander gleich, wenn ihre Fusspunkte vom Fusspunkte des Lotes gleich weit entfernt sind, und sie werden um so grösser, je weiter sich ihre Fusspunkte vom Fusspunkte des Lotes entfernen.

$$\begin{aligned}\text{Vor. } PF &\perp L \\ AF &= FB.\end{aligned}$$

Beh. I. PF einziges $\perp$ von P auf L ;

II. PF minimum;

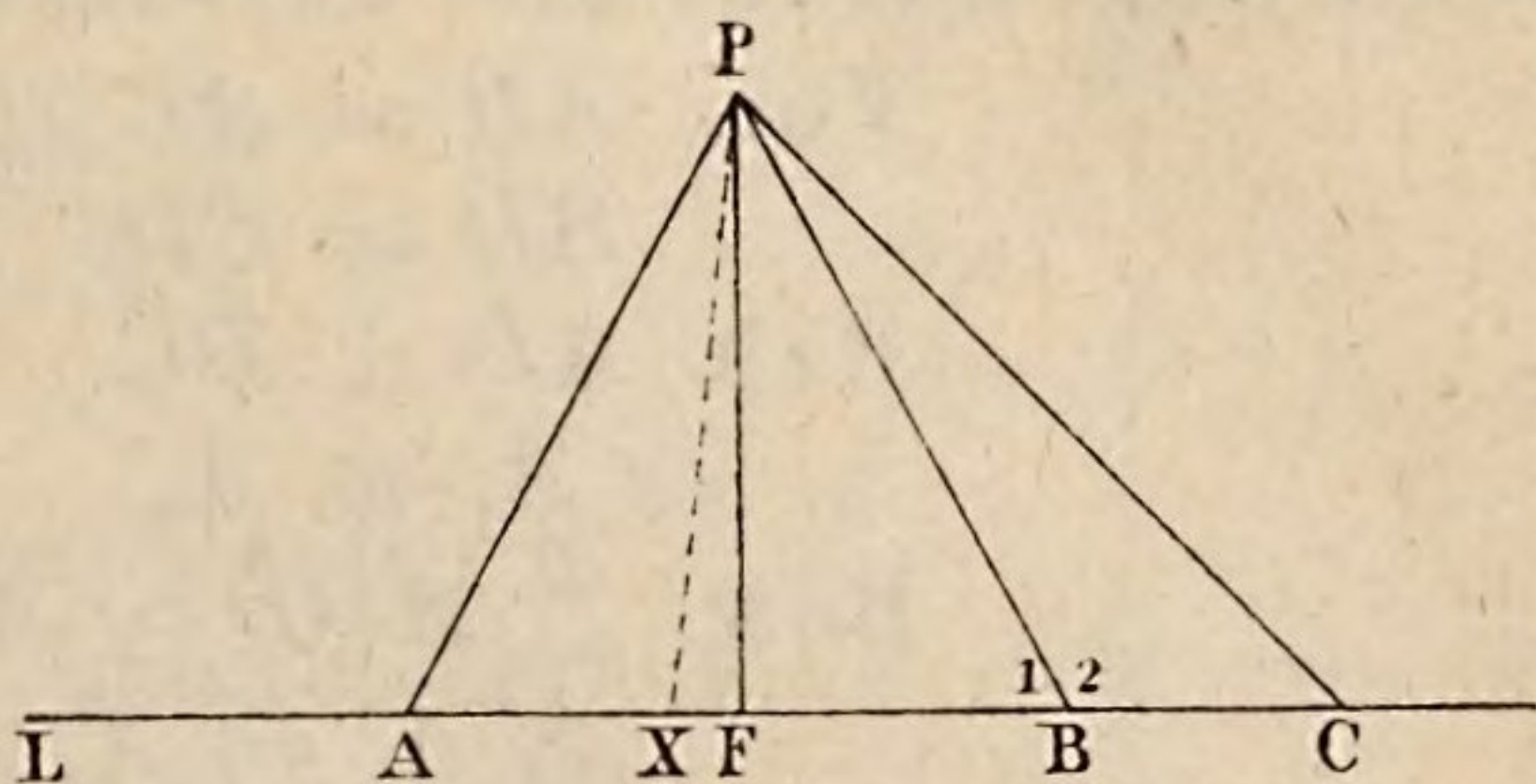
III. $PA = PB$;

IV. $PC > PB$.

Bew. I (indirekt). Angenommen PF wäre nicht das einzige $\perp$ von P auf L , so müsste ich doch noch ein anderes ziehen

*) Lateinisch; heisst „das Kleinste“.

können, z. B. PX . Dann entstände ein Dreieck PFX mit zwei rechten Winkeln, was nach § 21 unmöglich ist. Folglich kann PX nicht $\perp L$ stehen. Ebenso würde es mit allen andern von P aus gezogenen Geraden gehen mit Ausnahme von PF . Folglich ist PF das einzige $\perp$ von P auf L . W. z. b. w.



II. PF ist Kathete in den rechtwinkligen Dreiecken, in welchen PA , PB , PC u. s. w. die Hypotenusen sind. Folglich $PF < PA$, PB , PC u. s. w. (§ 26, Folg. 7). W. z. b. w.

$$\text{III. } \triangle PFA \cong PFB \text{ (K. I)} \\ \hline PA = PB \text{ (h. St.). W. z. b. w.}$$

$$\text{IV. } \angle B_1 < R \text{ (§ 21)} \\ \angle B_2 > R \text{ (N. } \angle) \\ \hline PC > PB \text{ (§ 26, Folg. 7). W. z. b. w.}$$

Anmerkung. Das Lot dient als Mass der Entfernung eines Punktes von einer geraden Linie und heisst sein Abstand.

§ 31. Vom Mittellot.

Erklärung. Unter Mittellot (Symmetrieaxe) einer Strecke versteht man das auf ihr in der Mitte errichtete Lot. Über die Konstruktion s. Anhang A.

Wir unterscheiden sieben Sätze vom Mittellot.

I. Die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks halbiert auch die Basis und steht senkrecht auf ihr (ist also Mittellot derselben).

$$\text{Vor. } AB = AC$$

$$\angle A_1 = \angle A_2$$

$$\text{Beh. } BD = CD$$

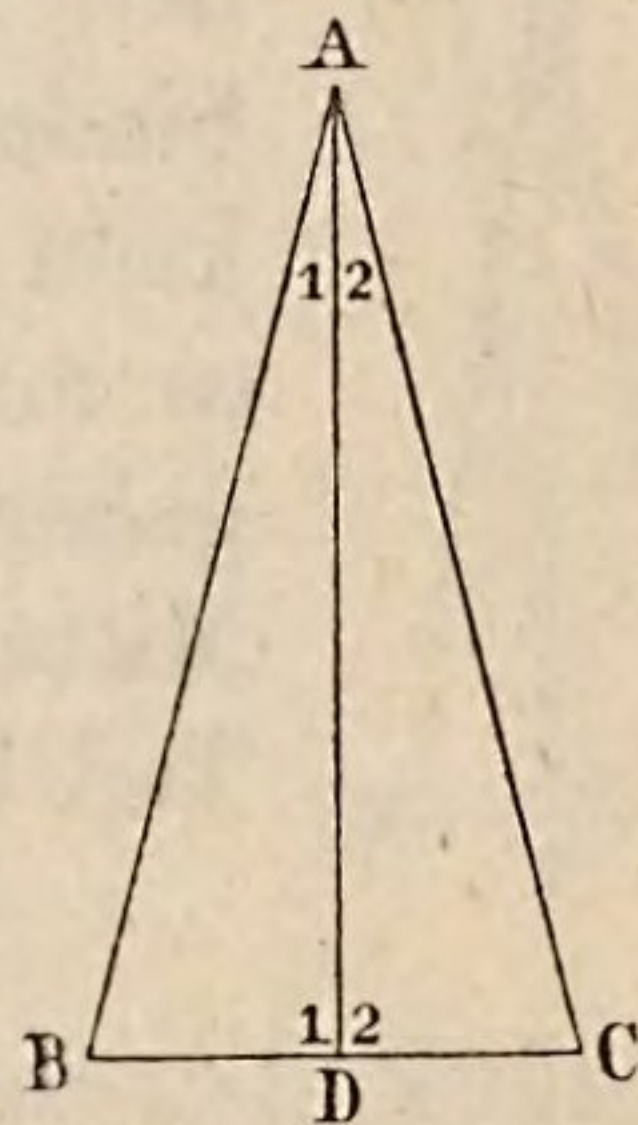
$$AD \perp BC.$$

$$\text{Bew. } \triangle ABD \cong ACD \text{ (K. I)}$$

$$\left. \begin{array}{l} BD = CD \\ \angle D_1 = \angle D_2 \end{array} \right\} \text{ (h. St.)}$$

$$\angle D_1 \text{ und } \angle D_2 \text{ sind N. } \angle$$

$$\hline AD \perp BC \text{ (§ 13}_2\text{). W. z. b. w.}$$



II. Die Verbindungslinie der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Mitte der Basis steht senkrecht auf ihr und halbiert den Winkel an der Spitze.

Vor. $AB = AC$

$BD = CD.$

Beh. $AD \perp BC$

$\sphericalangle A_1 = A_2.$

Bew. $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (K. III).

$\sphericalangle A_1 = A_2$ } (h. St.)

$\sphericalangle D_1 = D_2$

$\sphericalangle D_1$ u. $\sphericalangle D_2$ sind N. $\sphericalangle$

$AD \perp BC$ (§ 13₂). W. z. b. w.

III. Die Senkrechte von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Basis halbiert diese und den Winkel an der Spitze.

Vor. $AB = AC$

$AD \perp BC.$

Beh. $BD = CD$

$\sphericalangle A_1 = A_2.$

Bew. $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (K. IV)

$BD = CD$ } (h. St.)

$\sphericalangle A_1 = A_2$

W. z. b. w.

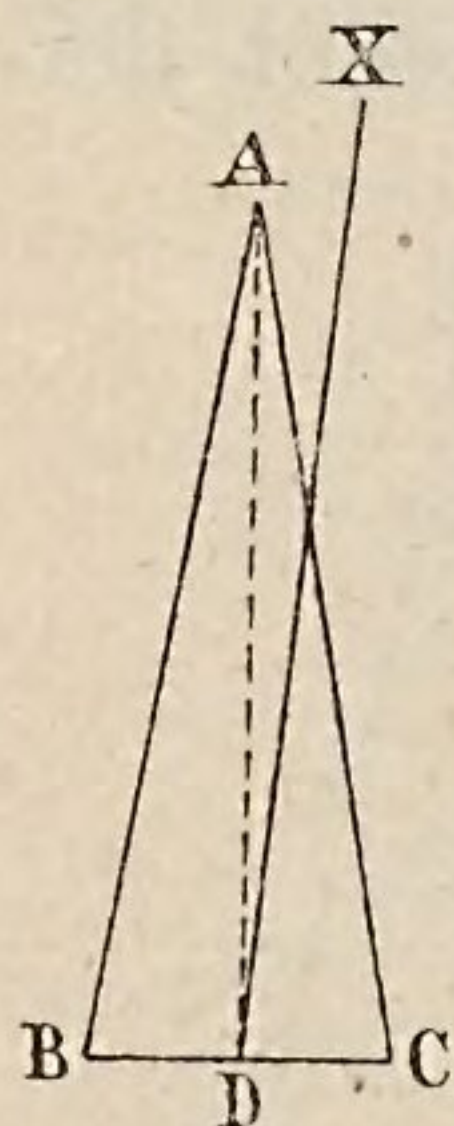
IV. Das Mittellot der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks geht durch die Spitze und halbiert den Winkel an der Spitze.

Vor. $AB = AC$

$BD = CD.$

Beh. Das Mittellot von BC geht durch A und halbiert $\sphericalangle A$.

Bew. (indirekt). Angenommen das Mittellot von BC ginge nicht durch A , sondern ginge vorbei, z. B. DX , so könnte ich doch A mit D verbinden. Dann ist $AD \perp BC$ (Teil II). Folglich kann DX nicht $\perp BC$ stehen (§ 13₂). Ebenso würde es mit allen andern von D aus gezogenen Geraden gehen mit Ausnahme von DA . Folglich geht das Mittellot von BC durch A . Es halbiert $\sphericalangle A$ nach Teil II. W. z. b. w.



V. Geht das Mittellot einer Seite im Dreieck durch den gegenüberliegenden Eckpunkt, so ist das Dreieck gleichschenkelig.

Vor. $BD = CD$

$AD \perp BC$.

Beh. $AB = AC$.

Bew. $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (K. I)

$AB = AC$ (h. St.).

W. z. b. w.

VI. Steht die Halbierungslinie eines Winkels im Dreieck senkrecht auf der Gegenseite, so ist das Dreieck gleichschenkelig.

Vor. $\sphericalangle A_1 = A_2$
 $AD \perp BC$.

Beh. $AB = AC$.

Bew. $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (K. II)

$AB = AC$ (h. St.). W. z. b. w.

VII. Halbiert die Halbierungslinie eines Winkels im Dreieck auch die Gegenseite, so ist das Dreieck gleichschenkelig.

Vor. $\sphericalangle A_1 = A_2$
 $BD = CD$.

Beh. $AB = AC$.

H. K. Ich verlängere AD über D hinaus um sich selbst $= DE$ und verbinde E mit B .

Bew. $BD = CD$ (V.)

$DE = AD$ (H. K.)

$\sphericalangle BDE = \sphericalangle ADC$ (Sch. $\sphericalangle$)

$\triangle BDE \cong \triangle CDA$ (K. I)

$BE = AC$ } (h. St.)

$\sphericalangle E = A_2$

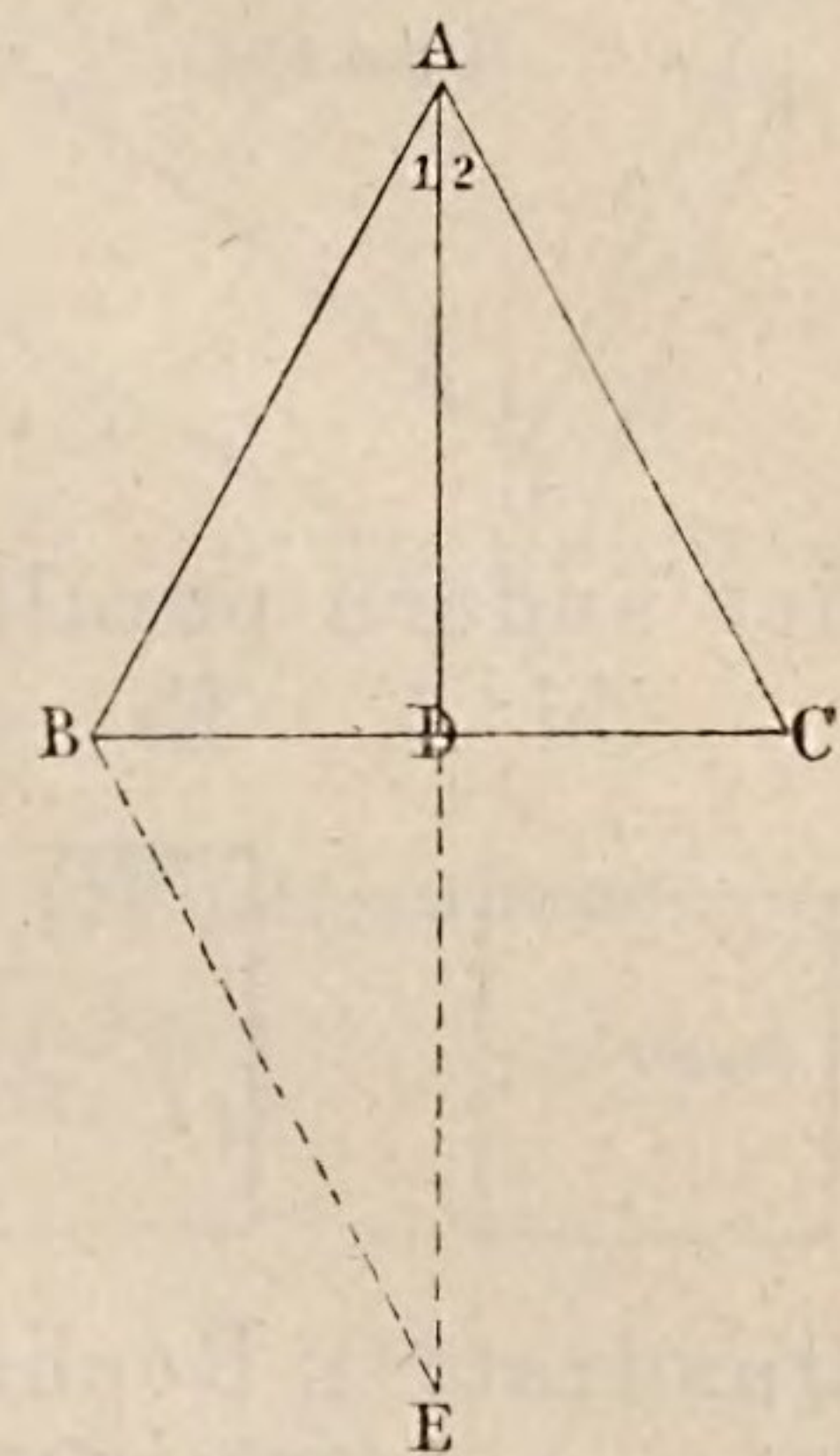
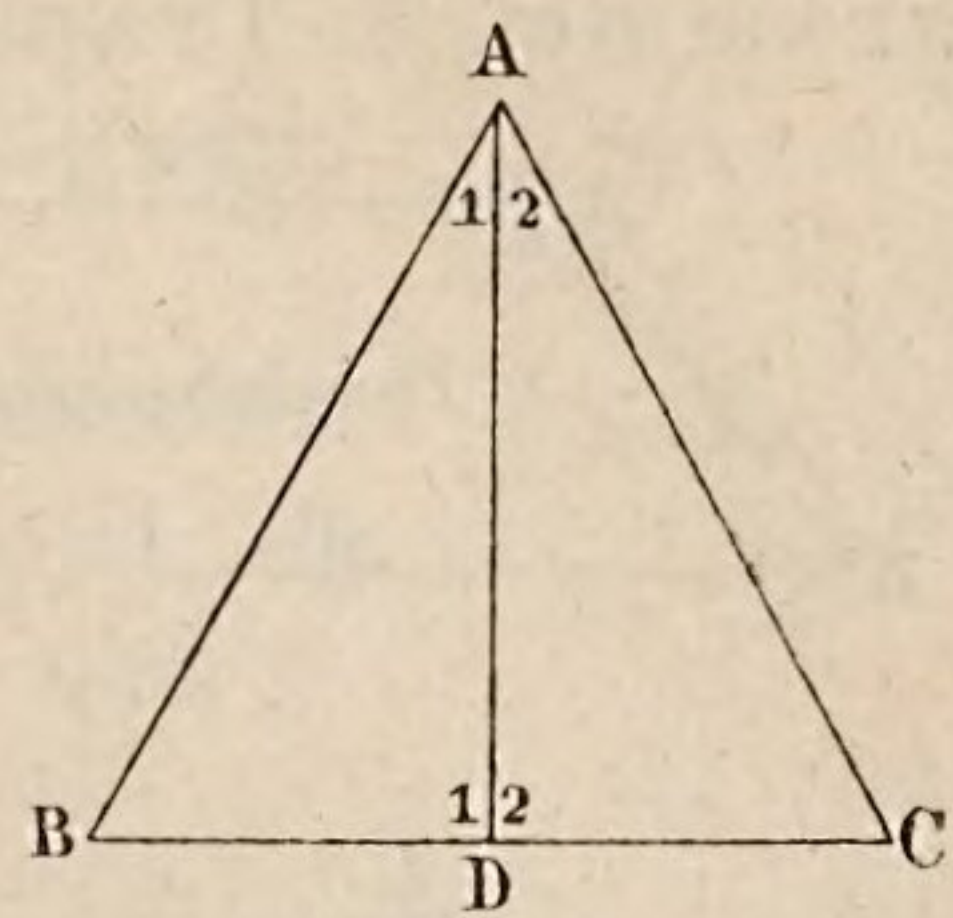
$\sphericalangle A_2 = A_1$ (V.)

$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle E$ (Gr. III)

$BE = AB$ (§ 26)

$BE = AC$ (b.)

$AB = AC$ (Gr. III). W. z. b. w.

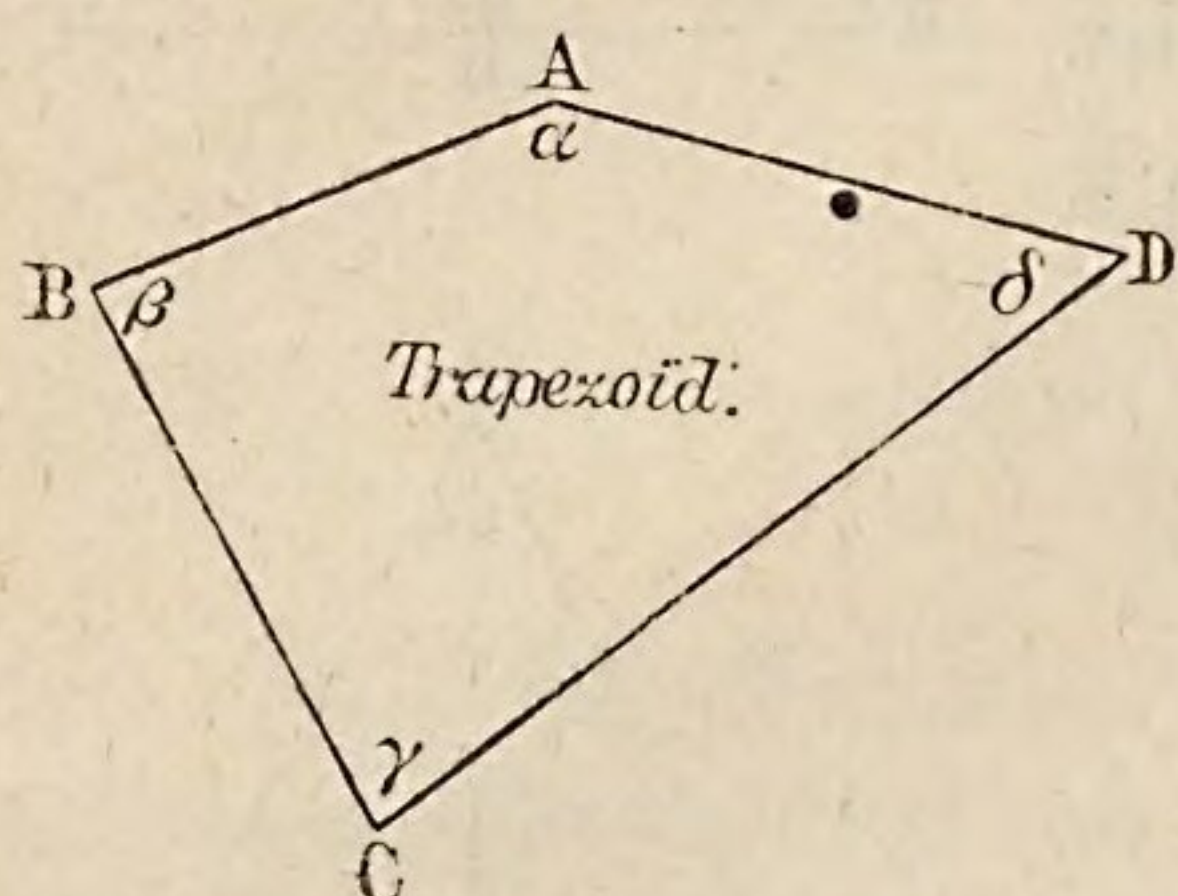
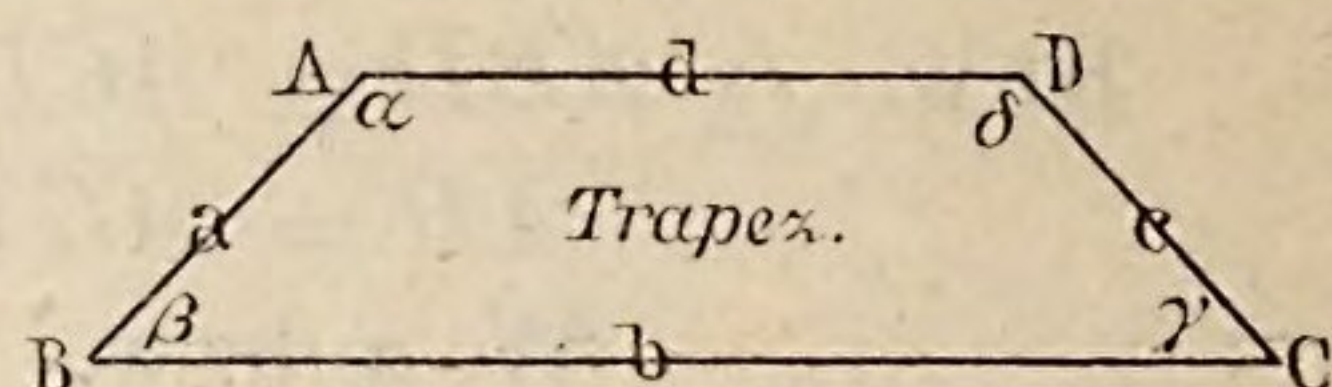
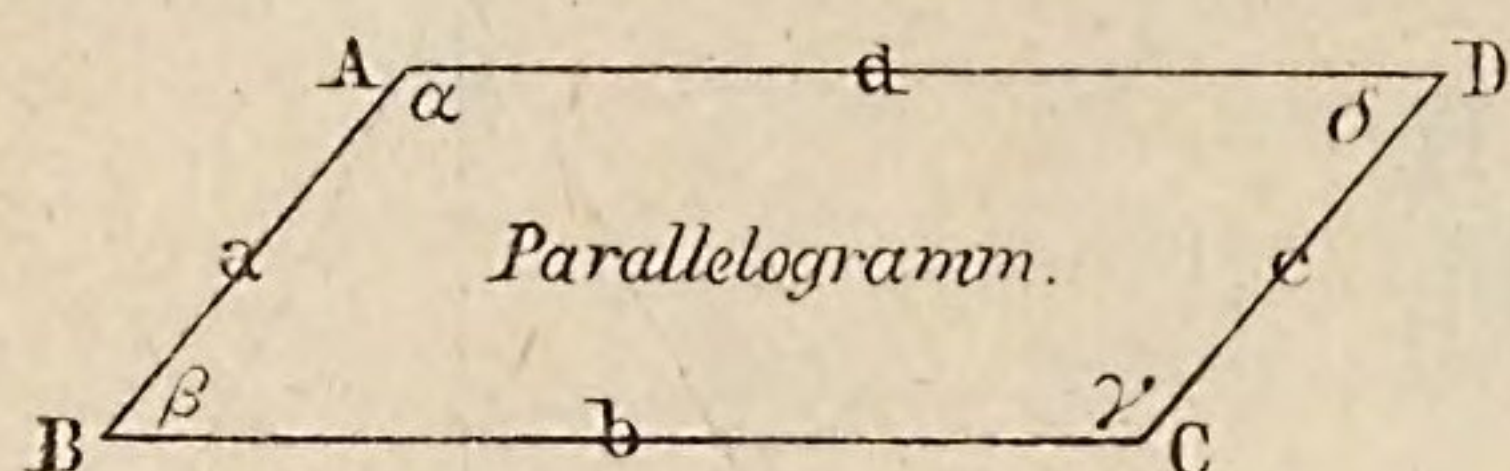


IV. Von den Vierecken.

§ 32.

Erklärung. Ein Viereck ($\diamond$) ist eine von vier Seiten begrenzte Figur.

Wir merken uns drei Arten von Vierecken, 1. Parallelogramme, 2. Trapeze*), 3. Trapezoid.*)

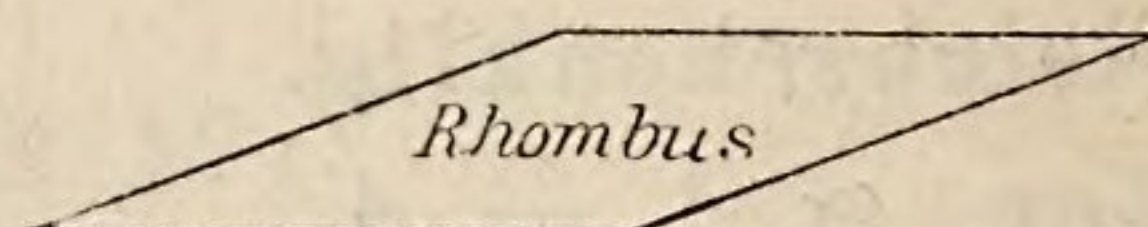
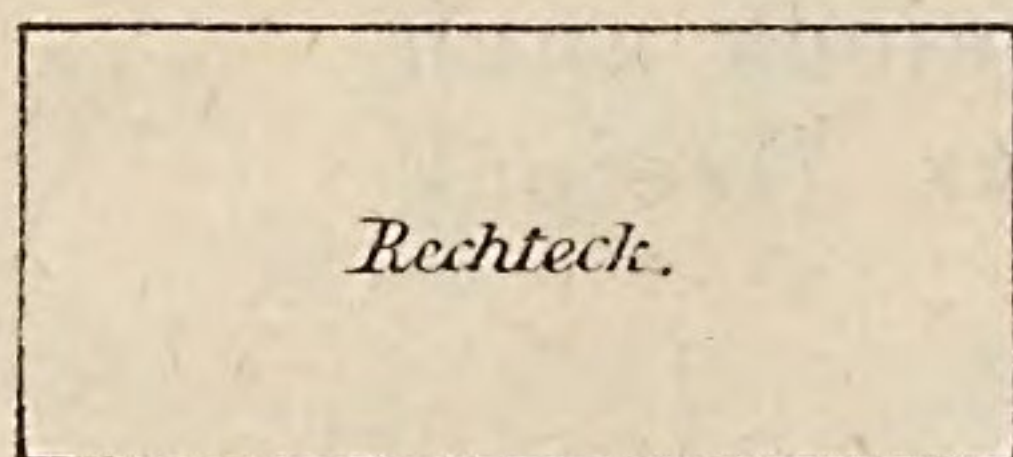
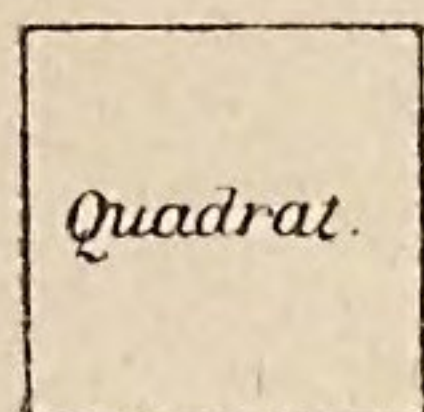


1. Ein Parallelogramm ($\square$) ist ein Viereck, in welchem je zwei Gegenseiten $\parallel$ sind. (S. Figur.)

2. Ein Trapez ($\square$) ist ein Viereck, in welchem zwei Gegenseiten $\parallel$ sind. (S. Figur.)

3. Ein Trapezoid ($\diamond$) ist ein Viereck, in welchem keine Seite der andern parallel ist. (S. Figur.)

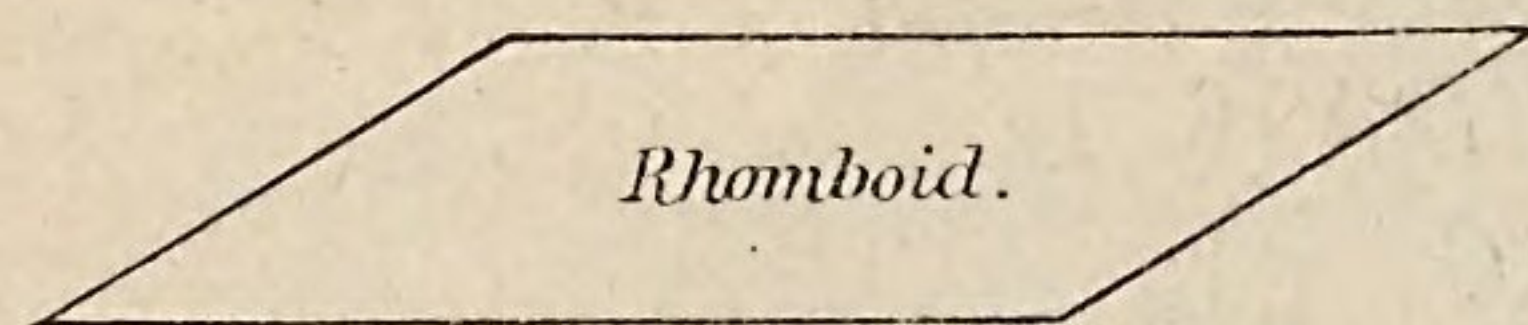
Zu 1. Es gibt vier Arten von Parallelogrammen:



Quadrat**), Rechteck (Oblongum**), Rhombus***) (Raute), Rhomboid***) (Räutlein).

Ein Quadrat ($\square$) ist ein rechtwinklig-gleichseitiges Parallelogramm.

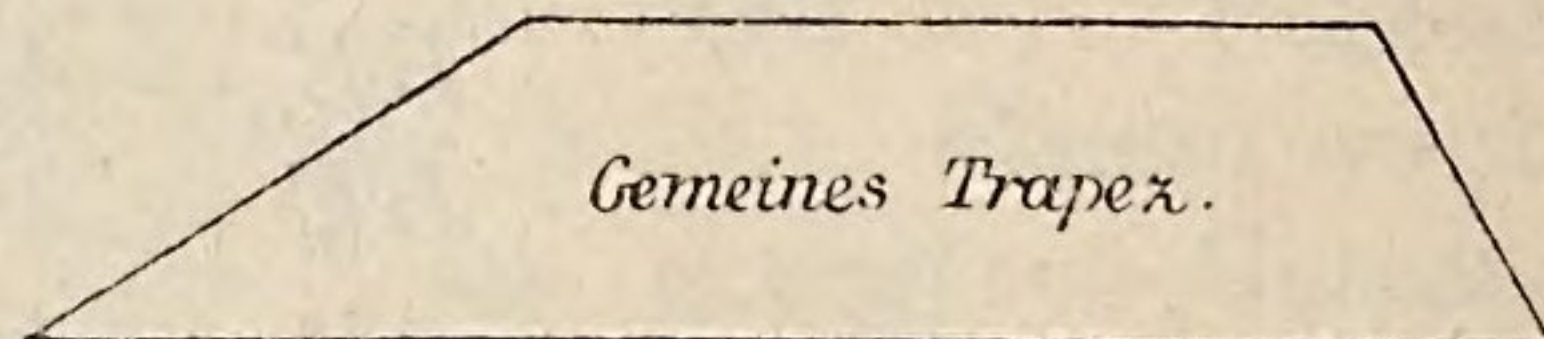
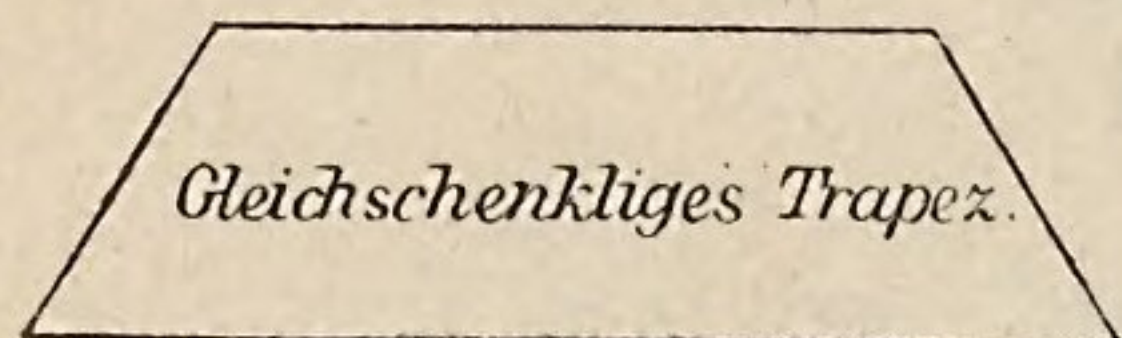
Ein Rechteck ($\square$) ist ein rechtwinklig-ungleichseitiges Parallelogramm.



Ein Rhombus ($\square$) ist ein schiefwinklig - gleichseitiges Parallelogramm.

Ein Rhomboid ($\square$) ist ein schiefwinklig-ungleichseitiges Parallelogramm.

Zu 2. Es gibt zwei Arten von Trapezen: gleichschenkliges



Trapez ($\square$) (Antiparallelogramm) und gemeines Trapez ($\square$) (Paralleltrapez oder auch schlechtweg Trapez).

*) Aus dem Griechischen; bedeutet „Tisch“, bez. „Tischchen“.

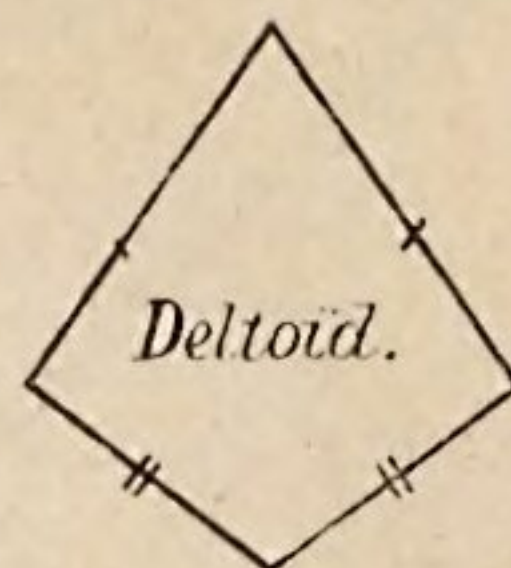
**) Aus dem Lateinischen; bedeutet „viereckiges Stück“, bez. „länglich“.

***) Aus dem Griechischen; bedeutet „Kreisel“.

Ein gleichschenkliges Trapez ist ein Trapez, in welchem die nicht parallelen Seiten gleich sind.

Ein gemeines Trapez ist ein Trapez, in welchem die nicht parallelen Seiten ungleich sind.

Zu 3. Eine besondere Art von Trapezoiden sind die Deltoide. Ein Deltoid ist ein Trapezoid, in welchem je zwei benachbarte Seiten gleich sind.



§ 33. Winkelsumme im Viereck.

Lehrsatz. Die Winkelsumme eines Vierecks ist $= 4 R$.

Vor. $ABCD \diamond$.

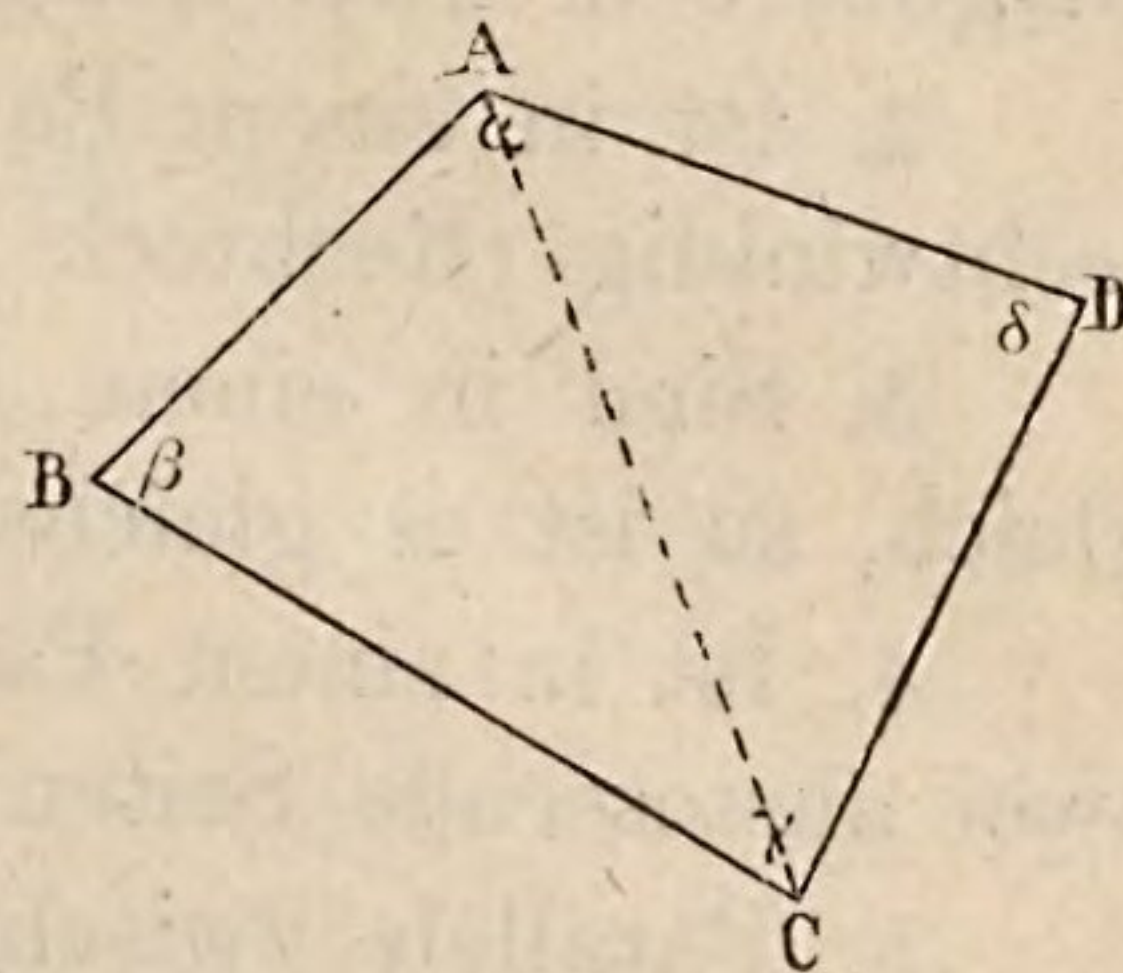
Beh. $\sphericalangle \alpha + \beta + \gamma + \delta = 4 R$

H. K. Ich ziehe die Diagonale AC .

Bew. $\begin{array}{l} \sphericalangle CAB + ACB + \beta = 2 R \\ \sphericalangle CAD + ACD + \delta = 2 R \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \sphericalangle CAB + ACB + \beta = 2 R \\ \sphericalangle CAD + ACD + \delta = 2 R \end{array}} \right\} \text{(Winkelsumme i. } \triangle \text{)}$

$$\hline \sphericalangle \alpha + \gamma + \beta + \delta = 4 R \text{ (Gr. V}_1\text{).}$$

W. z. b. w.



§ 34. Eigenschaften des Parallelogramms.

Lehrsatz. Im Parallelogramm sind die Gegenseiten und gegenüberliegenden Winkel gleich und die Diagonalen halbieren sich.

Vor. $ABCD \square$.

Beh. I. $AB = CD$ II. $\sphericalangle B = D$

$AD = BC$ $\sphericalangle A = C$

III. $AE = CE$

$BE = DE$.

Bew. I. $AC = AC$ (Gr. I)

$\begin{array}{l} \sphericalangle ACD = BAC \\ \sphericalangle CAD = ACB \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \sphericalangle ACD = BAC \\ \sphericalangle CAD = ACB \end{array}} \right\} \text{(W. } \sphericalangle \text{ an } \parallel \text{)}$

$\triangle ACD \cong ACB$ (K. II)

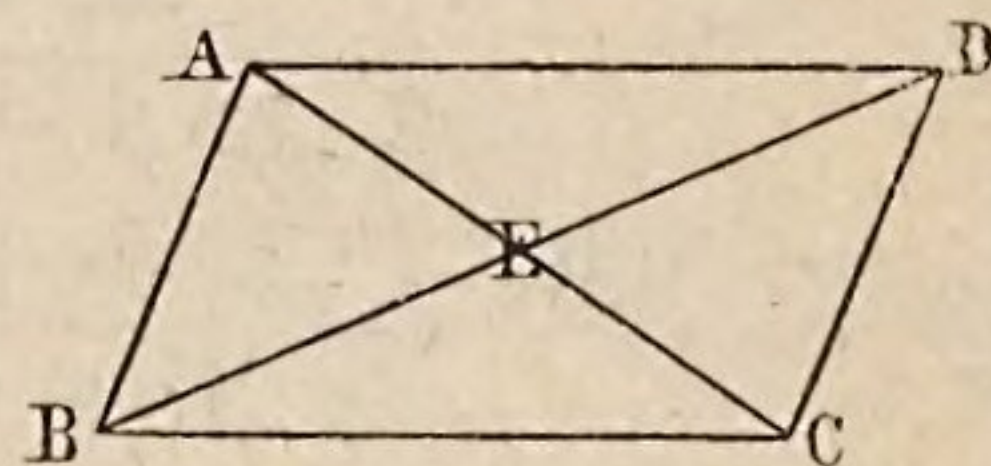
$AD = BC$

$CD = AB$ $\left. \vphantom{\begin{array}{l} AD = BC \\ CD = AB \end{array}} \right\} \text{(h. St.)}$

II. $\sphericalangle D = B$

$\triangle ABD \cong CDB$ (K. II)

$\sphericalangle A = C$ (h. St.)



$$\begin{array}{l}
 \text{III. } AD = BC \text{ (b.)} \\
 \left. \begin{array}{l} \sphericalangle EAD = \angle ECB \\ \sphericalangle EDA = \angle EBC \end{array} \right\} \text{ (W. } \sphericalangle \text{ an } \parallel) \\
 \hline
 \triangle AED \cong \triangle CEB \text{ (K. II)} \\
 \hline
 \left. \begin{array}{l} AE = CE \\ DE = BE \end{array} \right\} \text{ (h. St.). W. z. b. w.}
 \end{array}$$

Folgerungen: 1. Das Parallelogramm wird durch jede Diagonale in zwei kongruente Dreiecke zerlegt.

2. Ist in einem Parallelogramm ein Winkel $1 R$, so ist es rechtwinklig (Rechteck oder Quadrat).

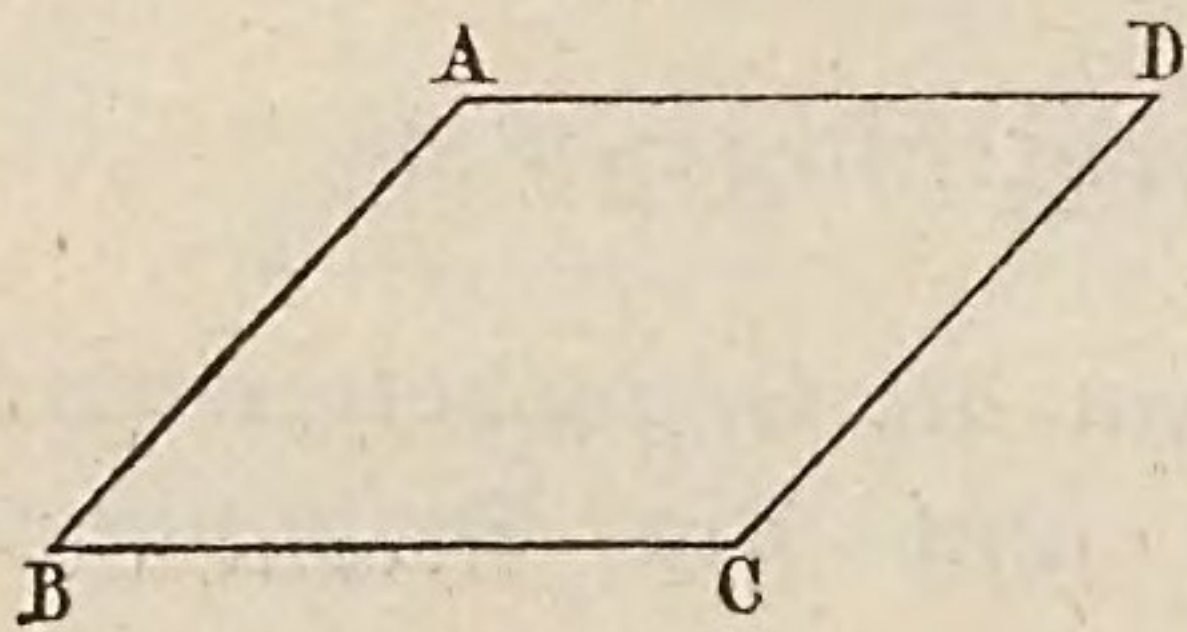
3. Sind in einem Parallelogramm zwei anstossende Seiten gleich, so ist es gleichseitig (Rhombus oder Quadrat).

4. Ist in einem Parallelogramm ein Winkel $1 R$ und sind zwei anstossende Seiten gleich, so ist es ein Quadrat.

5. Parallele zwischen Parallelen sind gleich.

6. Lote zwischen Parallelen sind gleich. Daher heisst das Lot zwischen zwei Parallelen ihr Abstand und dient als Mass ihrer Entfernungen von einander.

Umkehrung: Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn



1. je zwei gegenüberliegende Winkel, oder 2. je zwei Gegenseiten gleich, oder 3. ein Paar Gegenseiten gleich und parallel sind, oder 4. wenn sich die Diagonalen halbieren.

I. Vor. $\sphericalangle A = \sphericalangle C$; $\sphericalangle B = \sphericalangle D$.

Beh. $ABCD \square$.

Bew. $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 4 R$ (Winkelsumme Viereck)

$$\left. \begin{array}{l} \sphericalangle A = \sphericalangle C \\ \sphericalangle B = \sphericalangle D \end{array} \right\} \text{ (V.)}$$

$$\begin{array}{l}
 2 \sphericalangle A + 2 \sphericalangle D = 4 R \\
 \text{oder } 2 \sphericalangle A + 2 \sphericalangle B = 4 R
 \end{array} \left\} \text{ (Gr. II)}$$

$$\begin{array}{l}
 \sphericalangle A + \sphericalangle D = 2 R \\
 \text{oder } \sphericalangle A + \sphericalangle B = 2 R
 \end{array} \left\} \text{ (Gr. V}_4\text{)}$$

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{array} \right\} (\S 17_3)$$

oder $ABCD \square$. W. z. b. w.

II. Vor. $AD = BC$; $AB = CD$.

Beh. $ABCD \square$.

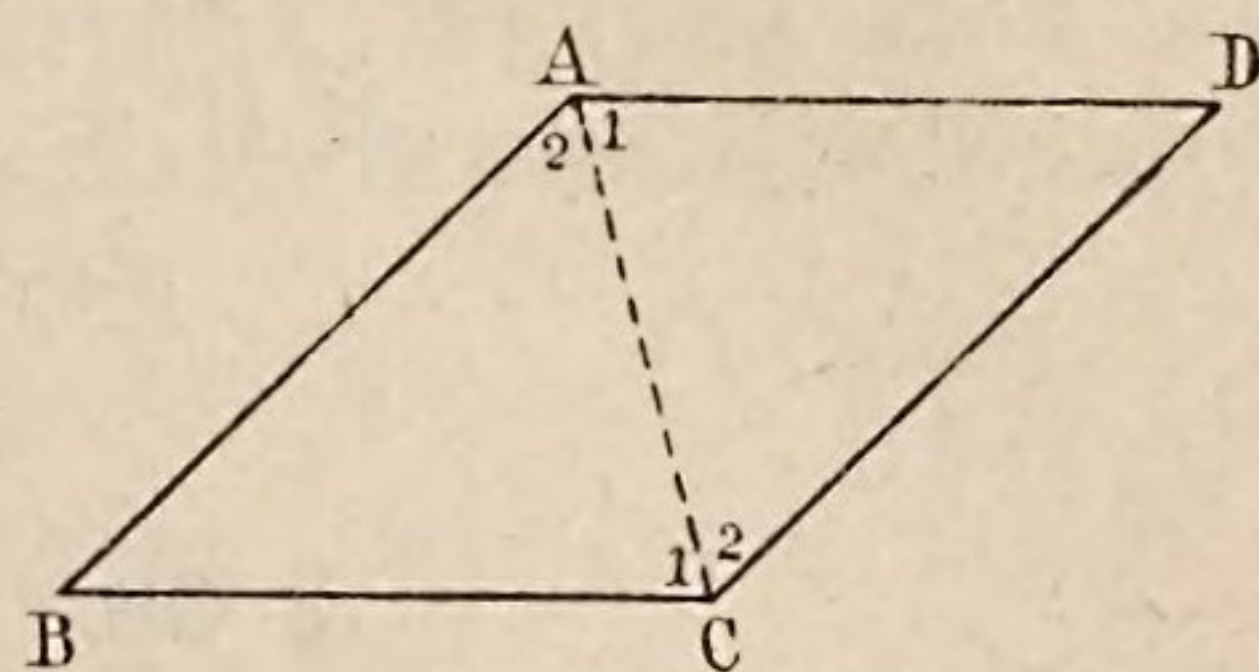
H. K. Ich ziehe die Diagonale AC .

Bew. $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ (K. III)

$$\begin{array}{l} \sphericalangle C_1 = A_1 \\ \sphericalangle A_2 = C_2 \end{array} \} \text{ (h. St.)}$$

$$\begin{array}{l} BC \parallel AD \\ AB \parallel CD \end{array} \} (\S 17_2)$$

oder $ABCD \square$. W. z. b. w.



III. Vor. $AD \nparallel BC$.

Beh. $ABCD \square$.

H. K. Ich ziehe die Diagonale AC .

Bew. $AD = BC$ (V.)

$$\sphericalangle A_1 = C_1 \text{ (W. } \sphericalangle \text{ a. } \parallel)$$

$$AC = AC \text{ (Gr. I)}$$

$$\triangle ADC \cong \triangle ABC \text{ (K. I)}$$

$$CD = AB \text{ (h. St.)}$$

$$AD = BC \text{ (V.)}$$

$$ABCD \square \text{ (Teil II). W. z. b. w.}$$

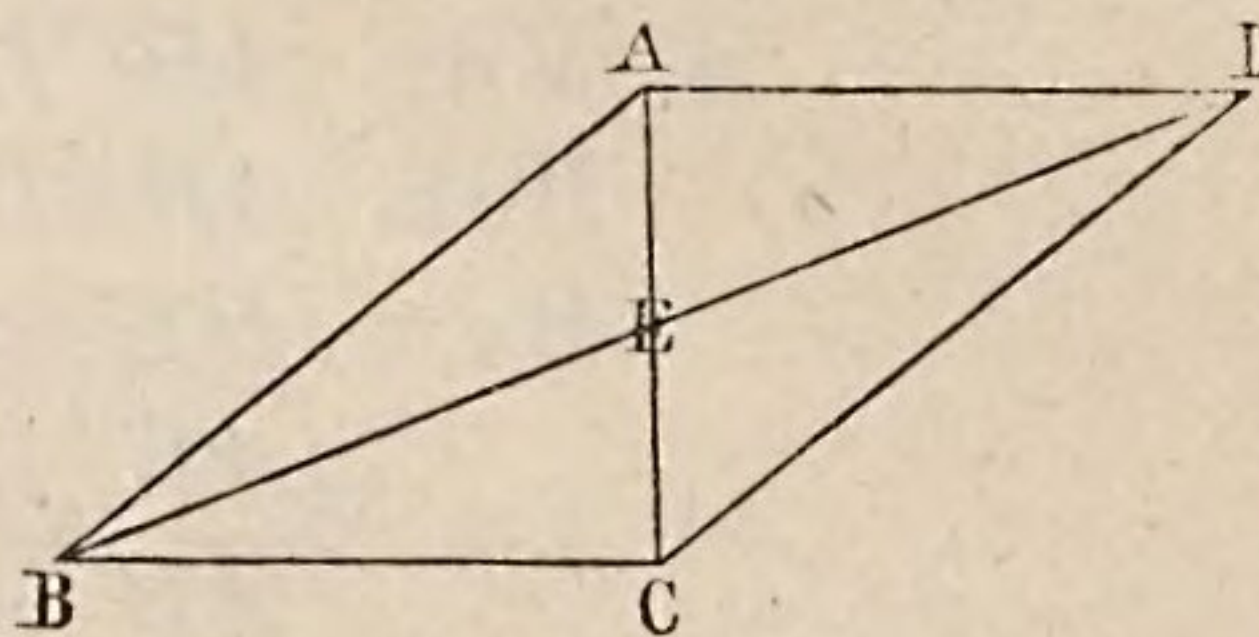
IV. Vor. $AE = CE$; $BE = DE$.

Beh. $ABCD \square$.

Bew. $\triangle AED \cong \triangle CEB$
 $\triangle AEB \cong \triangle CED$ } (K. I)

$$\begin{array}{l} AD = BC \\ AB = CD \end{array} \} \text{ (h. St.)}$$

$$ABCD \square \text{ (Teil II). W. z. b. w.}$$



§ 35. Vom Rechteck.

Lehrsatz. Im Rechteck sind die Diagonalen einander gleich.

Vor. $ABCD \square$.

Beh. $AC = BD$.

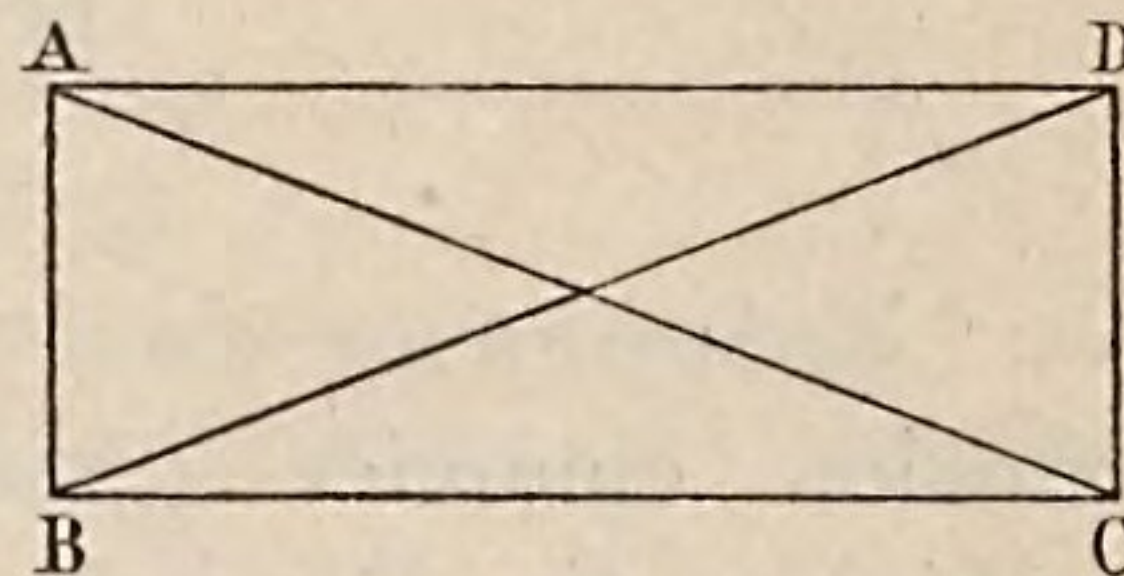
Bew. $BC = BC$ (Gr. I)

$$AB = CD \text{ (Gegenseiten i. } \square)$$

$$\sphericalangle B = \sphericalangle C \text{ (R.)}$$

$$\triangle ABC \cong \triangle DCB \text{ (K. I)}$$

$$AC = BD \text{ (h. St.). W. z. b. w.}$$



Umkehrung. Sind in einem Parallelogramm die Diagonalen gleich, so ist es rechtwinklig.

Vor. $ABCD \square$; $AC = BD$.

Beh. $ABCD \square$.

Bew. $\triangle ABC \cong DCB$ (K. III)

$\sphericalangle B = C$ (h. St.)

$\sphericalangle B + C = 2 R$ (E. $\sphericalangle$ a. ||)

$\sphericalangle B = 1 R$ (Gr. II u. V₄)

$ABCD \square$ (§ 34, Folg. 2). W. z. b. w.

§ 36. Vom Rhombus.

Lehrsatz. Im Rhombus halbieren die Diagonalen die Winkel und stehen aufeinander senkrecht.

Vor. $ABCD \diamond$.

Beh. I. $\sphericalangle A_1 = A_2$

$\sphericalangle B_1 = B_2$

$\sphericalangle C_1 = C_2$

$\sphericalangle D_1 = D_2$

II. $AC \perp BD$.

Bew. folgt aus § 31₂ und § 34.

Umkehrung. Stehen in einem

Parallelogramm die Diagonalen aufeinander senkrecht oder halbiert eine Diagonale einen Winkel des Parallelogramms, so ist es gleichseitig.

I. Vor. $ABCD \square$; $AC \perp BD$.

Beh. $ABCD \diamond$.

Bew. $BE = DE$ (§ 34)

$AE \perp BD$ (V.)

$AB = AD$ (§ 31₅)

$ABCD \square$ (V.)

$ABCD \diamond$ (§ 34, Folg. 3). W. z. b. w.

II. Vor. $ABCD \square$; $\sphericalangle A_1 = A_2$.

Beh. $ABCD \diamond$.

Bew. $AB = AD$ (§ 31₇ u. § 34)

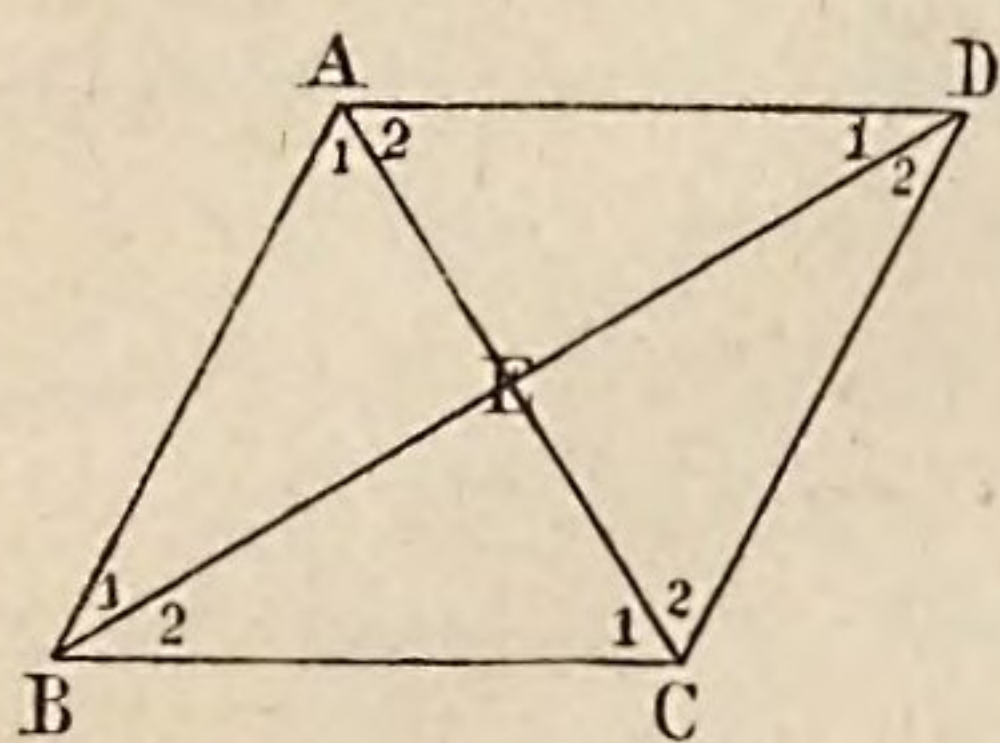
$ABCD \square$ (V.)

$ABCD \diamond$ (§ 34, Folg. 3). W. z. b. w.

§ 37. Vom Quadrat.

Folgerung aus § 35 u. § 36. Im Quadrat sind die Diagonalen einander gleich, stehen aufeinander senkrecht und halbieren die Winkel; sie schliessen deshalb mit den Seiten Winkel von 45° ein, und es entstehen vier einander kongruente rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke.

Sind in einem Parallelogramm die Diagonalen gleich und stehen sie senkrecht aufeinander oder halbiert eine derselben einen Winkel oder schliesst sie mit einer Seite einen Winkel von 45° ein, so ist die Figur ein Quadrat.



§ 38. Vom gleichschenkligen Trapez.

Lehrsatz. Im gleichschenkligen Trapez sind die Winkel an jeder der parallelen Seiten und die Diagonalen einander gleich.

Vor. $ABCD \text{ } \square \text{ } \lambda$.

Beh. I. $\sphericalangle B = \sphericalangle C$; $\sphericalangle A = \sphericalangle D$; II. $AC = BD$.

H. K. $AX \parallel CD$.

Bew. I. $AX = CD$ ($\parallel$ zwischen $\parallel$)

$$CD = AB \text{ (V.)}$$

$$AX = AB \text{ (Gr. III)}$$

$$\sphericalangle B = \sphericalangle X_1 \text{ (B. } \sphericalangle \text{)}$$

$$\sphericalangle X_1 = \sphericalangle C \text{ (G. } \sphericalangle \text{ an } \parallel \text{)}$$

$$\sphericalangle B = \sphericalangle C \text{ (Gr. III)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sphericalangle B + \sphericalangle A = 2 R \\ \sphericalangle C + \sphericalangle D = 2 R \end{array} \right\} \text{ (E. } \sphericalangle \text{ an } \parallel \text{)}$$

$$\sphericalangle B + \sphericalangle A = \sphericalangle C + \sphericalangle D \text{ (Gr. III)}$$

$$\sphericalangle B = \sphericalangle C \text{ (b.)}$$

$$\sphericalangle A = \sphericalangle D \text{ (Gr. V}_2\text{)}$$

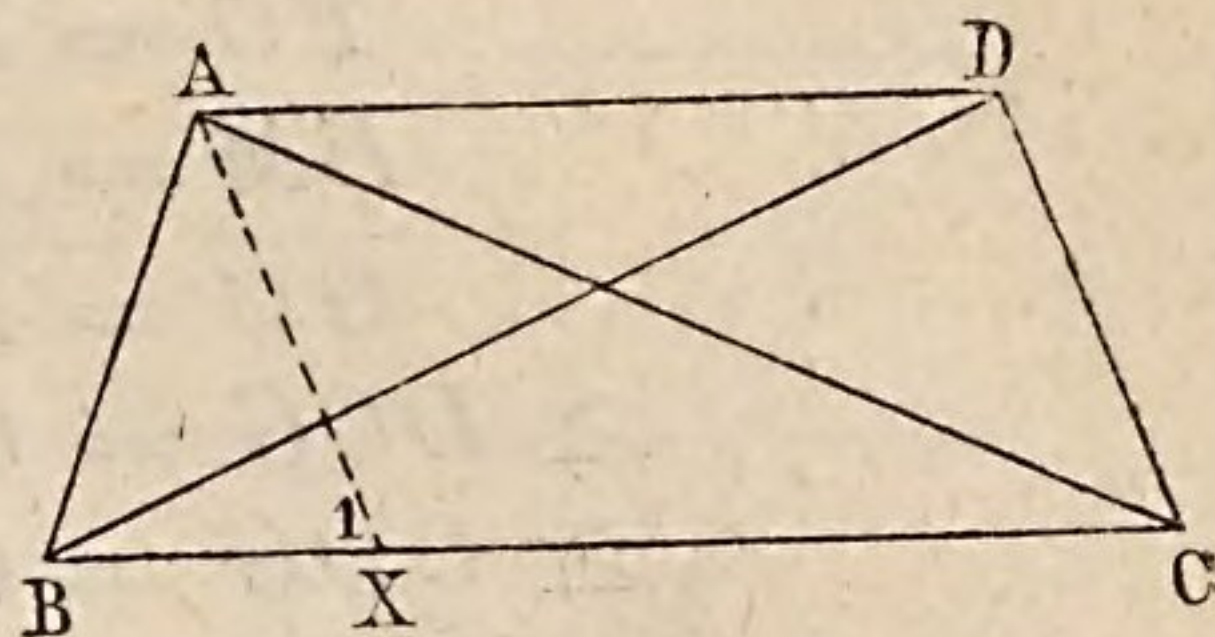
$$\text{II. } BC = BC \text{ (Gr. I)}$$

$$AB = CD \text{ (V.)}$$

$$\sphericalangle B = \sphericalangle C \text{ (b.)}$$

$$\triangle ABC \cong DCB \text{ (K. I)}$$

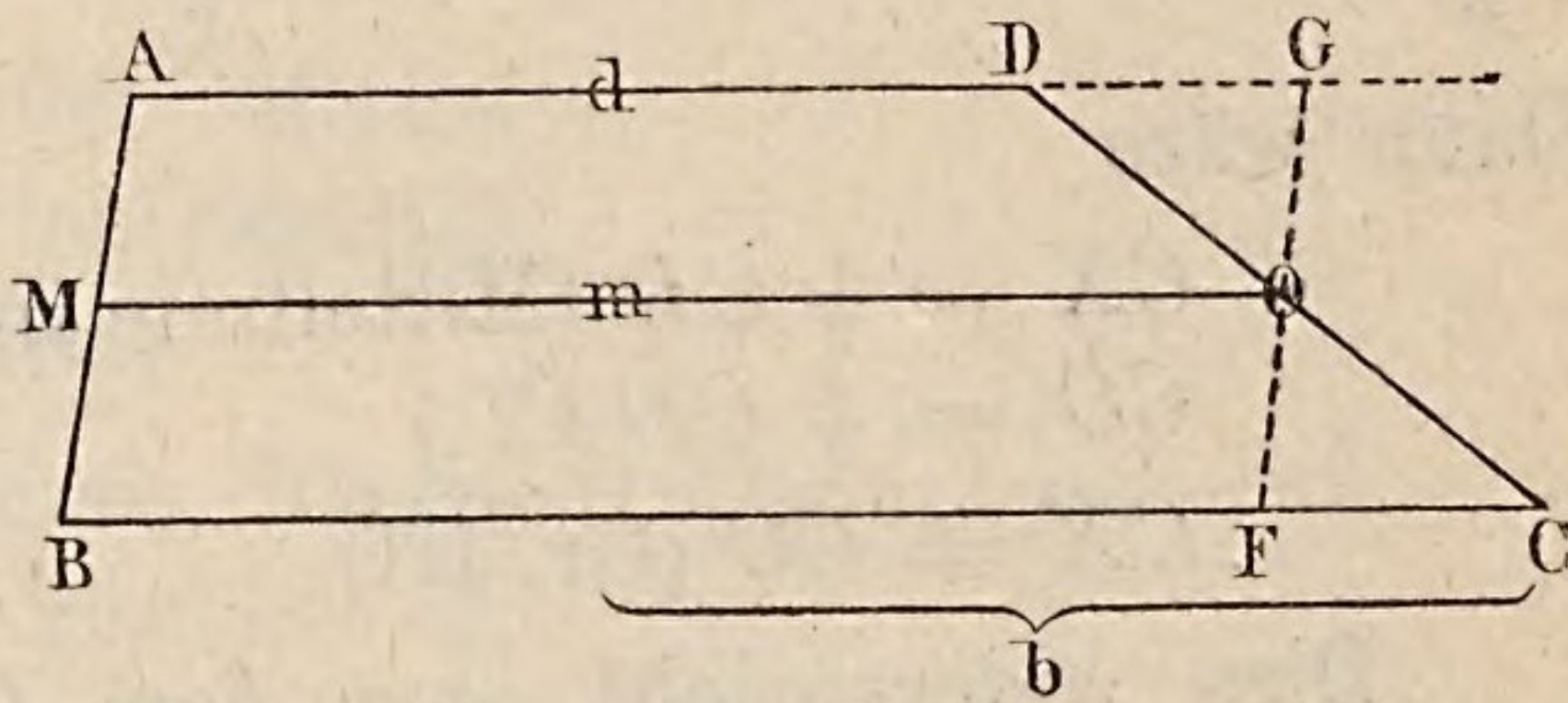
$$AC = BD \text{ (h. St.). W. z. b. w.}$$



§ 39. Vom Trapez.

Erklärung. Unter Mittellinie eines Trapezes versteht man die Parallele von der Mitte einer der nicht parallelen Seiten zu den parallelen Seiten.

Lehrsatz. Die Mittellinie eines Trapezes halbiert beide nicht parallelen Seiten und ist gleich dem arithmetischen Mittel der parallelen Seiten.



(Unter dem arithmetischen Mittel mehrerer Grössen versteht man ihre Summe geteilt durch ihre Anzahl.)

Vor. $ABCD \text{ } \square$

$$AM = BM$$

$$MO \parallel BC \text{ (} \parallel AD \text{)}$$

Beh. I. $CO = DO$

$$\text{II. } MO = \frac{BC + AD}{2}; \quad \left(m = \frac{b + d}{2}\right).$$

H. K. Durch O ziehe ich die Parallele zu AB , welche BC in F und die Verlängerung von AD in G trifft.

Bew. I. $GO = AM$
 $FO = BM$ } ($\parallel$ zwischen $\parallel$)
 $BM = AM$ (V.)

$$GO = FO \text{ (Gr. II)}$$

$$\sphericalangle DOG = COF \text{ (Sch. } \sphericalangle)$$

$$\sphericalangle ODG = C \text{ (W. } \sphericalangle \text{ an } \parallel)$$

$$\triangle DOG \cong COF \text{ (K. II)}$$

$$DO = CO \text{ (h. St.)}$$

II. $MO = AD + DG$ (AG) } ($\parallel$ zwischen $\parallel$)
 $MO = BC - CF$ (BF) }

$$CF = DG \text{ (h. St. in } \cong \triangle)$$

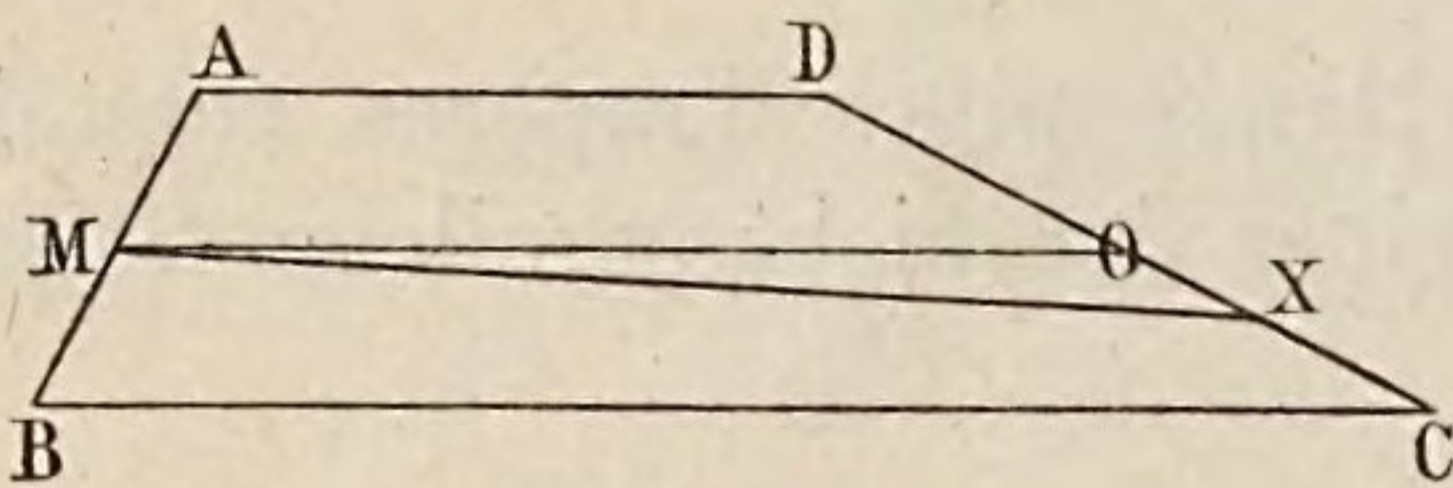
$$2 MO = BC + AD \text{ (Gr. V}_1)$$

$$MO = \frac{BC + AD}{2} \text{ (Gr. V}_4). \quad \text{W. z. b. w.}$$

Umkehrung. Die Verbindungslinie der Mitten der nicht parallelen Seiten eines Trapezes ist den parallelen Seiten parallel (ist also die Mittellinie des Trapezes).

Vor. $ABCD$ $\square$; $AM = BM$; $DO = CO$.

Beh. $MO \parallel BC$.



Bew. (indirekt). Angenommen MO wäre nicht $\parallel BC$, so könnte ich von M aus eine andere Gerade $\parallel BC$ ziehen, z. B. $MX \parallel BC$.

Dann wäre

$$CX = \frac{1}{2} CD \text{ (Mittellinie im } \square). \text{ Es ist aber}$$

$$CO = \frac{1}{2} CD \text{ (V.)}$$

$$CX = CO \text{ (Gr. III).}$$

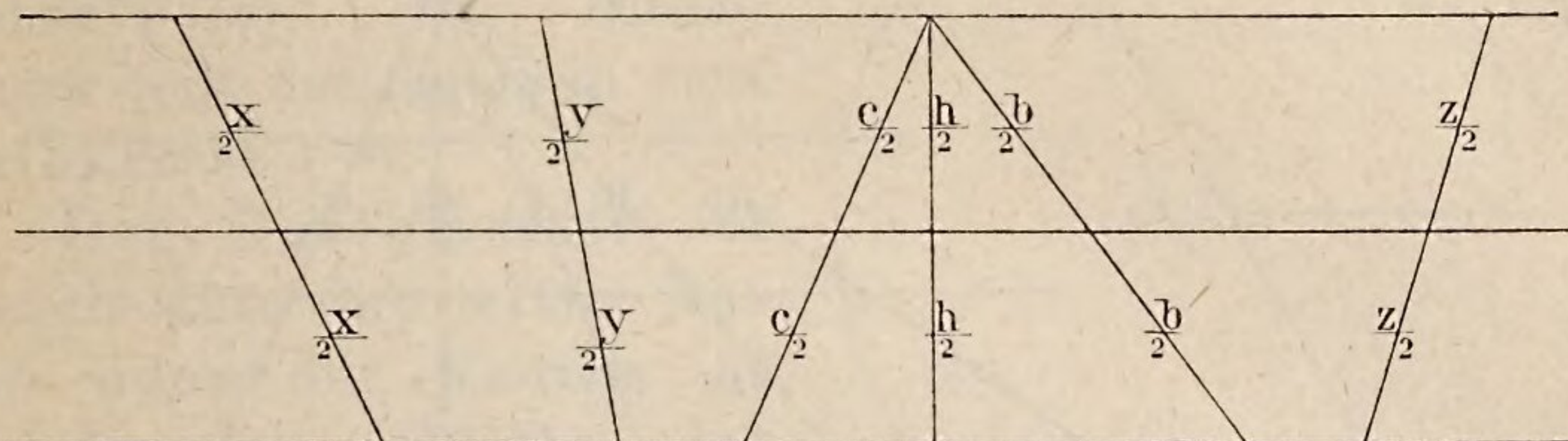
Dies widerspricht aber dem Gr. IV. Folglich kann MX nicht $\parallel BC$ sein. Ebenso würde es mit allen andern von M aus gezogenen Geraden gehen mit Ausnahme von MO , folglich $MO \parallel BC$.

W. z. b. w.

Folgerungen: 1. Die Mittellinie eines Trapezes halbiert jede zwischen den Parallelen liegende Strecke, insbesondere auch den Abstand.

Erklärung. Die durch die Mitte des Abstandes zweier Parallelen zu ihnen gezogene Parallele heisst die Parallele im mittleren Abstände (Parallele in der mittleren Entfernung; mittlere Parallele).

2. Die Parallele im mittleren Abstand halbiert jede in den Parallelen endigende Strecke.



3. Die durch die Mitte einer Dreiecksseite zu einer zweiten gezogene Parallele halbiert auch die dritte und ist gleich der Hälfte der ihr parallelen Seite.

Vor. $AD = BD$

$DE \parallel BC$.

Beh. I. $AE = CE$.

II. $DE = \frac{1}{2} BC$

H. K. $DF \parallel AC$.

Bew. I. $\triangle ADE \cong DBF$ (K. II)

$AE = DF$ (h. St.)

$DF = CE$ ($\parallel$ zwischen $\parallel$)

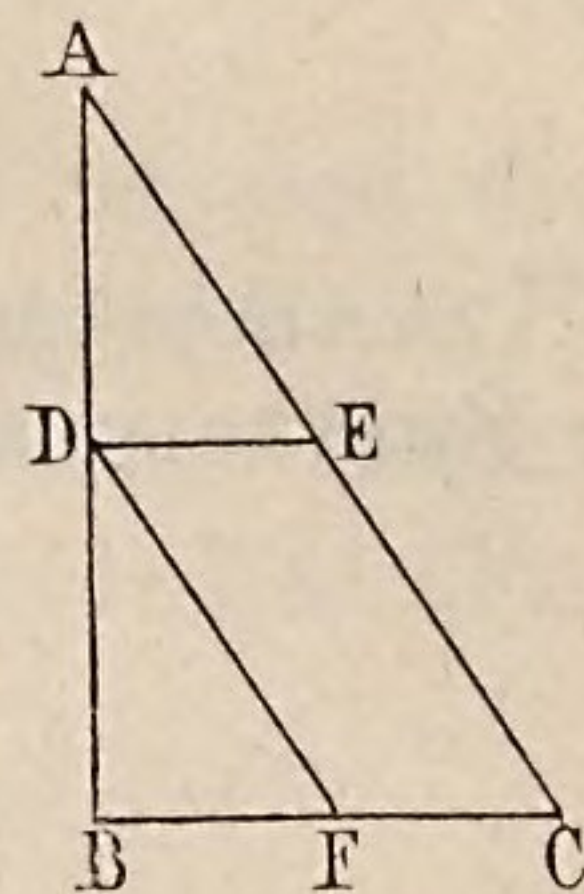
$AE = CE$ (Gr. III)

II. $BF = CF$ (nach Teil I)

oder $CF = \frac{1}{2} BC$

$CF = DE$ ($\parallel$ zwischen $\parallel$)

$DE = \frac{1}{2} BC$ (Gr. II). W. z. b. w.



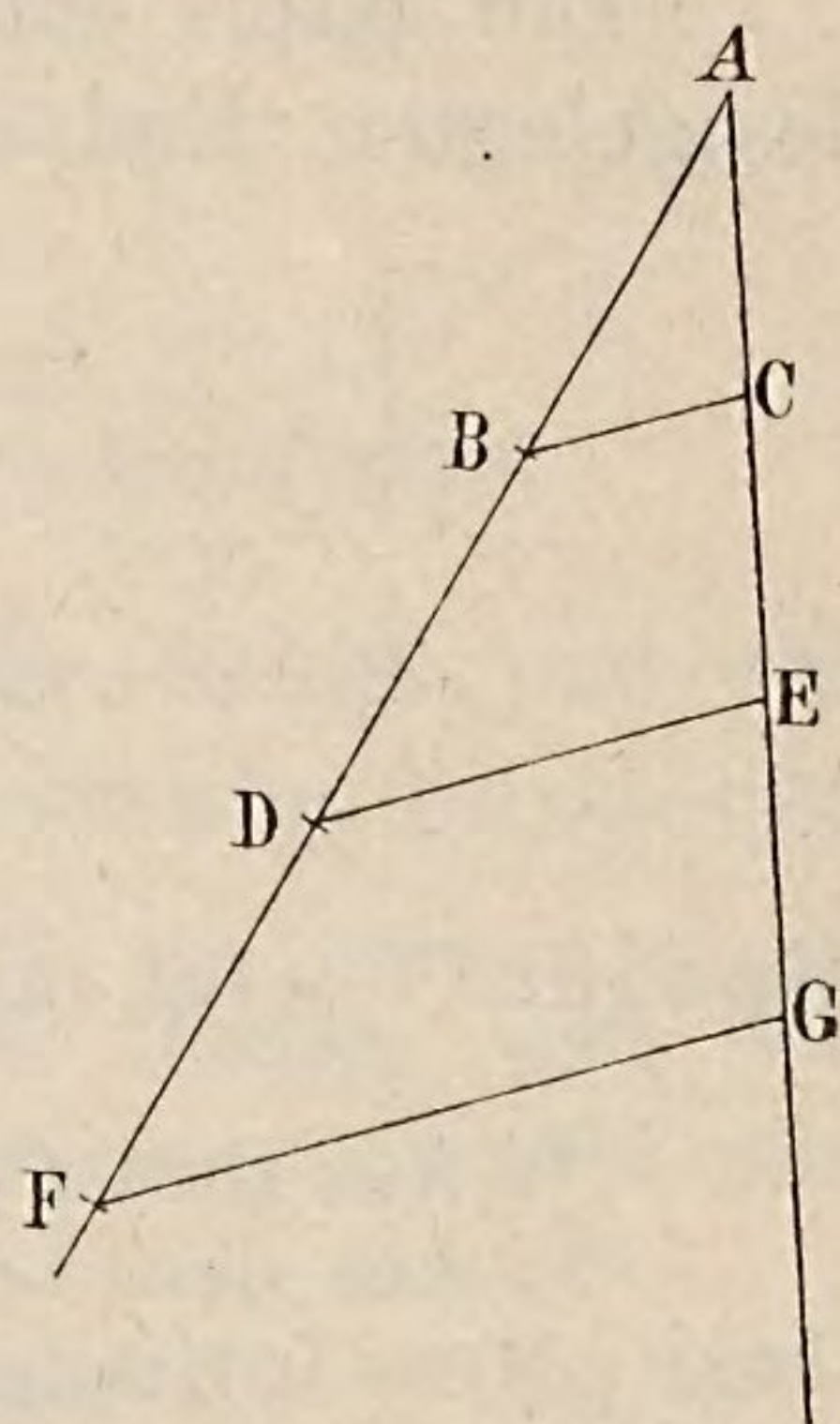
4. Die Verbindungslinie der Mitten zweier Dreiecksseiten ist der dritten parallel. (Beweis indirekt wie beim Trapez.)

5. Trägt man auf dem einen Strahl eines Strahlenbüschels gleiche Stücke ab und zieht durch die Teilpunkte eine Schar paralleler Linien (Strahlenbündel), so werden auch auf den andern Strahlen lauter unter sich gleiche Stücke abgeschnitten.

Vor. $AB = BD = DF$

$BC \parallel DE \parallel FG$.

Beh. $AC = CE = EG$.

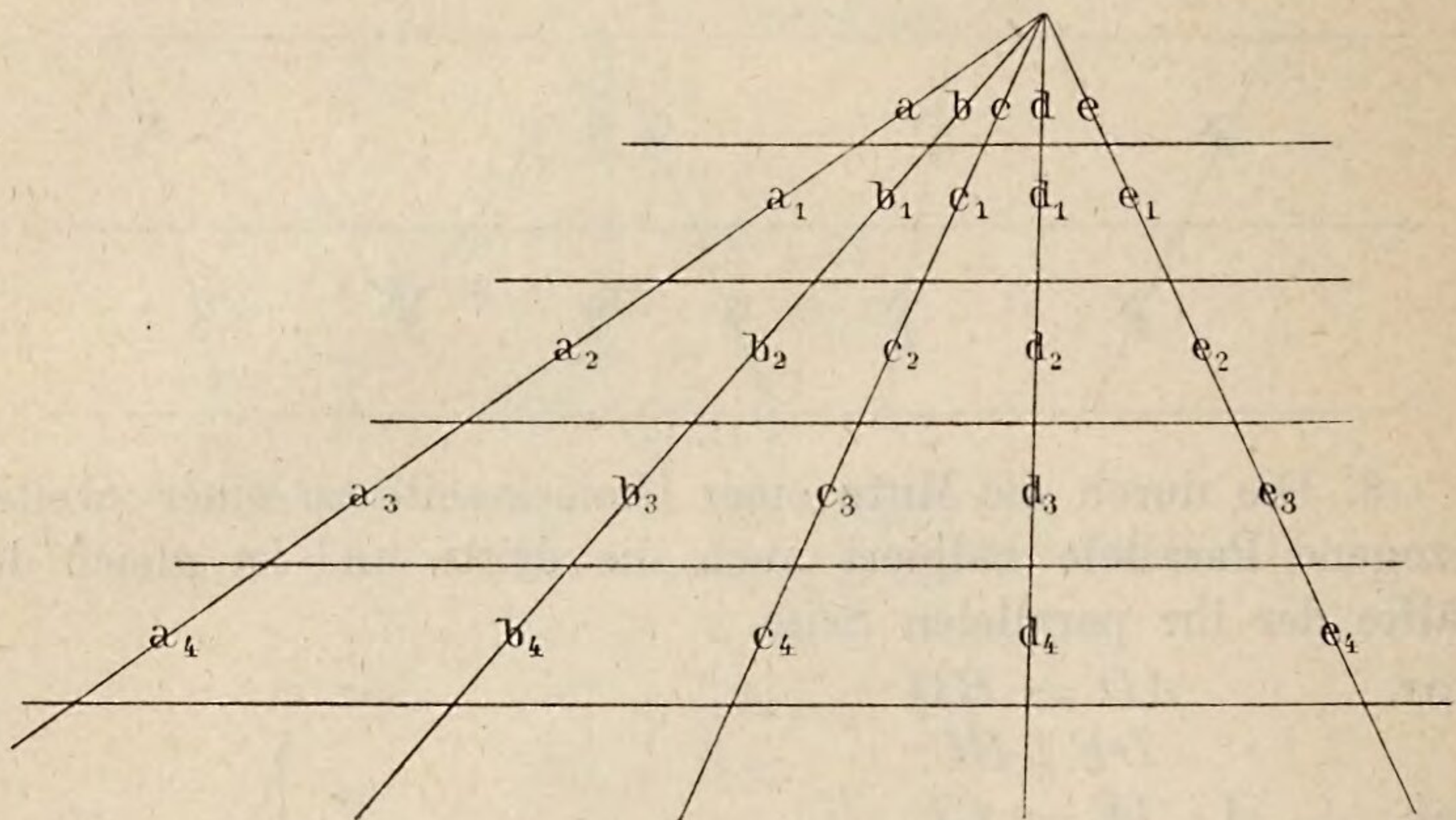


Bew. Im $\triangle ADE$ ist $AC = CE$ (Folgerung 3).

Im $\square BFGC$ ist $CE = EG$ (Mittellinie)

$AC = CE = EG$ (Gr. III). W. z. b. w.

Allgemein: $a = a_1 = a_2 = a_3 = a_4$
 $b = b_1 = b_2 = b_3 = b_4$ u. s. w.



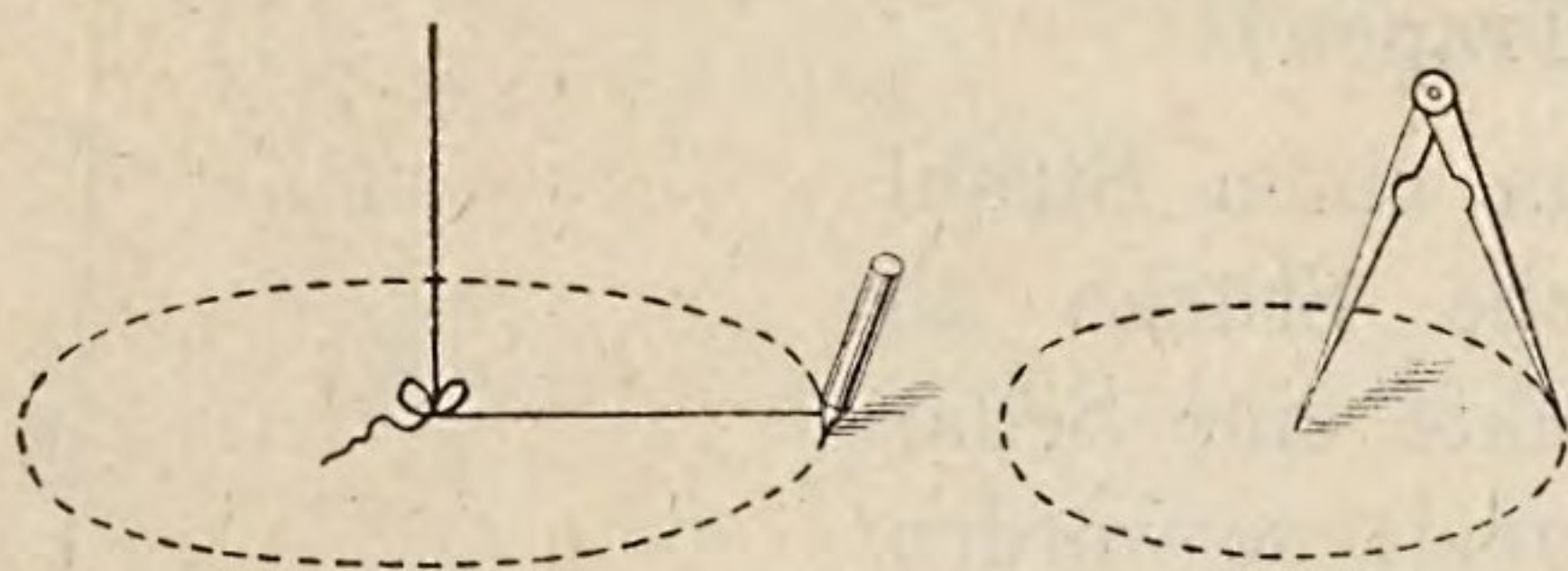
Anmerkung. Mit Hilfe dieses Lehrsatzes löst man die Aufgabe, eine Strecke in eine beliebige Anzahl gleicher Teile zu teilen.

V. Vom Kreise.

§ 40.

Erklärungen und Folgerungen. Ein Kreis ($\odot$) ist eine Figur, begrenzt von einer krummen Linie (der Kreislinie, Peripherie*), deren sämtliche Punkte von einem Punkte (dem Centrum**), Mittelpunk) gleichen Abstand haben.

Ein Kreis entsteht, wenn sich eine Strecke um den einen festgelegten Endpunkt so lange dreht, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt. (Hierauf beruht die Einrichtung des Zirkels.)



Der Abstand des Centrum von einem Punkte der Peripherie heisst

Radius***) (r) oder Halbmesser, z. B. CX .

*) Aus dem Griechischen; bedeutet „Umlauf, Umkreis“.

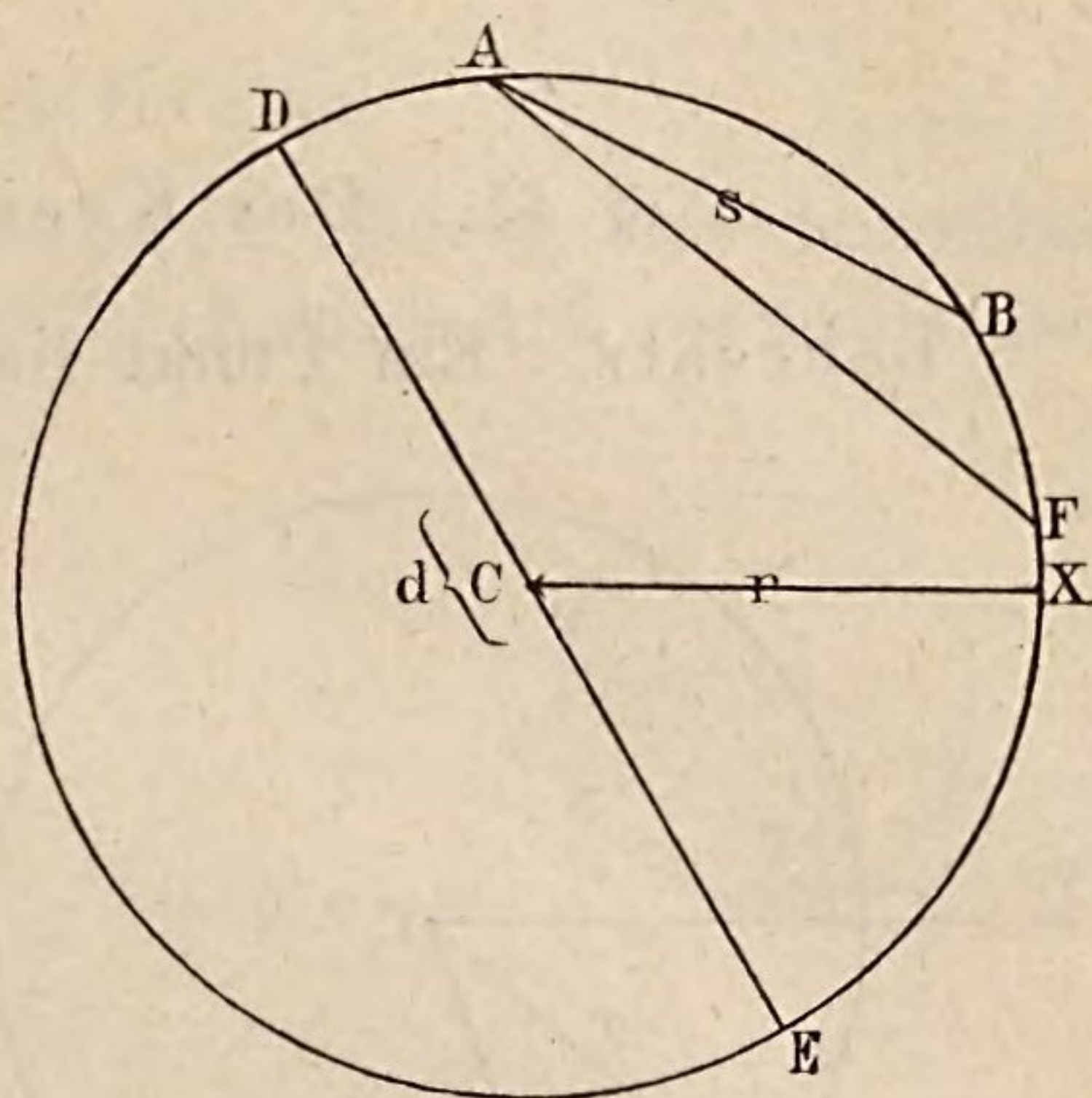
**) Aus dem Griechischen; bedeutet eigentlich „Stachel, Spitze“, dann „Mitte, Mittelpunkt“.

***) Aus dem Lateinischen; bedeutet „Strahl“.

Ein beliebiger Teil der Peripherie heisst Bogen, z. B. $\widehat{AB}$.
Eine Strecke, welche zwei Punkte der Peripherie verbindet, heisst Sehne (s), z. B. AB .

Eine Sehne, welche durch den Mittelpunkt geht, heisst Durchmesser oder Diameter*) (d). Der Durchmesser teilt den Kreis in zwei Halbkreise ($\bigcap$).

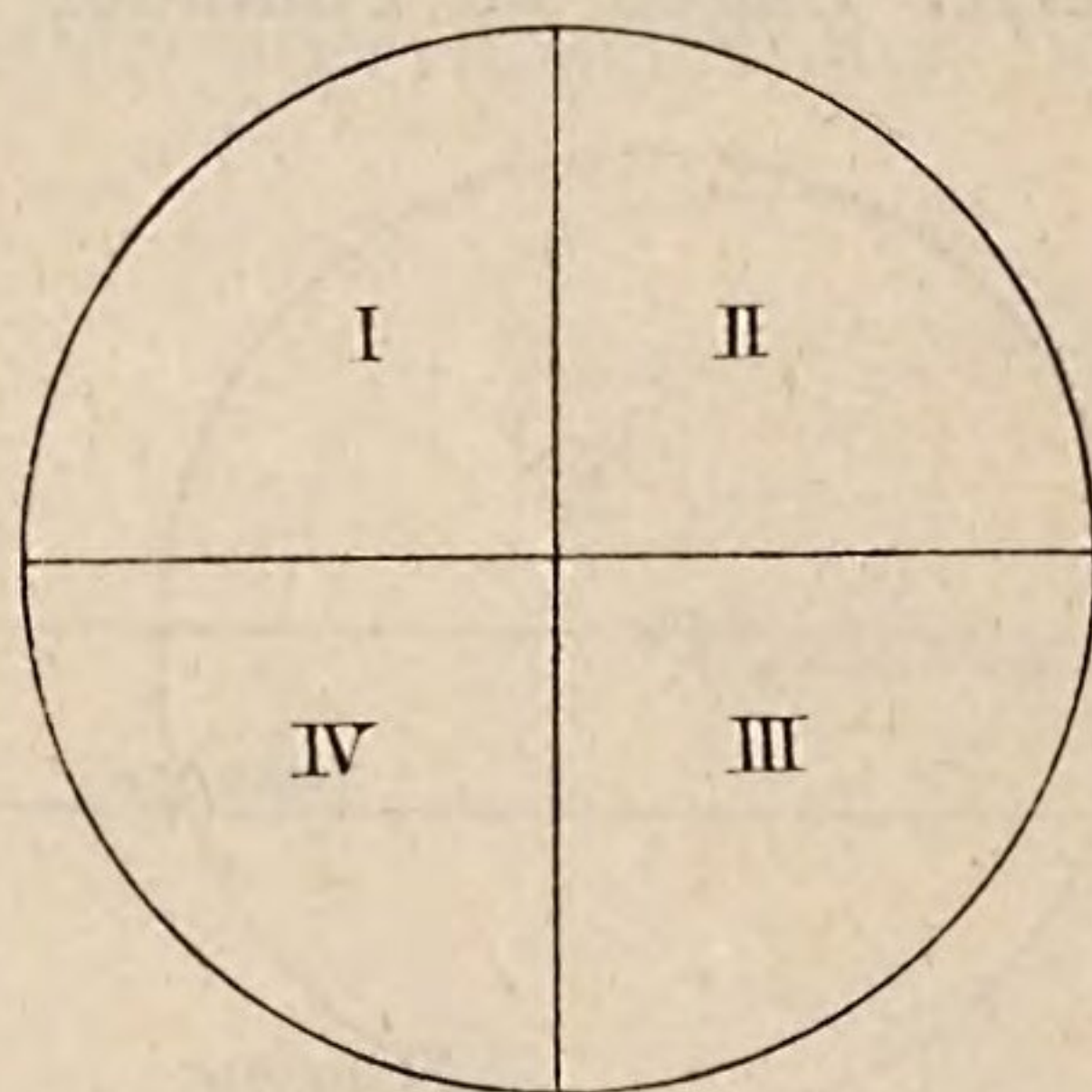
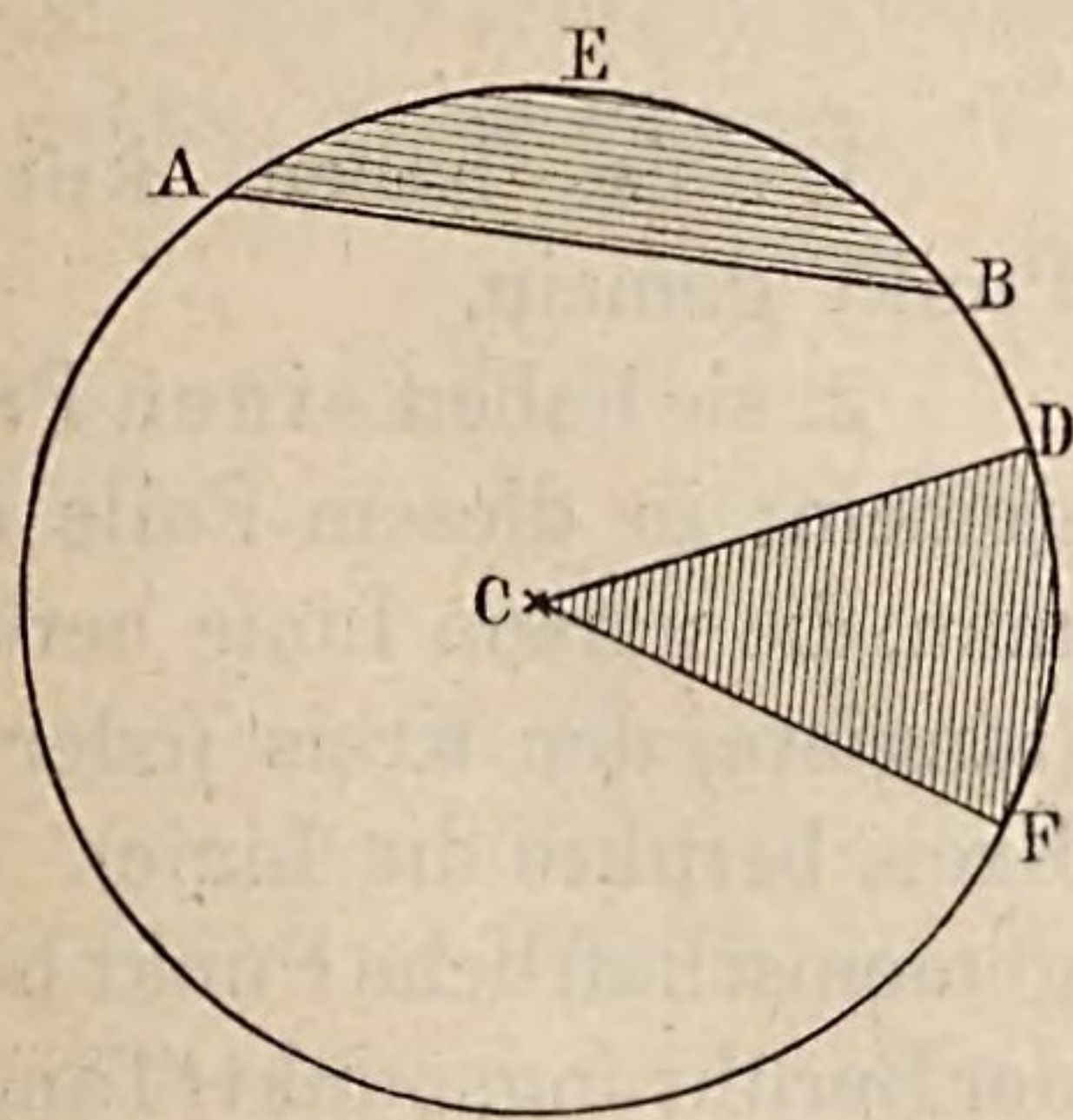
Der Durchmesser ist gleich dem doppelten Radius oder der Radius ist gleich der Hälfte des Durchmessers ($d = 2r$; $r = \frac{d}{2}$). Alle Radien des-



selben oder gleicher Kreise sind einander gleich, ebenso alle Durchmesser.

Ein Winkel, dessen Scheitel das Centrum ist und dessen Schenkel Radien sind, heisst Centriwinkel (C. $\sphericalangle$), z. B. $\sphericalangle ECX$.

Ein Winkel, dessen Scheitel auf der Peripherie liegt und dessen Schenkel Sehnen sind, heisst Peripheriewinkel (P. $\sphericalangle$), z. B. $\sphericalangle BAF$.



Die 4 Kreisquadranten.

Der Teil des Kreises, welcher von einer Sehne und dem zugehörigen Bogen begrenzt wird, heisst Kreisabschnitt oder Segment**), z. B. $\bigcap ABE$.

Der Teil des Kreises, welcher von zwei Radien und dem zugehörigen Bogen begrenzt wird, heisst Kreisausschnitt oder

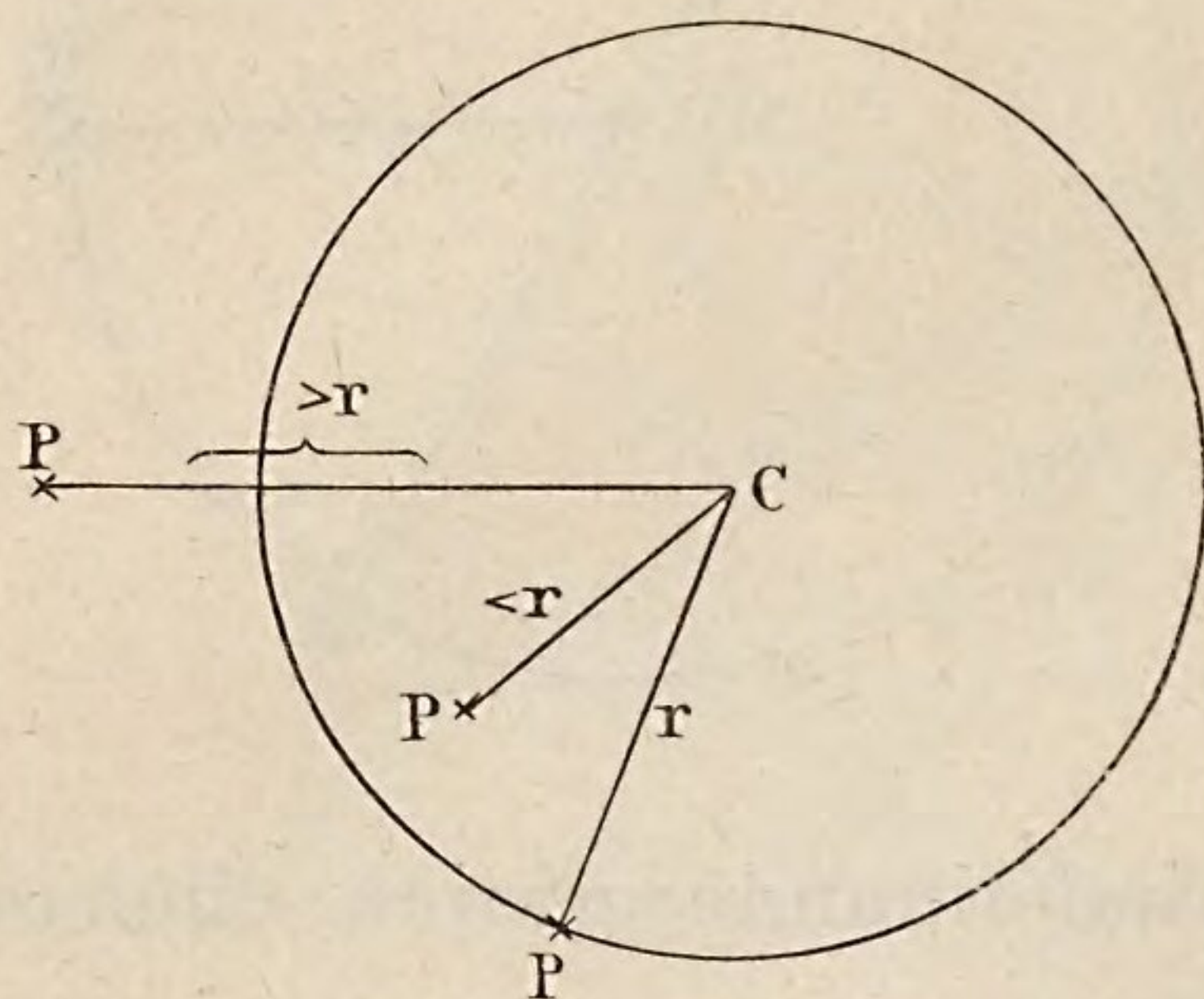
*) Aus dem Griechischen; bedeutet „Durchmesser“.

**) Aus dem Lateinischen; bedeutet „Abschnitt“.

Sektor*), z. B. $\triangle DCF$. Sind die zugehörigen Centriwinkel 90° , 60° oder 45° , so heissen die zugehörigen Kreisausschnitte Quadranten*), Sextanten*) oder Oktanten.*)

§ 41. Der Kreis und ein Punkt.

Lehrsatz. Ein Punkt liegt auf der Peripherie, innerhalb oder ausserhalb des Kreises, je nachdem sein Centralabstand (Abstand vom Mittelpunkt) ebenso gross, kleiner oder grösser als der Radius ist.

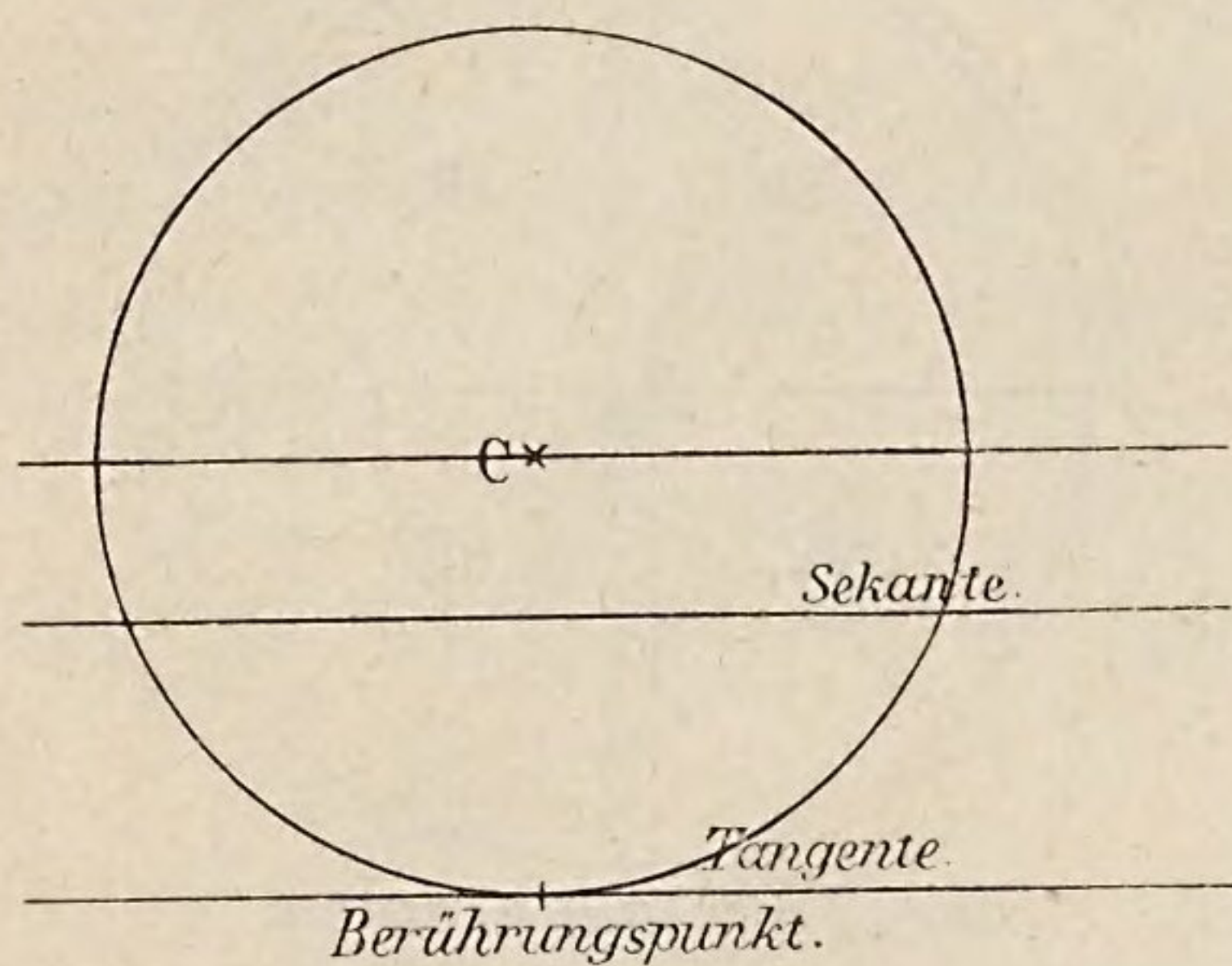


Umkehrung. Ist der Centralabstand eines Punktes ebenso gross, kleiner oder grösser als der Radius, so liegt der Punkt auf der Peripherie, innerhalb oder ausserhalb des Kreises.

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Erklärung und Gr. IV.

§ 42. Der Kreis und eine gerade Linie.

Erklärung. Ein Kreis und eine gerade Linie können dreierlei Lagen zu einander haben:



1. sie haben keinen Punkt gemein,

2. sie haben einen Punkt gemein; in diesem Falle sagt man, die gerade Linie berühre (tangiere) den Kreis (oder der Kreis berühre die Linie). Der gemeinschaftliche Punkt heisst der Berührungspunkt (Tangentialpunkt) und die Linie Berührungslinie oder Tangente. Eine Tangente**) ist also

eine gerade Linie, welche mit einem Kreise nur einen Punkt gemein hat.

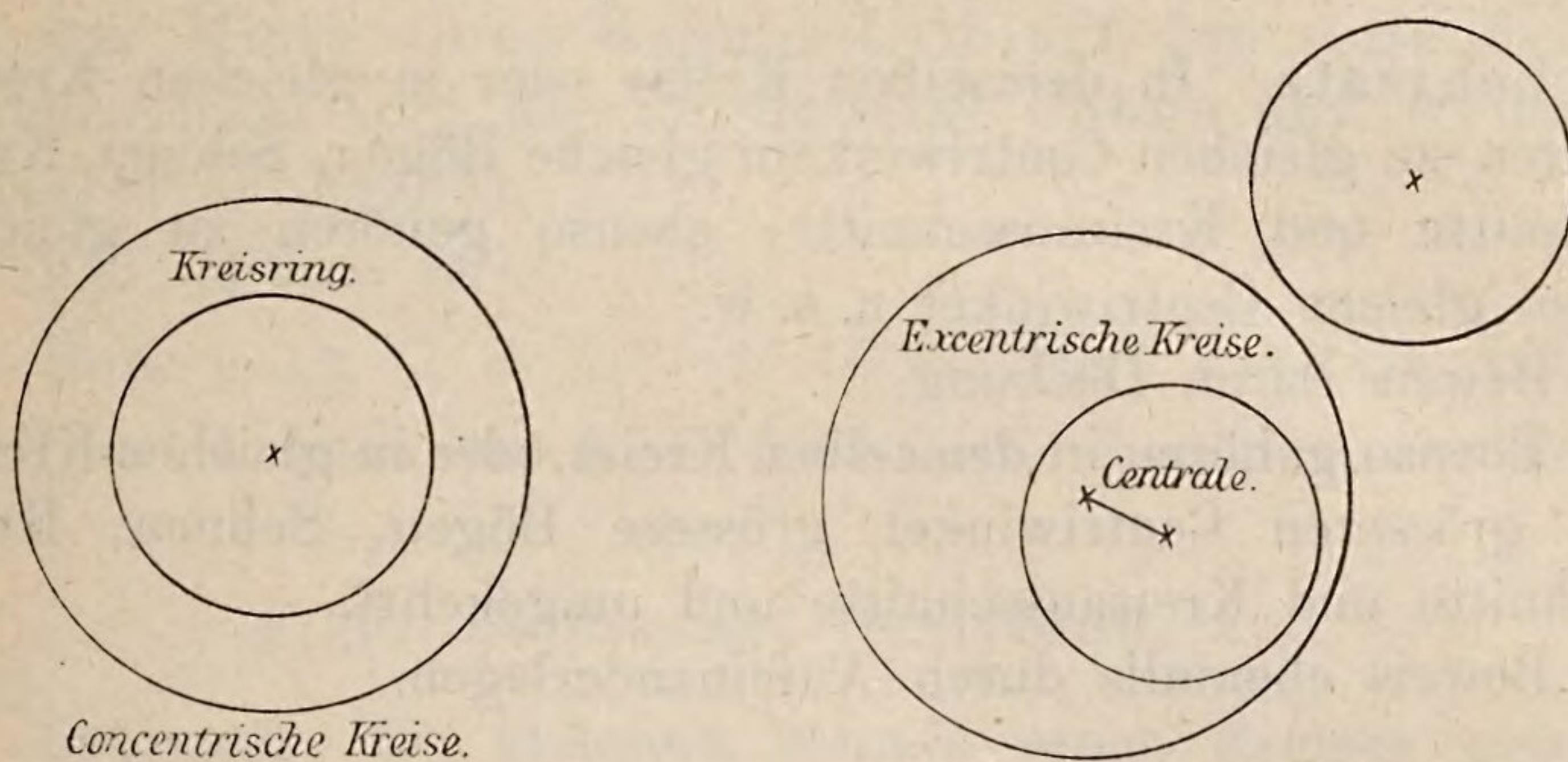
*) Aus dem Lateinischen; bedeutet „Ausschnitt“, bez. „Viertelkreis, Sechstelkreis, Achtelkreis“.

**) Aus dem Lateinischen; bedeutet „Berührende“.

3. Sie haben zwei Punkte gemein; die gerade Linie schneidet dann den Kreis und heisst Sekante.*) (Eine Sekante kann man auch als verlängerte Sehne auffassen.)

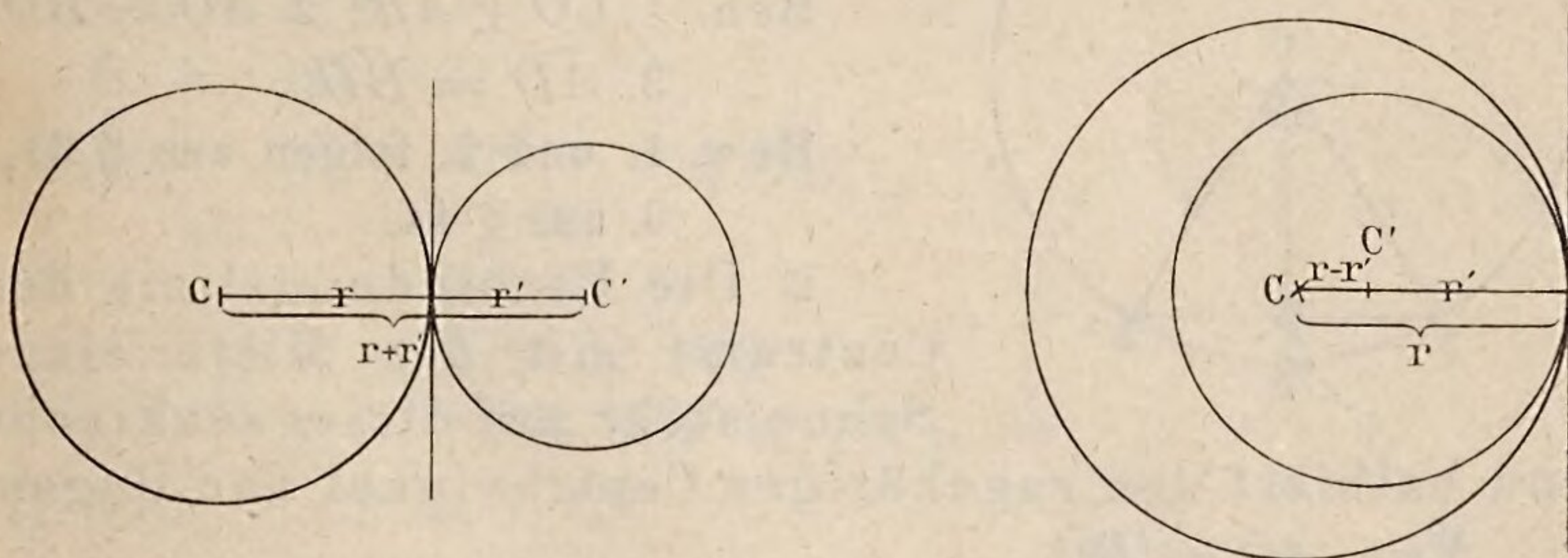
§ 43. Zwei Kreise.

Erklärungen und Folgerungen. Kreise mit demselben Centrum heissen concentrisch**), Kreise mit verschiedenen Centren excentrisch.**)



Die von den Peripherien zweier concentrischer Kreise begrenzte Figur heisst Kreisring.

Bei zwei excentrischen Kreisen unterscheiden wir dreierlei Lagen, je nachdem sie keinen, einen oder zwei Punkte gemeinsam haben. Die Verbindungsstrecke der Centren heisst die Centrale. Im ersten Falle können sie ineinander oder auseinander liegen.



Haben zwei Kreise nur einen Punkt gemeinsam, so sagt man, sie berühren sich. Der gemeinsame Punkt heisst dann der Berührungspunkt und die durch diesen Punkt gezogene Tangente die gemeinsame Tangente. Man unterscheidet äussere und innere Berührung.

*) Aus dem Lateinischen; bedeutet „Schneidende“.

**) Aus dem Lateinischen; bedeutet „einmässig“, bez. „verschiedenmässig“.

Zwei Kreise berühren sich von aussen, wenn die Centrale gleich der Summe der Radien, und von innen, wenn die Centrale gleich der Differenz der Radien ist.

Umgekehrt: Ist die Centrale zweier Kreise gleich der Summe oder der Differenz der Radien, so berühren sich die Kreise von aussen oder von innen.

§ 44.

Lehrsatz. In demselben Kreise oder in gleichen Kreisen gehören zu gleichen Centriwinkeln gleiche Bögen, Sehnen, Kreisabschnitte und Kreisausschnitte; ebenso gehören zu gleichen Bögen gleiche Centriwinkel u. s. w.

Beweis durch Deckung.

Ebenso gehören in demselben Kreise oder in gleichen Kreisen zum grösseren Centriwinkel grössere Bögen, Sehnen, Kreisabschnitte und Kreisausschnitte und umgekehrt.

Beweis ebenfalls durch Aufeinanderlegen.

§ 45.

Lehrsätze. 1. Die Halbierungslinie des Centriwinkels steht auf der zugehörigen Sehne senkrecht, halbiert sie und den zugehörigen Bogen.

Vor. $\sphericalangle C_1 = C_2$.

Beh. 1. $CO \perp AB$; 2. $AO = BO$;
3. $\widehat{AD} = \widehat{BD}$.

Bew. 1. und 2. folgen aus § 31₁,
3. aus § 44.

2. Die Verbindungslinie des Centrums mit der Mitte einer Sehne steht auf dieser senkrecht und halbiert den zugehörigen Centriwinkel und Bogen.

Vor. $AO = BO$.

Beh. 1. $CO \perp AB$; 2. $\sphericalangle C_1 = C_2$; 3. $\widehat{AD} = \widehat{BD}$.

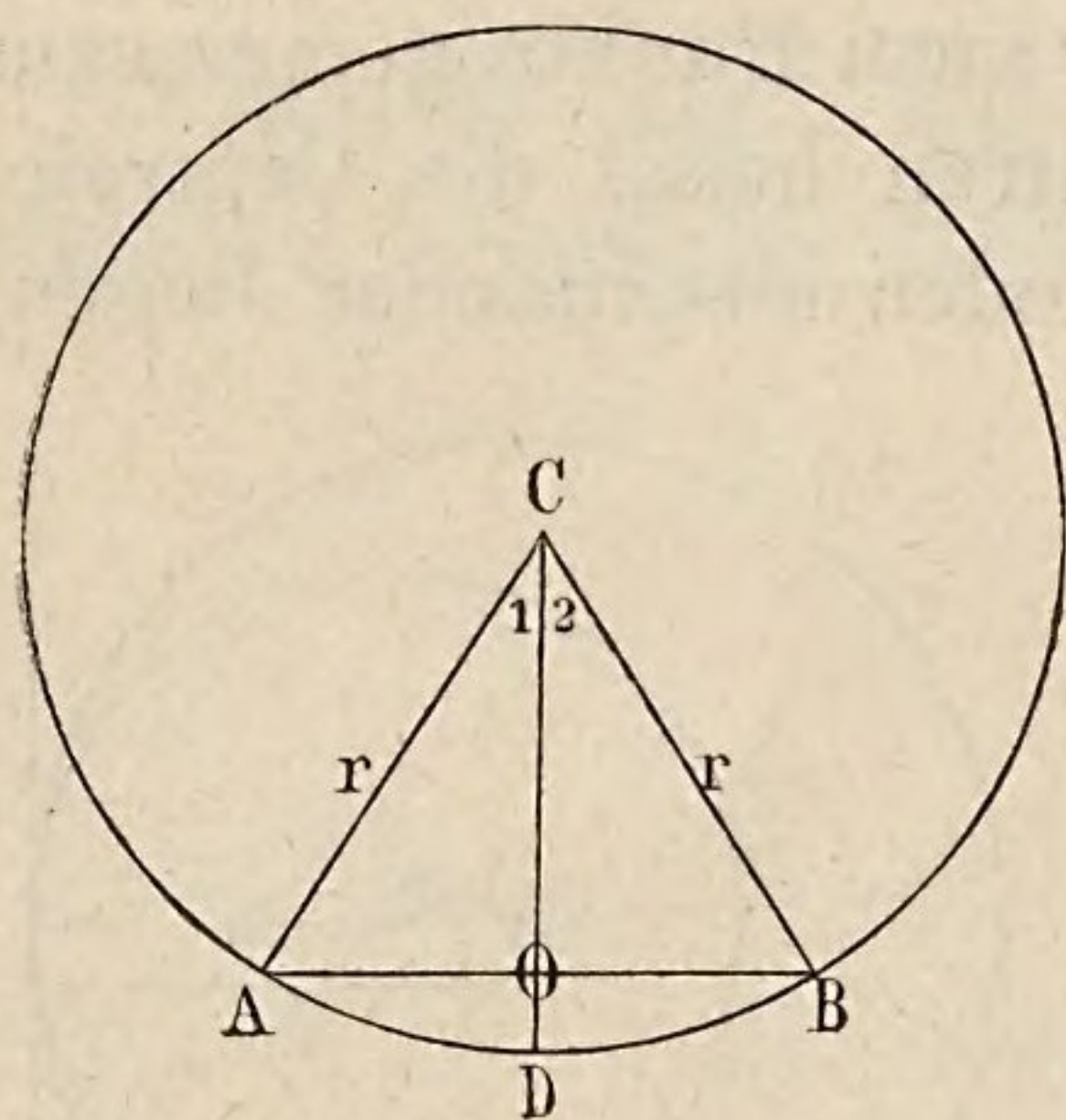
Bew. 1. und 2. folgen aus § 31₂, 3. aus § 44.

3. Die Senkrechte vom Centrum auf eine Sehne gefällt halbiert diese, den zugehörigen Centriwinkel und Bogen.

Vor. $CO \perp AB$.

Beh. 1. $AO = BO$; 2. $\sphericalangle C_1 = C_2$; 3. $\widehat{AD} = \widehat{BD}$.

Bew. 1. und 2. folgen aus § 31₃, 3. aus § 44.



4. Das Mittellot einer Sehne geht durch das Centrum und halbiert den zugehörigen Centriwinkel und Bogen.

Vor. $AO = BO$.

Beh. 1. Das Mittellot von AB geht durch C ;

2. $\sphericalangle C_1 = C_2$; 3. $\widehat{AD} = \widehat{DB}$.

Bew. 1. und 2. folgen aus § 31₄, 3. aus § 44.

5. Die Verbindungslinie des Centrums eines Kreises mit der Mitte eines Bogens halbiert den zugehörigen Centriwinkel und die zugehörige Sehne und steht auf letzterer senkrecht.

Vor. $\widehat{AD} = \widehat{BD}$.

Beh. 1. $\sphericalangle C_1 = C_2$; 2. $AO = BO$; 3. $CD \perp AB$.

Bew. 1. folgt aus § 44; dann folgen 2. und 3. aus Teil 1.

§ 46. Sehne und Centralabstand.

Lehrsatz. Zu gleichen Sehnen eines Kreises gehören gleiche Centralabstände, zu gleichen Centralabständen gleiche Sehnen, zur grösseren Sehne der kleinere Centralabstand (zur kleineren Sehne der grössere Centralabstand) und zum kleineren Centralabstand die grössere Sehne (zum grösseren Centralabstand die kleinere Sehne).

I. Vor. $AB = AD$; $CE \perp AB$; $CF \perp AD$.

Beh. $CE = CF$.

H. K. AC .

Bew. $AE = AF$ (V. u. § 45₃)

$\sphericalangle E_1 = F_1$ (R)

$AC = AC$ (Gr. I)

$\triangle ACE \cong \triangle ACF$ (K. IV)

$CE = CF$ (h. St.). W. z. b. w.

II. Vor. $\perp CE = \perp CF$.

Beh. $AB = AD$.

H. K. AC .

Bew. $\triangle ACE \cong \triangle ACF$ (K. IV)

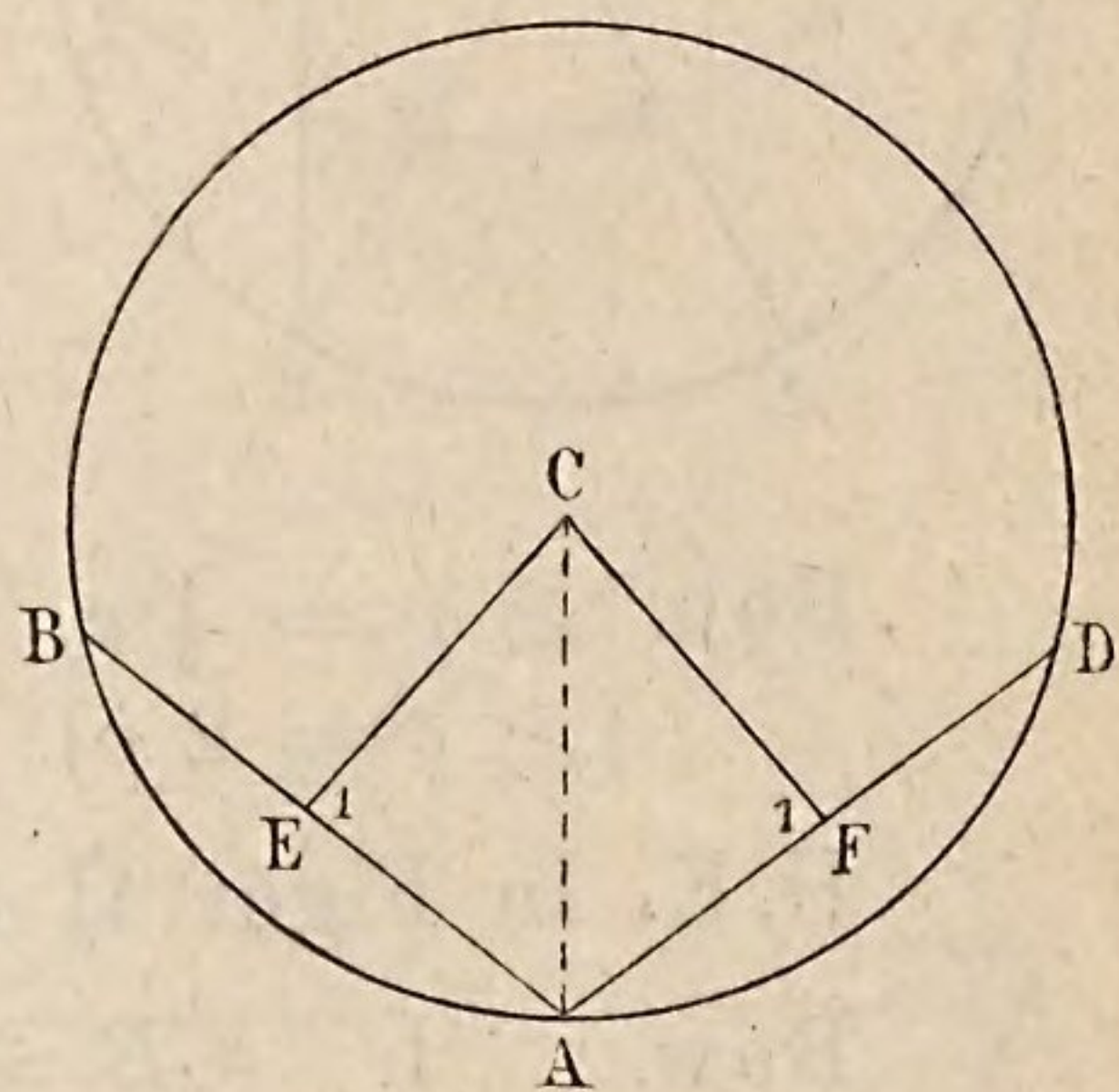
$AE = AF$ (h. St.)

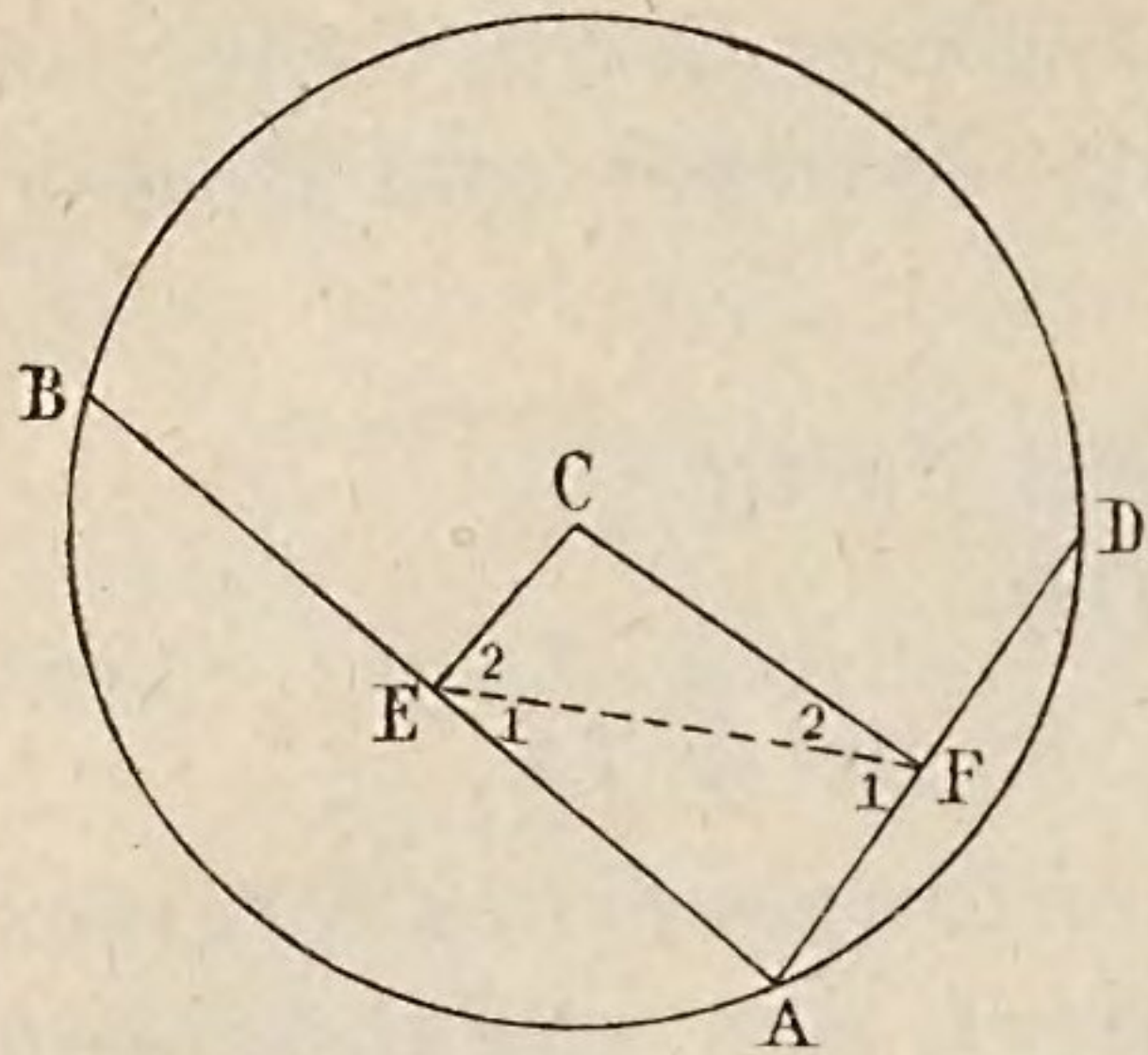
$AB = AD$ (Gr. V₃ u. § 45_g). W. z. b. w.

III. Vor. $AB > AD$; $CE \perp AB$; $CF \perp AD$.

Beh. $CE < CF$.

H. K. EF .





Bew. $\overline{AE} > \overline{AF}$ (Gr. VI₄ u. § 45₃)

$\nrightarrow F_1 > E_1$ (§ 26₃)

$\nrightarrow F_1 + F_2 = E_1 + E_2$ (R)

$\nrightarrow F_2 < E_2$ (Gr. VII₁)

$\overline{CE} < \overline{CF}$ (§ 26₄). W. z. b. w.

IV. Vor. $\perp CE < \perp CF$.

Beh. $\overline{AB} > \overline{AD}$.

H. K. $\overline{EF}$.

Bew. $\nrightarrow F_2 < E_2$ (§ 26₃)

$\nrightarrow F_1 + F_2 = E_1 + E_2$ (R)

$\nrightarrow F_1 > E_1$ (Gr. VII₁)

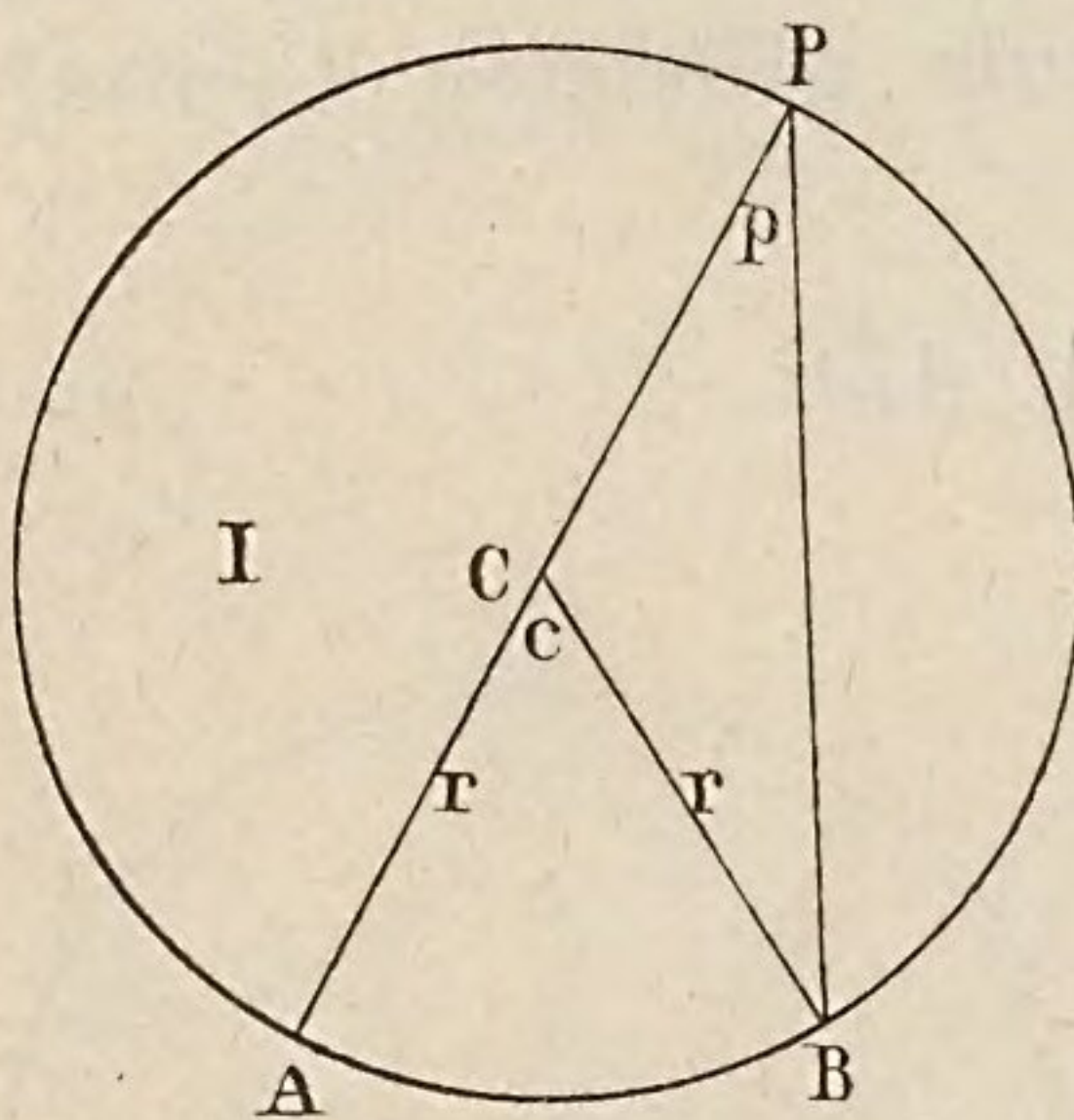
$\overline{AE} > \overline{AF}$ (§ 26₄)

$\overline{AB} > \overline{AD}$ (Gr. VI₃ u. § 45₃).

W. z. b. w.

Die Sehnen sind in den Figuren der Einfachheit wegen aneinandergelegt, da man sie, wenn sie auseinanderliegen, in einer H. K. leicht aneinanderlegen kann.

§ 47. Vom Peripheriewinkel.



1. Lehrsatz. Der Peripheriewinkel ist gleich der Hälfte des Centriwinkels über demselben Bogen (Oder: Der Centriwinkel ist gleich dem doppelten Peripheriewinkel über demselben Bogen.)

Es sind drei Lagen möglich, siehe Figur I, II, III.

Vor. $\nrightarrow p$ ist P . $\nrightarrow$ $\left. \begin{array}{l} \nrightarrow c \text{ ist } C. \end{array} \right\}$ über $\widehat{AB}$.

Beh. $\nrightarrow p = \frac{1}{2} c$
($\nrightarrow c = 2 p$).

H. K. In Figur II und III ziehe man PCD .

Bew. I. $\overline{CB} = \overline{CP}$ (r)

$\nrightarrow p = \frac{1}{2} c$ (§ 26, Folg. 6). W. z. b. w.

II. $\left. \begin{array}{l} \overline{CA} = \overline{CP} \\ \overline{CB} = \overline{CP} \end{array} \right\} (r)$

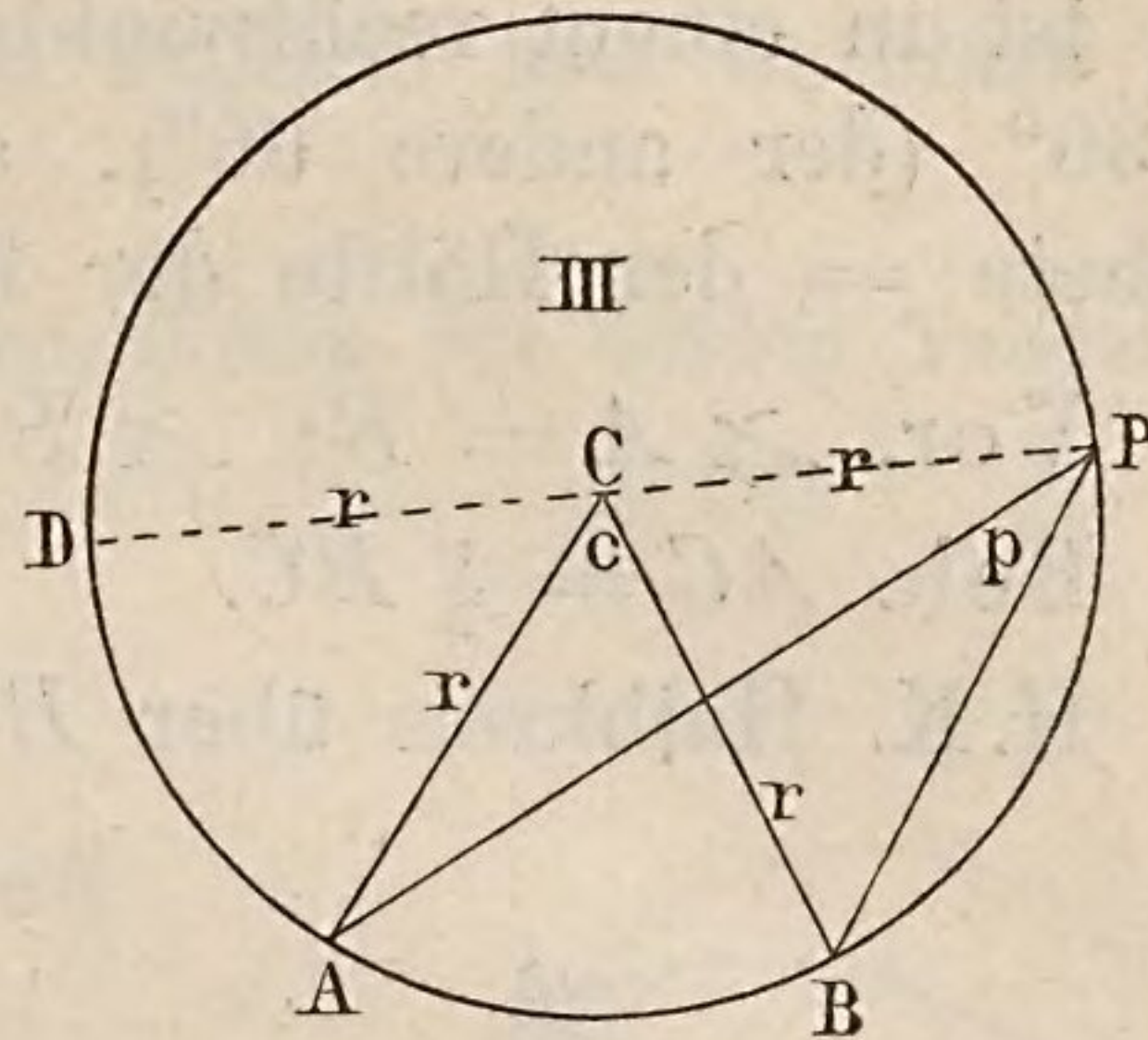
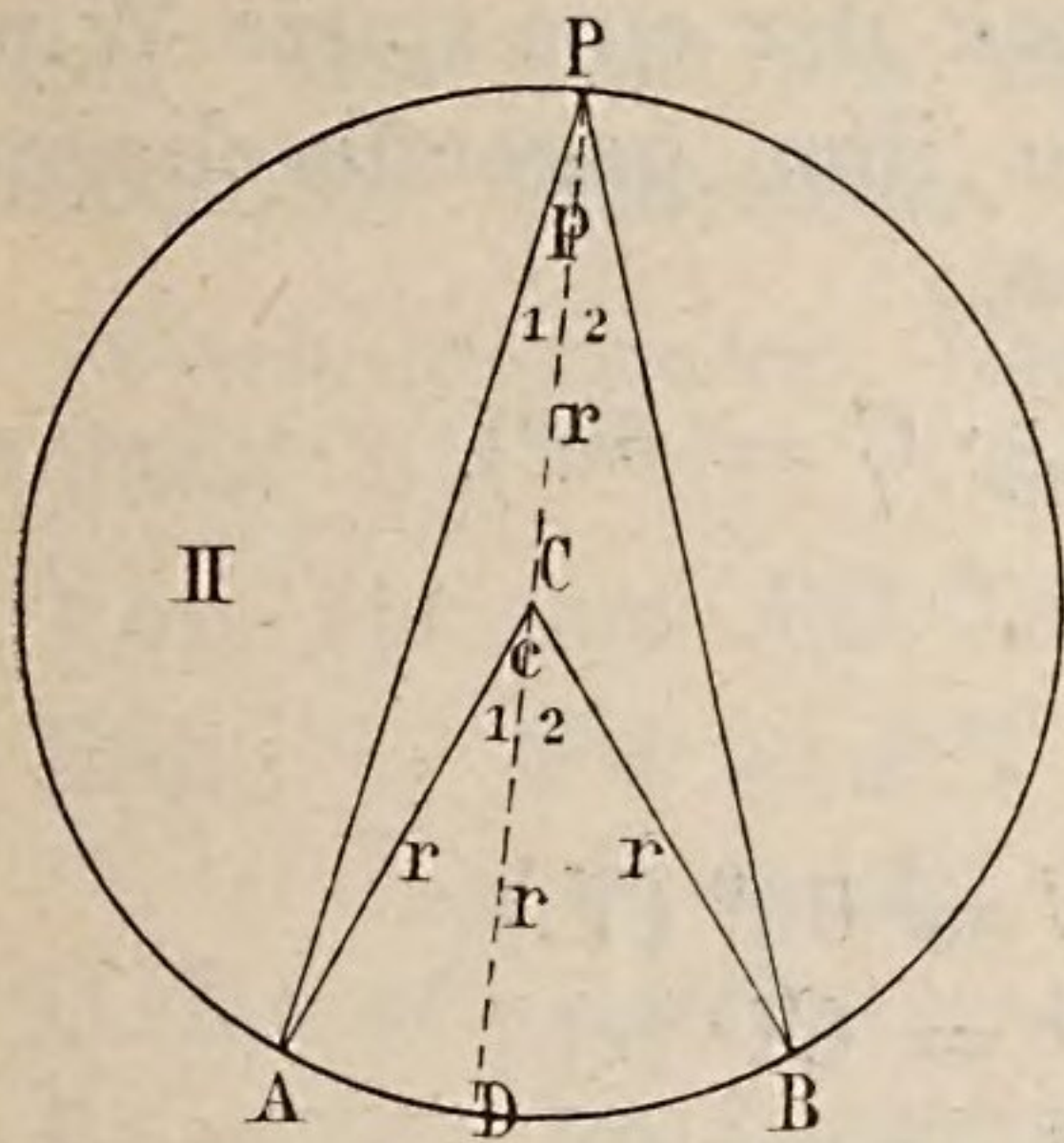
$\nrightarrow P_1 = \frac{1}{2} C_1$ $\left. \begin{array}{l} \nrightarrow P_2 = \frac{1}{2} C_2 \end{array} \right\} (\S 26, \text{Folg. } 6)$

$\nrightarrow p = \frac{1}{2} C$ (Gr. V₁). W. z. b. w.

$$\text{III. } \left. \begin{array}{l} CB = CP \\ CA = CP \end{array} \right\} (r)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sphericalangle DPB = \frac{1}{2} DCB \\ \sphericalangle DPA = \frac{1}{2} DCA \end{array} \right\} (\S 26, \text{Folg. 6})$$

$$\sphericalangle p = \frac{1}{2} c \text{ (Gr. V}_2\text{). W. z. b. w.}$$



2. Lehrsatz. Peripheriewinkel über demselben (oder gleichen) Bogen sind gleich.

Vor. $\sphericalangle p, p_1, p_2 \dots$ sind $\sphericalangle P$ über $\widehat{AB}$.

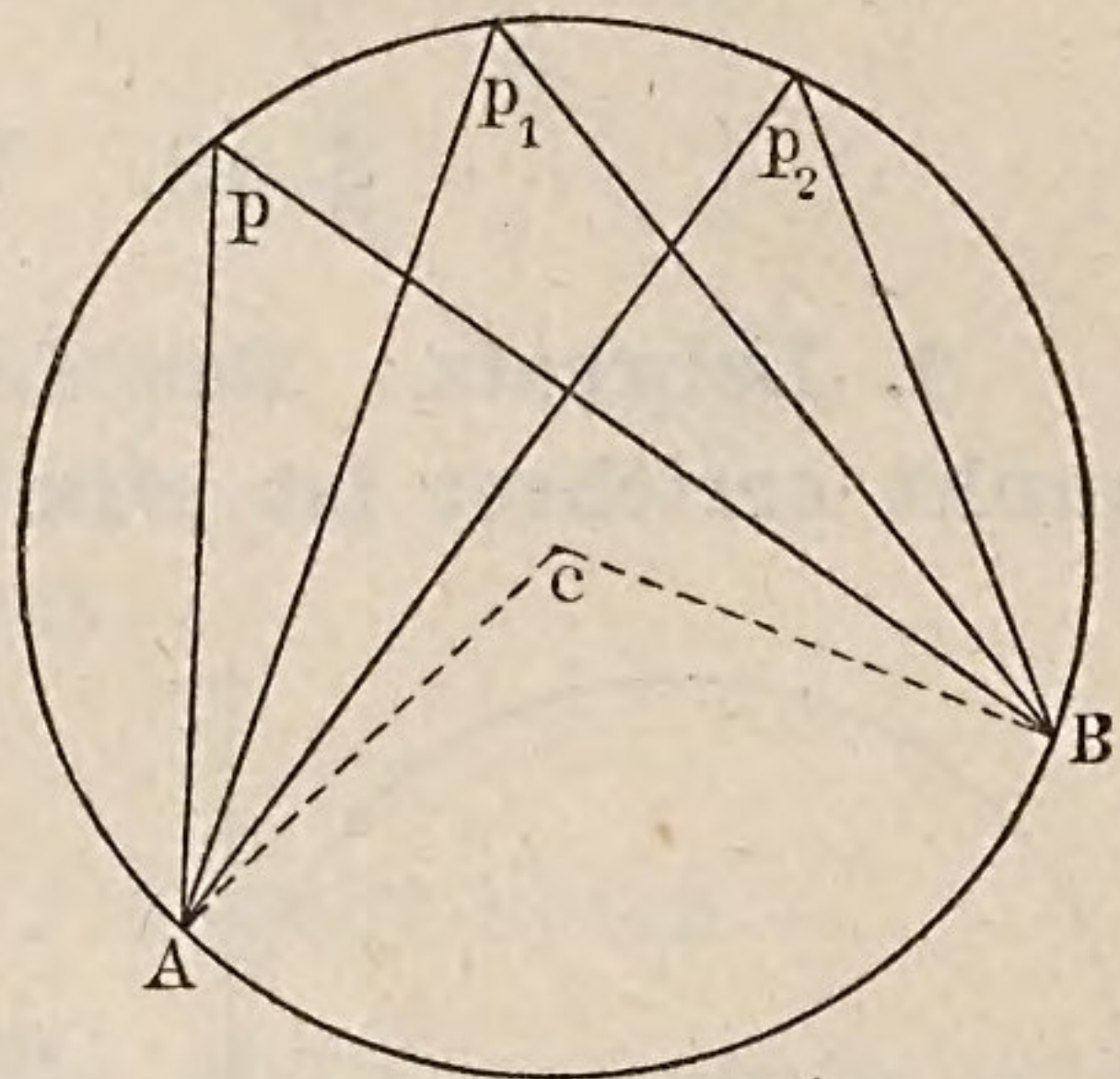
Beh. $\sphericalangle p = p_1 = p_2 \dots$

H. K. Ich zeichne den zugehörigen Centriwinkel.

$$\text{Bew. } \left. \begin{array}{l} \sphericalangle p = \frac{1}{2} c \\ \sphericalangle p_1 = \frac{1}{2} c \\ \sphericalangle p_2 = \frac{1}{2} c \\ \vdots \end{array} \right\} (\text{Lehrsatz 1})$$

$$\sphericalangle p = p_1 = p_2 \dots (\text{Gr. III}).$$

W. z. b. w.



3. Lehrsatz des Thales.*)
Der Winkel über dem Halbkreise ist ein Rechter.

Vor. $\sphericalangle P$ ist $\sphericalangle P$ über dem $\cap$.

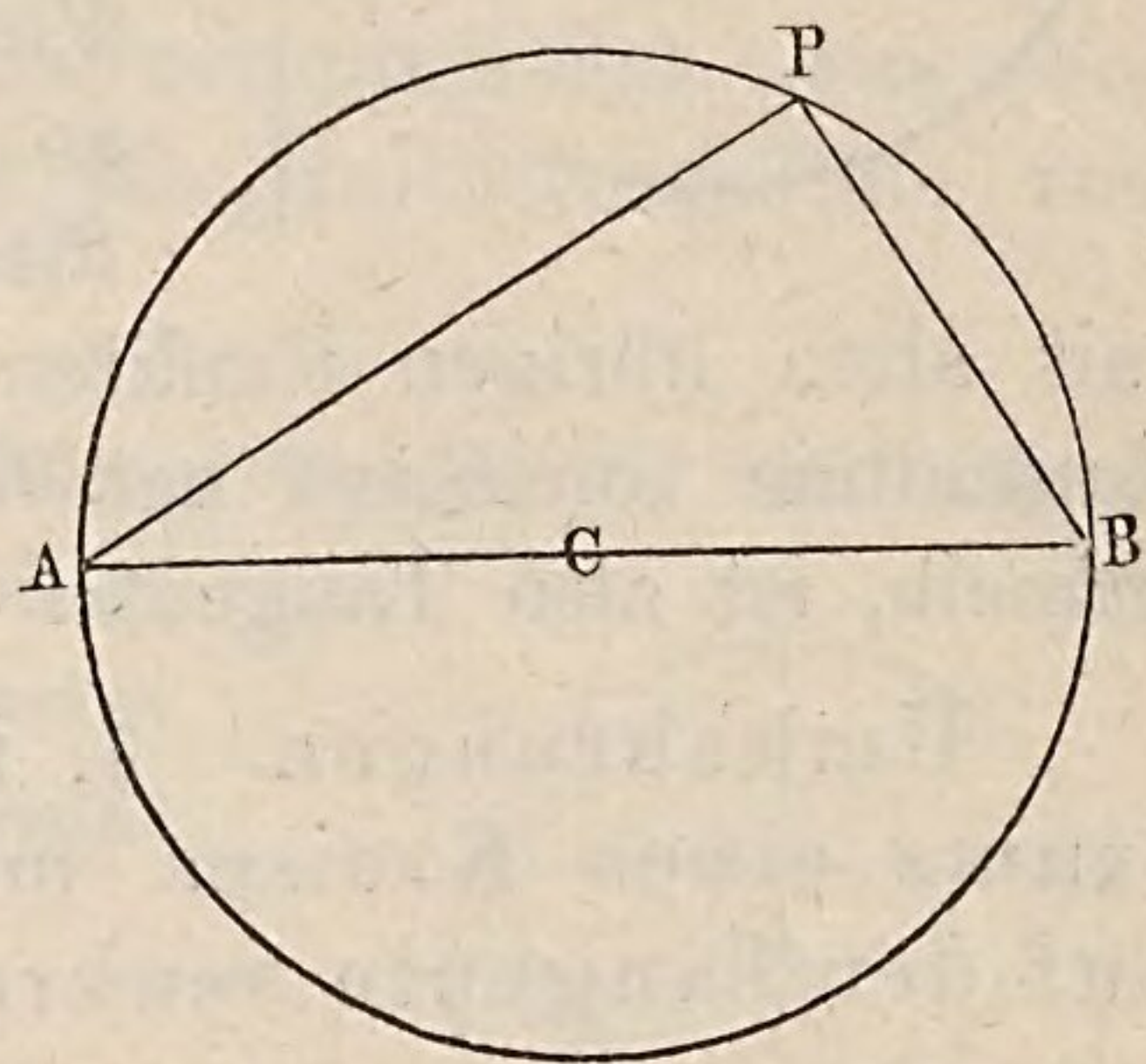
Beh. $\sphericalangle P = R$.

Bew. $\sphericalangle P = \frac{1}{2} ACB$ (Lehrsatz 1)

$$\sphericalangle ACB = 2 R (\cap)$$

$$\sphericalangle P = \frac{1}{2} \cdot 2 R (\text{Gr. II}) = R.$$

W. z. b. w.



*) Thales, geb. 640 v. Chr. zu Milet, war der älteste uns bekannte griechische Mathematiker.

4. Umkehrung des Lehrsatzes des Thales. Der über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks beschriebene Halbkreis geht durch den Scheitel des rechten Winkels. (Beweis indirekt.)

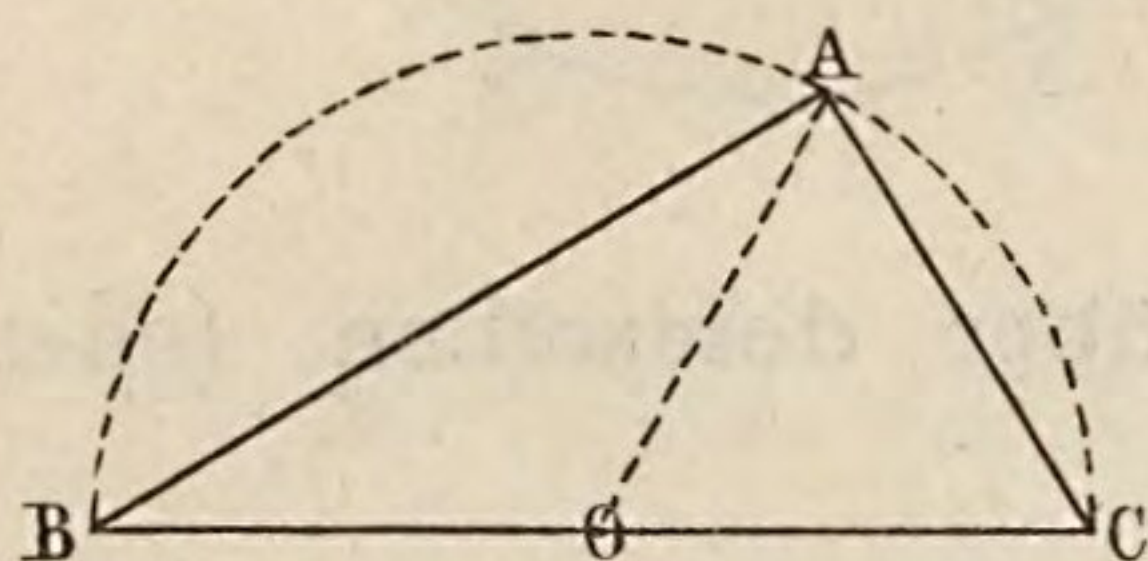
Hierauf beruht der Lehrsatz:

Ist in einem rechtwinkligen Dreieck der eine spitze Winkel $= 30^\circ$ (der andere 60°), so ist die ihm gegenüberliegende Kathete $=$ der Hälfte der Hypotenuse.

Vor. $\sphericalangle A = R$; $\sphericalangle B = 30^\circ$ ($\sphericalangle C = 60^\circ$).

Beh. $AC = \frac{1}{2} BC$.

H. K. Halbkreis über BC ; AO .



Bew. $\sphericalangle C = 60^\circ$ (V.)

$AO = CO$ (r)

$\sphericalangle OAC = 60^\circ$ (B. $\sphericalangle$)

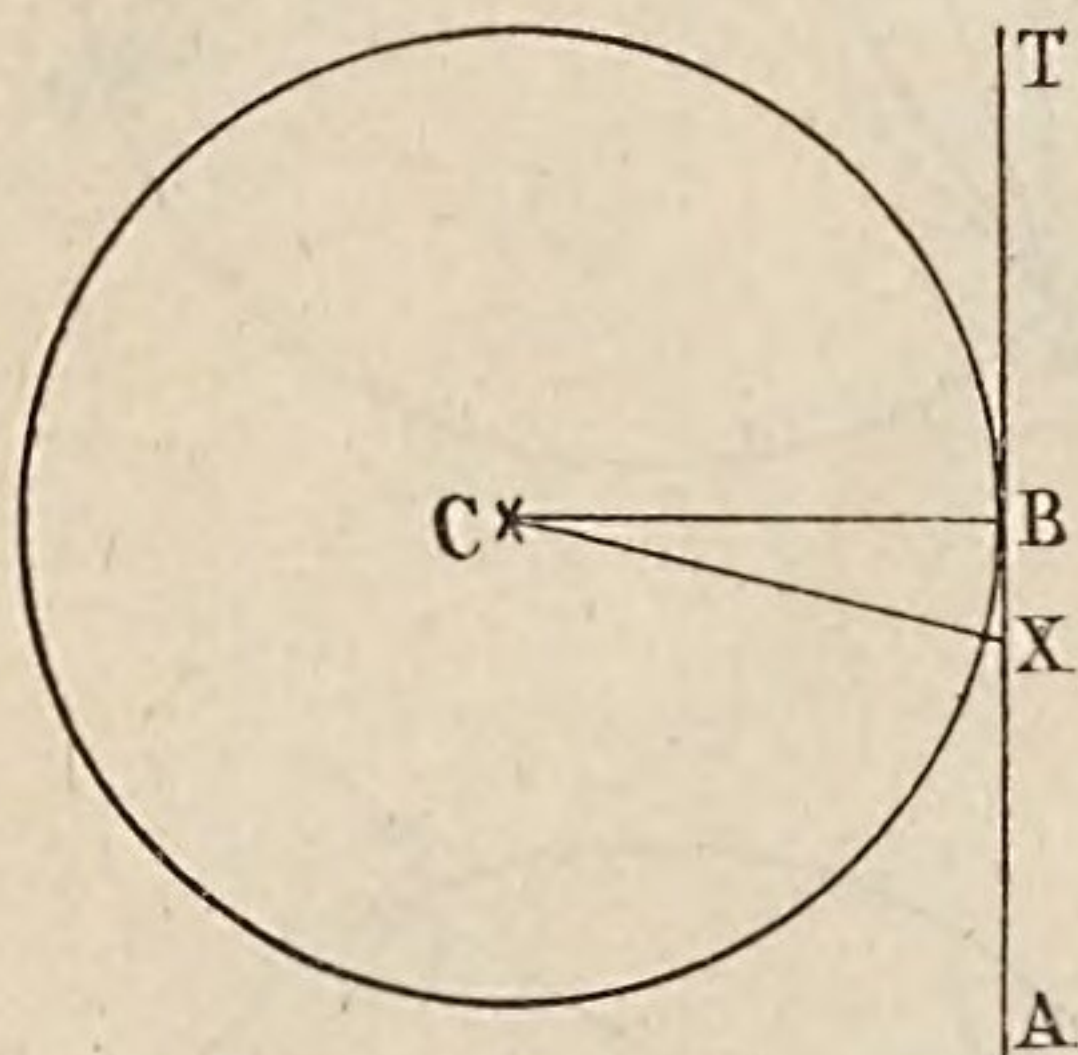
$AOC \triangle (\S 26, \text{Folg. } 2)$

$AC = CO = \frac{1}{2} BC$ (H. K.)

W. z. b. w.

§ 48. Von der Tangente.

1. Lehrsatz. Das Lot auf dem Radius in seinem Endpunkt errichtet ist eine Tangente des Kreises.



Vor. $TA \perp CB$.

Beh. TA Tangente.

Bew. TA hat mit der Peripherie den Punkt B gemein n. V. TA hat aber auch nur diesen einen Punkt mit dem Kreise gemein; denn hätte TA noch einen Punkt mit demselben gemein, z. B. X , so müsste $CX = CB$ sein als Radius; dies widerspricht aber dem § 30. Da es mit allen übrigen Punkten von TA ebenso gehen würde, mit Ausnahme von B , so hat TA nur einen Punkt mit dem Kreise gemein, ist also Tangente. W. z. b. w.

Umkehrungen. 1. Die Verbindungslinie des Centrum eines Kreises mit dem Berührungspunkt steht auf der Tangente senkrecht. (Leicht indirekt zu beweisen.)

2. Das Lot vom Centrum eines Kreises auf die Tangente gefällt geht durch den Berührungspunkt. (Leicht indirekt zu beweisen.)

3. Das im Berührungspunkt auf einer Tangente errichtete Lot geht durch das Centrum des Kreises. (Leicht indirekt zu beweisen.)

2. **Lehrsatz.** Die beiden von einem Punkte ausserhalb eines Kreises an ihn gezogenen Tangenten sind einander gleich. Die Centrale von diesem Punkte aus halbiert den Winkel der Tangenten.

Vorbemerkung. Über die Konstruktion der beiden Tangenten s. Anhang A.

Vor. PA und PB Tangenten.

Beh. $PA = PB$

$\sphericalangle P_1 = P_2$.

H. K. AC ; BC .

Bew. $PC = PC$ (Gr. I)

$\sphericalangle PAC = PBC$ (R n. d. Lehrs. d. Thales.)

$AC = BC$ (r)

$\triangle PAC \cong PBC$ (K. IV)

$PA = PB$

$\sphericalangle P_1 = P_2$

} (h. St.).

W. z. b. w.

Umkehrung. Die Halbierungslinie des von zwei Tangenten gebildeten Winkels geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Vor. PA und PB Tangenten.

Beh. Die Halbierungslinie von $\sphericalangle P$ geht durch C .

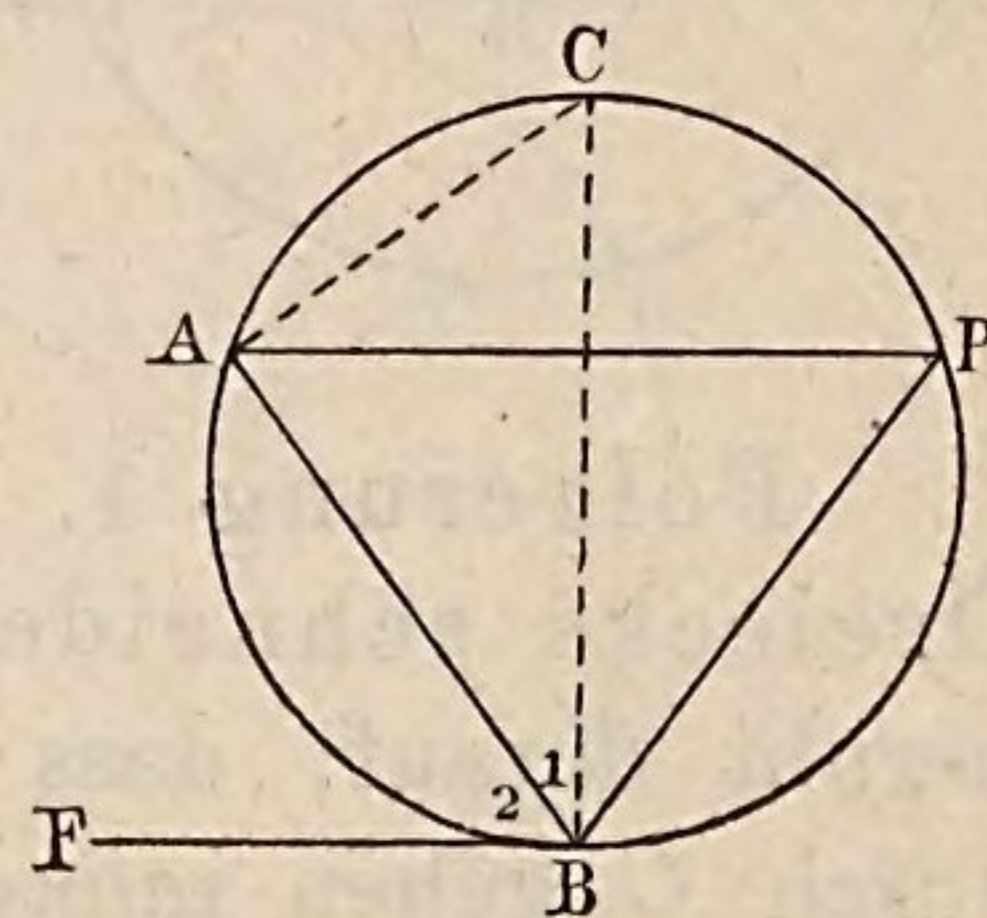
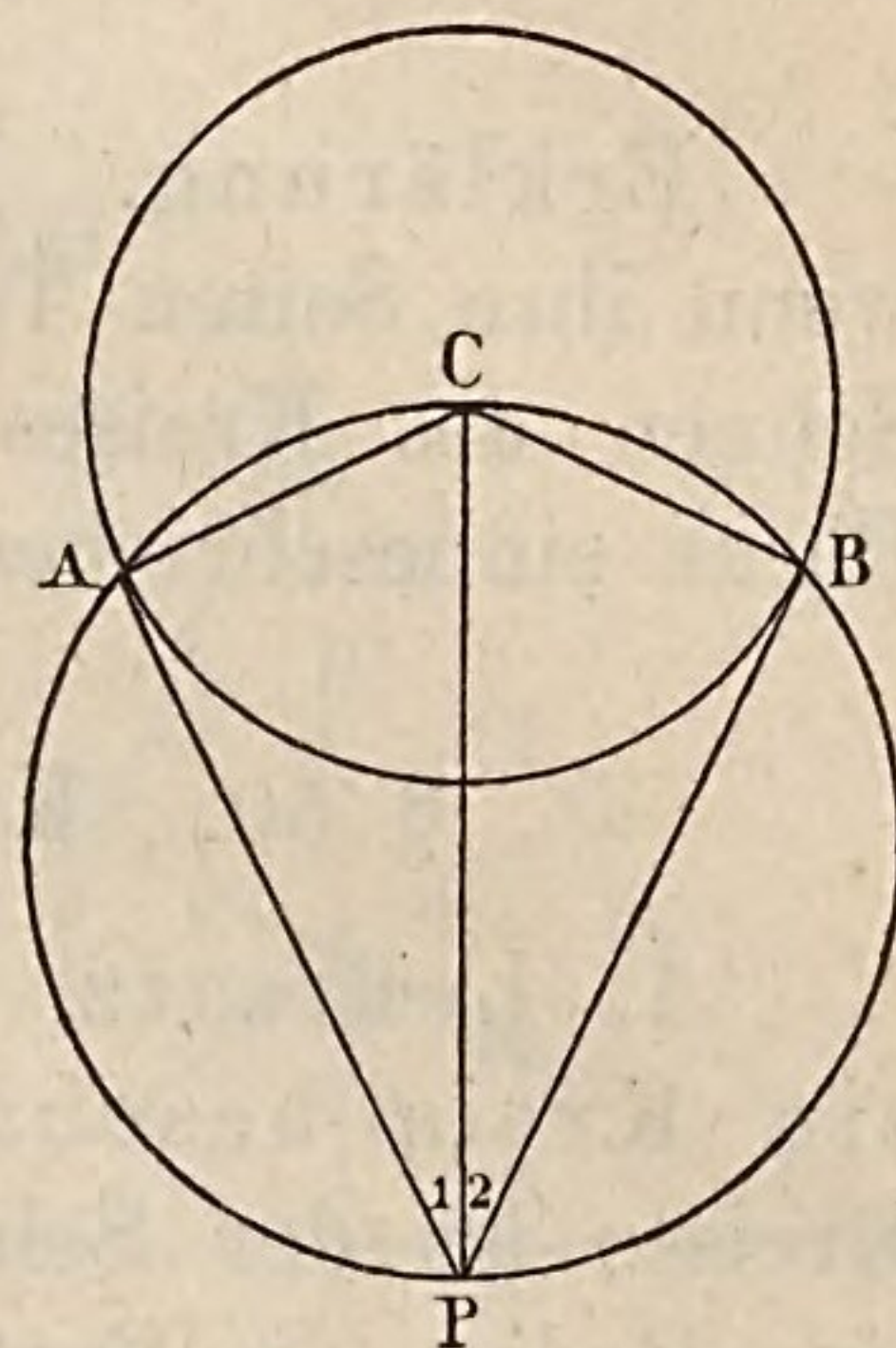
Bew. (indirekt). Angenommen die Halbierungslinie träge C nicht, so müsste ich doch C mit P verbinden können. Dann wäre CP die Halbierungslinie von $\sphericalangle P$ nach vorigem Satz. Der $\sphericalangle P$ hätte also zwei Halbierungslinien, was dem Gr. IV widerspricht. Folglich geht die Halbierungslinie von $\sphericalangle P$ durch C . W. z. b. w.

3. **Lehrsatz.** Der Winkel zwischen Tangente und einer durch den Berührungspunkt gehenden Sehne ist gleich dem Peripheriewinkel im entgegengesetzten Kreisabschnitt.

Vor. FB Tangente.

Beh. $\sphericalangle ABF = P$.

H. K. Durchmesser BC ; AC .



Bew. $\sphericalangle BAC = R$ (Lehrsatz des Thales)

$$\sphericalangle C + B_1 = R \text{ (Winkelsumme i. } \triangle)$$

$$\sphericalangle B_1 + B_2 = R \text{ (V.)}$$

$$\sphericalangle C + B_1 = B_1 + B_2 \text{ (Gr. III)}$$

$$\sphericalangle C = B_2 \text{ (Gr. V}_2)$$

$$\sphericalangle C = P \text{ (P. } \sphericalangle)$$

$$\sphericalangle ABF = P \text{ (Gr. III). W. z. b. w.}$$

VI. Um- und einbeschriebene Figuren. Reguläre Polygone.

§ 49.

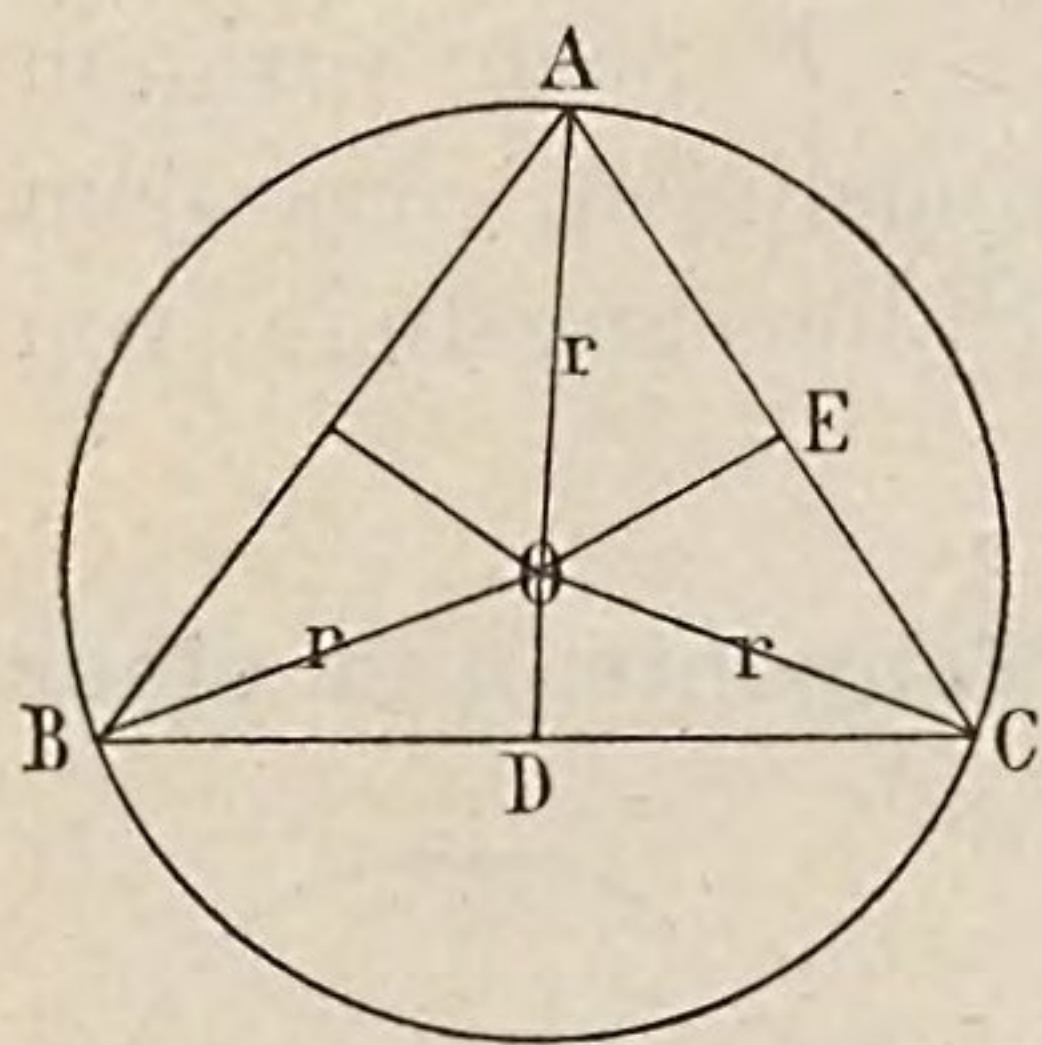
Erklärung. Eine Figur heisst dem Kreise umschrieben, wenn ihre Seiten Tangenten, einbeschrieben, wenn ihre Seiten Sehnen des Kreises sind. Im ersten Fall ist der Kreis der Figur einbeschrieben, im zweiten umschrieben.

§ 50. Kreise um und in das Dreieck.

1. Lehrsatz. Um und in **jedes** Dreieck lässt sich ein Kreis beschreiben. Das Centrum des umschriebenen Kreises ist der Schnittpunkt der Mittellote zweier Seiten und sein Radius die Entfernung des Centrum von einem Eckpunkte. Das Centrum des einbeschriebenen Kreises ist der Schnittpunkt zweier Winkel halbierender Transversalen und sein Radius das vom Centrum auf eine der Seiten gefällte Lot.

I. Vor. DO Mittellot von BC

EO „ „ AC .



Beh. Der mit OB um O beschriebene $\odot$ ist der umschriebene $\odot$ des $\triangle ABC$.

Bew. $BO = CO$ } (Mittellot)
 $AO = CO$ }

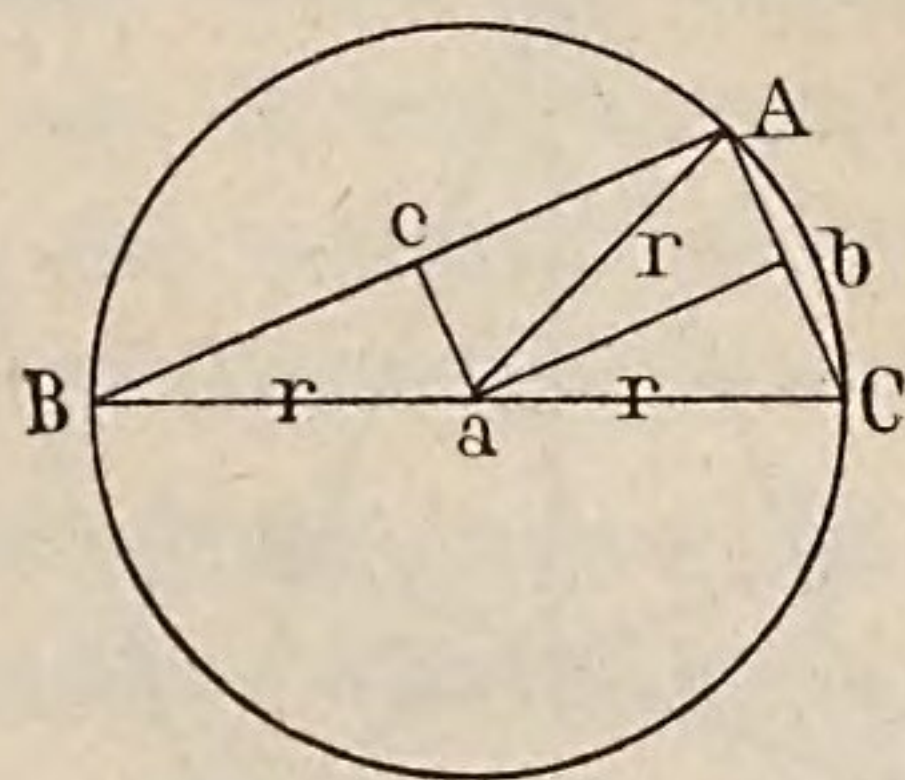
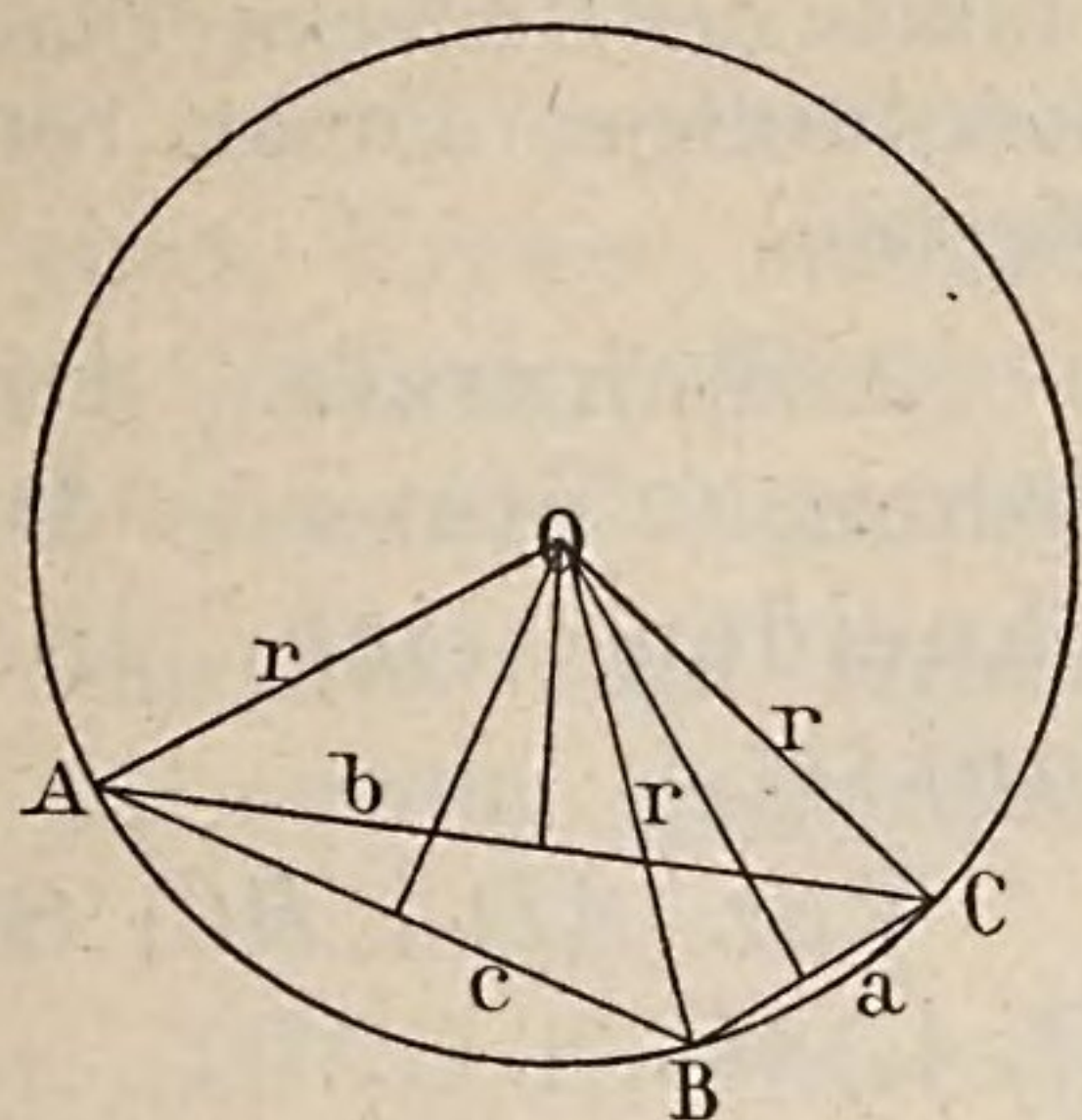
$$AO = BO = CO = r \text{ (Gr. III).}$$

Oder: Der mit OB um O beschriebene $\odot$ ist der umschriebene $\odot$ des $\triangle ABC$.

W. z. b. w.

Folgerung 1. Die drei Mittellote der Seiten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte. Der Beweis beruht darauf, dass nach § 31₄ auch das Mittellot von AB durch O gehen muss.

Anmerkung 1. Der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises liegt beim spitzwinkligen Dreieck innerhalb, beim stumpfwinkligen



Dreieck ausserhalb und ist beim rechtwinkligen Dreieck die Mitte der Hypotenuse.

II. Vor. $\sphericalangle B_1 = B_2$; $\sphericalangle C_1 = C_2$
 $OD \perp BC$; $OE \perp AC$, $OF \perp AB$.

Beh. Der mit OD um O beschriebene $\odot$ ist der einbeschriebene $\odot$ des $\triangle ABC$.

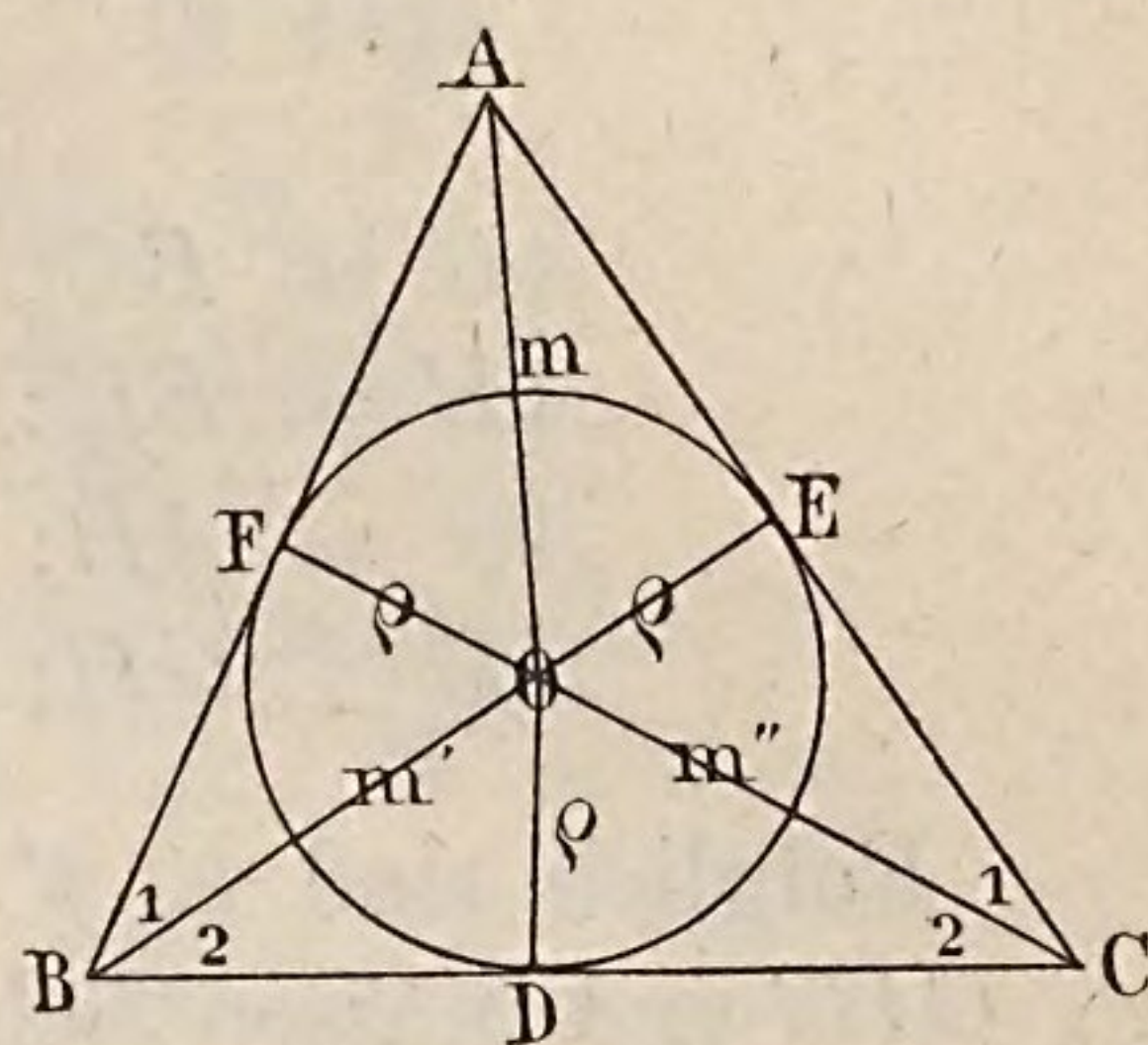
Bew. $\triangle BOD \cong BOF$
 $\triangle COD \cong COE$ } (K. II)

$OD = OF$
 $OD = OE$ } (h. St.)

$OD = OF = OE =$
 $= \varrho$ (Gr. III)

$OD \perp BC$; $OE \perp AC$; $OF \perp AB$ (V.)

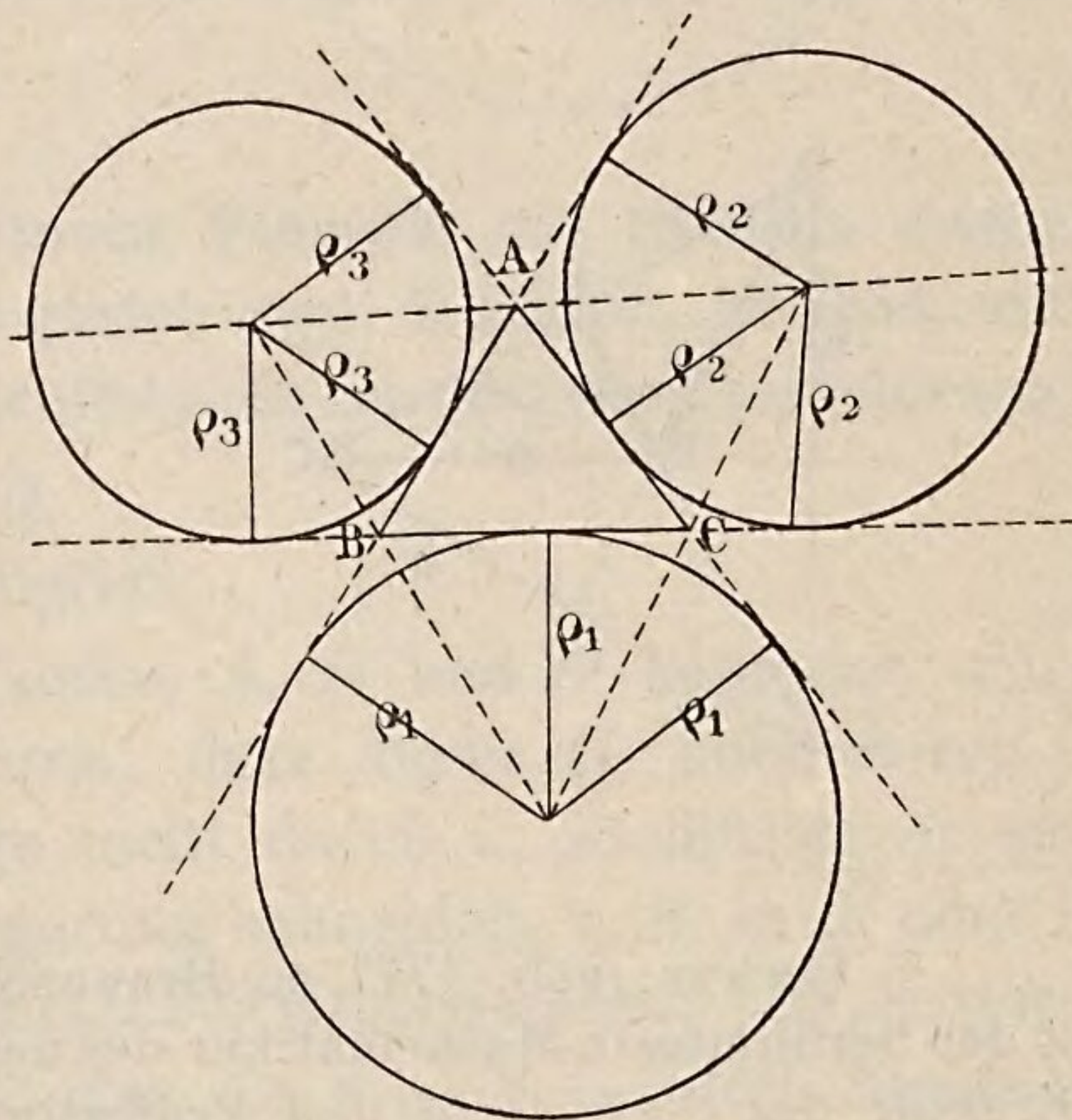
ist der $\odot$ der einbeschriebene. W. z. b. w.



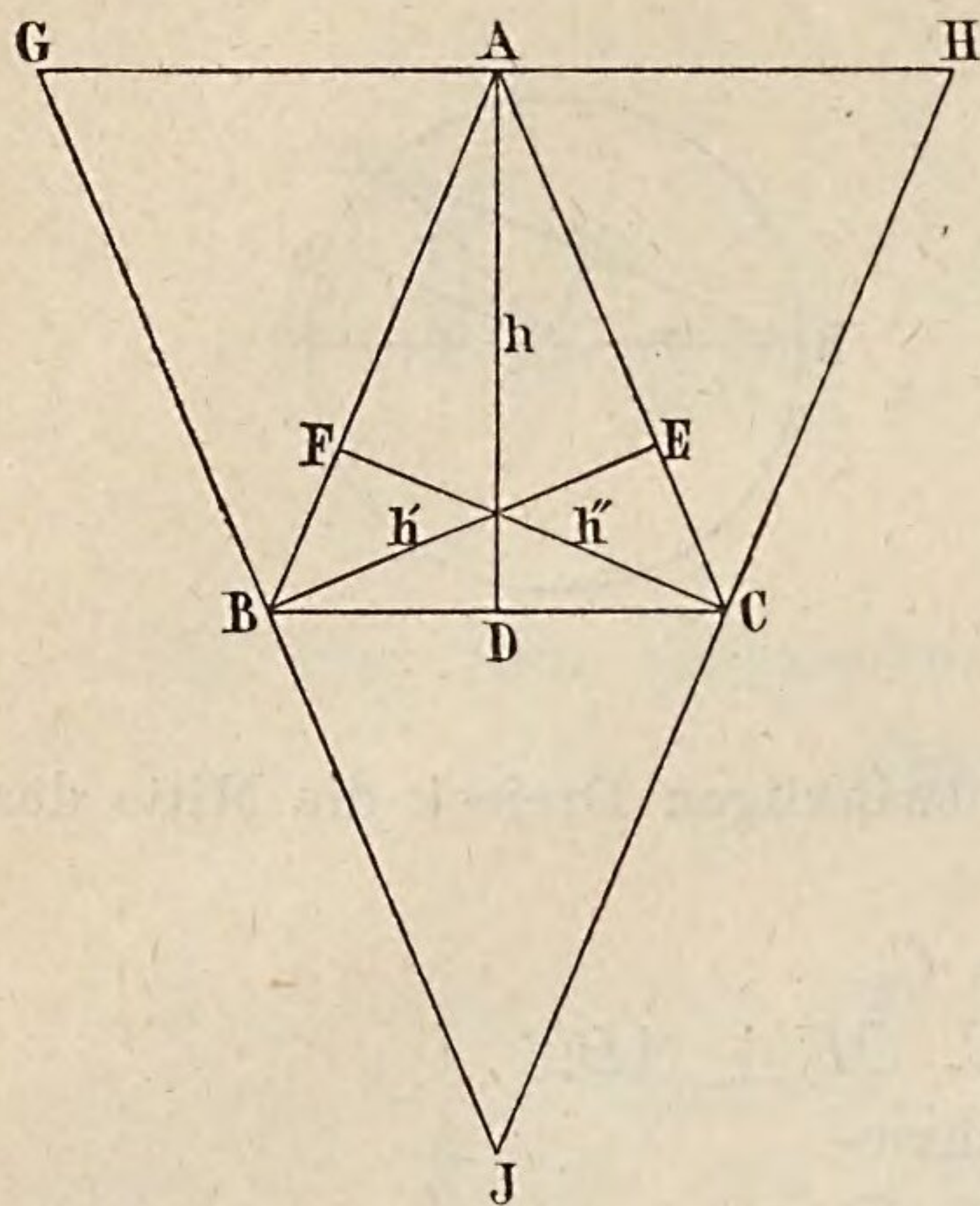
Folgerung 2. Die drei Winkel halbierenden Transversalen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

Der Beweis beruht darauf, dass nach § 48₂ Umkehrung die Winkel halbierende Transversale von $\sphericalangle A$ auch durch O gehen muss.

Anmerkung 2. Durch die Halbierung je zweier Aussenwinkel erhält man die drei anbeschriebenen Kreise des Dreiecks. Jeder anbeschriebene Kreis berührt eine Dreiecksseite und die Verlängerungen der beiden andern (s. Figur).



Anmerkung 3. Die Mittelpunkte des umschriebenen und des eingeschriebenen Kreises gehören zu den sogenannten merkwürdigen Punkten des Dreiecks. Einen dritten merkwürdigen Punkt betrifft der folgende



2. Lehrsatz. Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

Vor. $AD \perp BC$; $BE \perp AC$; $CF \perp AB$.

Beh. h, h' und h'' schneiden sich in einem Punkte.

H. K. $GAH \parallel BC$; $HCJ \parallel AB$; $GBJ \parallel AC$.

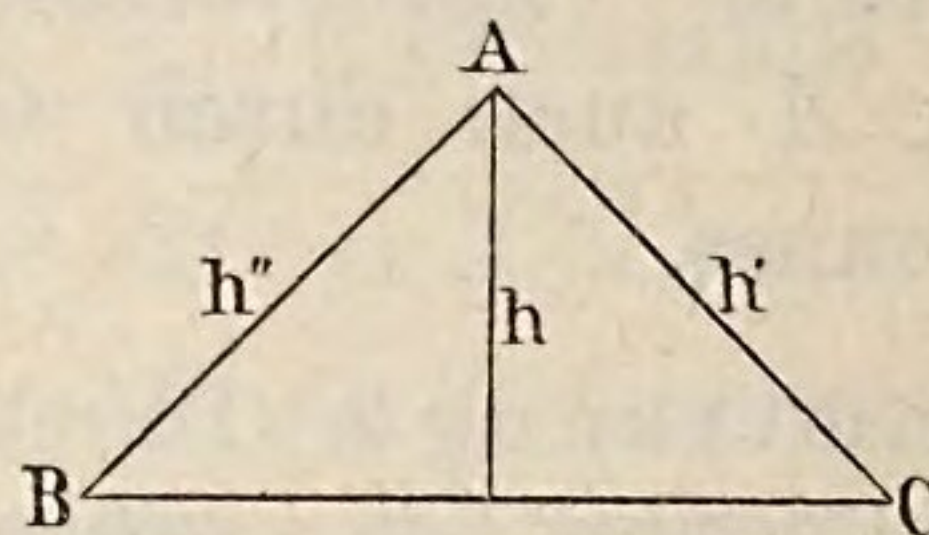
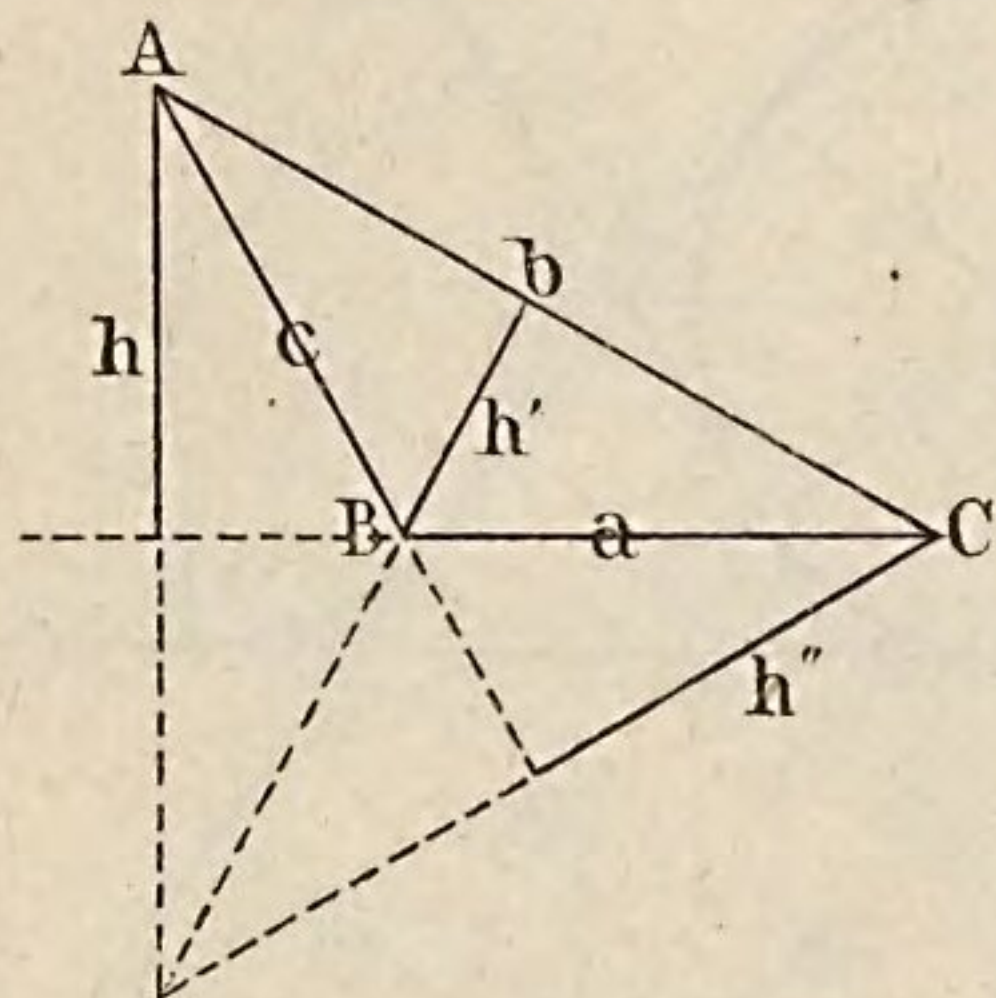
Bew. (Nach Gauss.*)

$$\begin{array}{l} AG = BC; \quad BG = AC; \quad CH = AB \\ AH = BC; \quad BJ = AC; \quad CJ = AB \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} AG = BC; \quad BG = AC; \quad CH = AB \\ AH = BC; \quad BJ = AC; \quad CJ = AB \end{array}} \right\} (\parallel \text{ zwischen } \parallel)$$

$$\begin{array}{l} AG = AH; \quad BG = BJ; \quad CH = CJ \text{ (Gr. III)} \\ AD \perp GH; \quad BE \perp GJ; \quad CF \perp HJ \text{ (§ 19}_2\text{)}. \end{array}$$

Folglich sind h, h' und h'' die Mittellote der Seiten des $\triangle GHJ$ und müssen sich nach Lehrsatz 1, Folgerung 1 in einem Punkte schneiden. Demnach schneiden sich die Höhen eines Dreiecks in einem Punkte. W. z. b. w.

Anmerkung 4. Der Schnittpunkt der drei Höhen eines Dreiecks liegt beim spitzwinkligen Dreieck innerhalb, beim stumpfwinkligen ausserhalb und ist beim rechtwinkligen Dreieck der Scheitelpunkt des rechten Winkels. (Vierter merkwürdiger Punkt s. § 63.)



*) Gauss, geb. 1777 zu Braunschweig, gest. 1855 zu Göttingen, ist der berühmteste Mathematiker des neunzehnten Jahrhunderts. Er war Direktor der Sternwarte und Professor der Mathematik in Göttingen.

§ 51. Kreise um und in das Viereck.

Vorbemerkung. Nicht um und nicht in jedes Viereck lässt sich ein Kreis beschreiben. Ein Viereck, dessen Seiten Sehnen eines Kreises sind, heisst ein Kreisviereck (einbeschriebenes Viereck, Sehnenviereck), ein solches, dessen Seiten Tangenten sind, ein Tangentenviereck (umschriebenes Viereck).

1. Lehrsatz. Im Kreisviereck (Sehnenviereck) ist die Summe je zweier gegenüberliegender Winkel gleich zwei Rechten.

Vor. $ABCD$ Kreisviereck.

Beh. $\sphericalangle A + C = 2 R.$

$\sphericalangle B + D = 2 R.$

H. K. Ich verbinde O , den Mittelpunkt des Kreises, mit B und D .

Bew.

$$\left. \begin{array}{l} \sphericalangle A = \frac{1}{2} \sphericalangle O_1 \\ \sphericalangle C = \frac{1}{2} \sphericalangle O_2 \end{array} \right\} (\S 47_1)$$

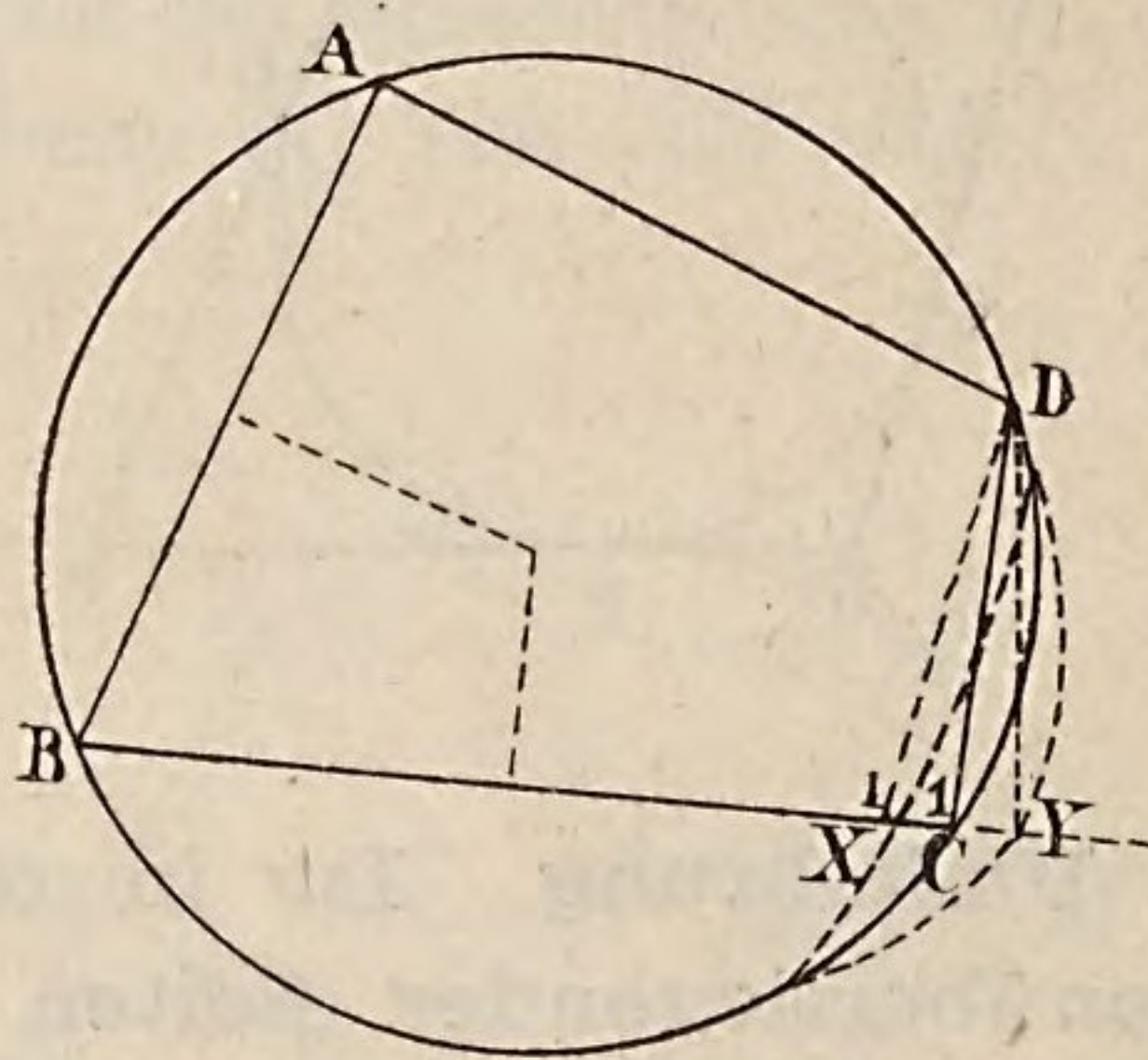
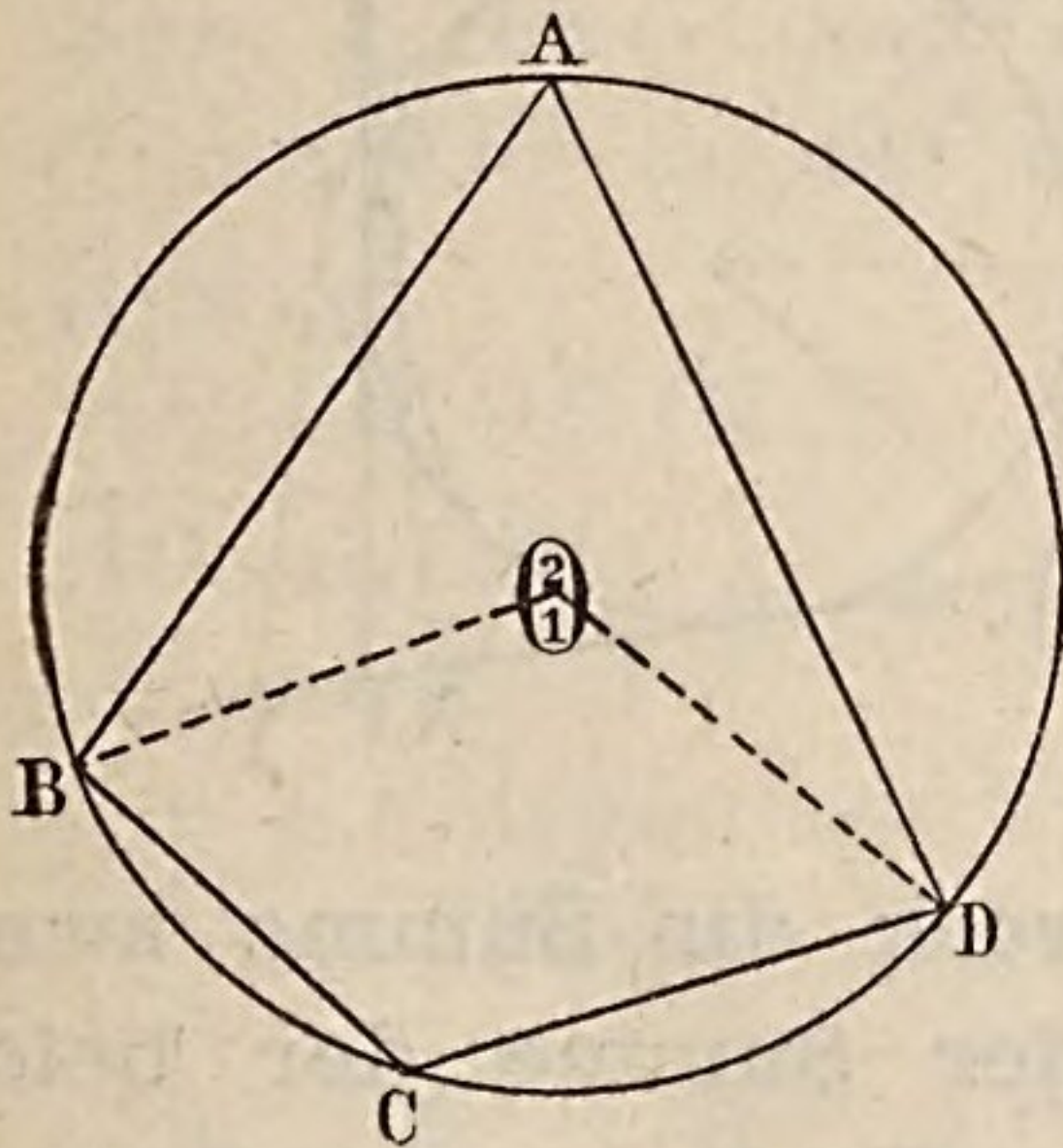
$$\sphericalangle A + C = \frac{1}{2} \sphericalangle O \text{ (Gr. V}_1\text{)}$$

$$\sphericalangle O = 4 R \text{ (Vollwinkel)}$$

$$\sphericalangle A + C = 2 R \text{ (Gr. II)}$$

$$\sphericalangle B + D + A + C = 4 R \text{ (Winkelsumme i. } \diamond)$$

$$\sphericalangle B + D = 2 R \text{ (Gr. V}_2\text{). W. z. b. w.}$$



Umkehrung. Ist in einem Viereck die Summe zweier gegenüberliegender Winkel gleich zwei Rechten, so lässt sich um dasselbe ein Kreis beschreiben (es ist also ein Kreisviereck).

Vor. $\sphericalangle A + C_1 = 2 R.$

Beh. Um $ABCD$ $\odot$ möglich.

Bew. Durch die drei Punkte A , B und D kann ich einen $\odot$ legen (§ 50); ich behaupte, dass dieser $\odot$ auch durch C geht. Angenommen, er ginge nicht durch C , so müsste er entweder BC oder deren Verlängerung schneiden, z. B. in X oder in Y . Dann wären $ABXD$ oder $ABYD$ Kreisvierecke, und es wäre:

$$\sphericalangle A + X_1 = 2 R \text{ oder } \sphericalangle A + Y = 2 R \text{ (Lehrsatz 1).}$$

Es ist aber $\sphericalangle A + C_1 = 2R$; $\sphericalangle A + C_1 = 2R$ (V.)
 wäre $\sphericalangle A + X_1 = A + C_1$ od. $\sphericalangle A + Y = A + C_1$ (Gr. III)
 wäre $\sphericalangle X_1 = C_1$ oder $\sphericalangle Y = C_1$ (Gr. V₂).

Dies widerspricht aber beides § 22.

Folglich kann der durch A , B und D gelegte $\odot$ weder BC noch auch deren Verlängerung schneiden und muss also durch C gehen, oder um $ABCD$ ist ein $\odot$ möglich. W. z. b. w.

Folgerung. Um Quadrate, Rechtecke und gleichschenklige Trapeze lassen sich Kreise beschreiben.

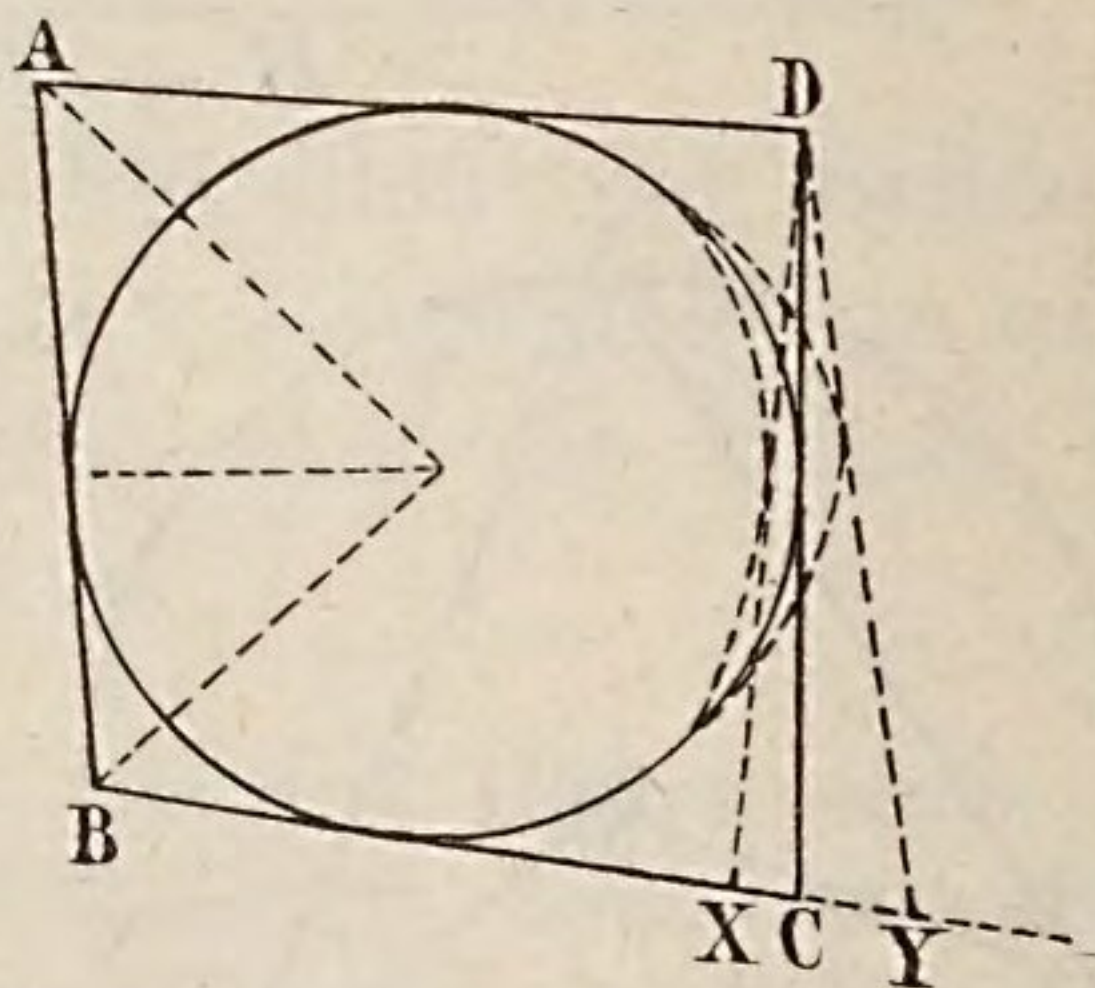
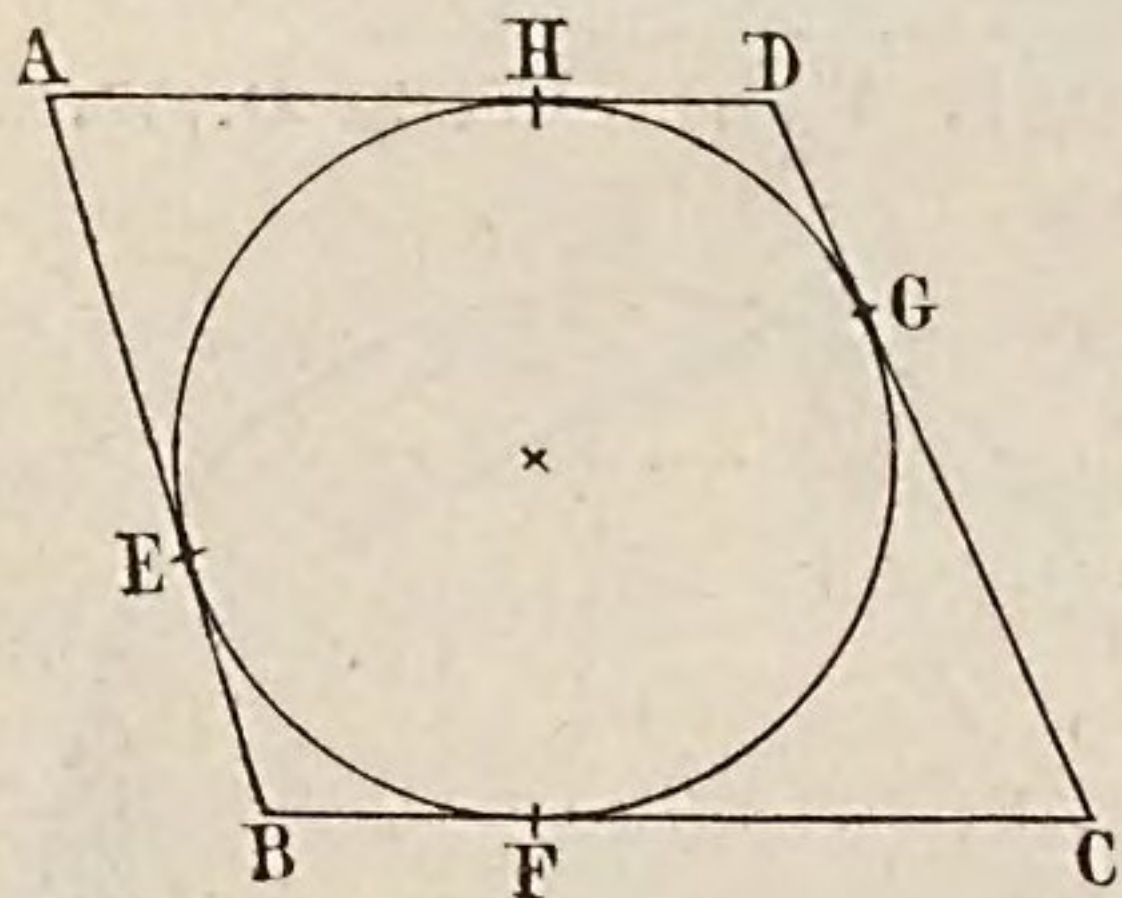
2. Lehrsatz. Im Tangentenviereck sind die Summen je zweier gegenüberliegender Seiten einander gleich.

Vor. $ABCD$ Tangentenviereck.

Beh. $AB + CD = AD + BC$.

Bew. $AE = AH$
 $BE = BF$
 $CG = CF$
 $DG = DH$ } (§ 48₂)

$AB + CD = AD + BC$ (Gr. V₁). W. z. b. w.



Umkehrung. Ist in einem Viereck die Summe zweier gegenüberliegender Seiten gleich der Summe der beiden andern, so lässt sich in dasselbe ein Kreis beschreiben (es ist also ein Tangentenviereck).

Vor. $AB + CD = AD + BC$.

Beh. In $ABCD$ $\odot$ möglich.

Bew. Ich kann einen $\odot$ zeichnen, welcher die drei Seiten AD , AB und BC berührt (§ 50); ich behaupte, dass dieser $\odot$ auch die vierte Seite CD berührt. Angenommen er berührte CD nicht, so müsste er innerhalb CD vorbeigehen oder CD schneiden. Ziehe ich in beiden Fällen von D aus an diesen $\odot$ die Tangenten DX und DY , so wären $ABXD$ oder $ABYD$ Tangentenvierecke, und es wäre nach vorigem Satze:

$$AB + DX = AD + BX \text{ od. } AB + DY = AD + BY.$$

Es ist aber $AB + CD = AD + BC$; $AB + CD = AD + BC$ (V.)
 wäre $CD - DX = CX$ oder $DY - CD = CY$ (Gr. V₂).

Dies widerspricht aber beides § 23.

Folglich kann der $\odot$, welcher die drei Seiten AD , AB und BC berührt, weder innerhalb CD vorbeigehen, noch kann er CD schneiden. Demnach muss er auch die vierte Seite CD berühren oder in $ABCD$ $\odot$ möglich. W. z. b. w.

Folgerung. In Quadrate und Rhomben lassen sich Kreise beschreiben. Um und in jedes Quadrat ist ein Kreis möglich.

§ 52. Vom regulären Polygon.*)

Erklärung. Ein **reguläres Polygon** oder **Vieleck** ist ein solches, in welchem alle Seiten und Winkel gleich sind.

Lehrsatz. Um und in jedes reguläre Polygon lässt sich ein Kreis beschreiben.

Der Mittelpunkt beider Kreise ist der Schnittpunkt zweier Winkel halbierender Transversalen (oder auch der Schnittpunkt der Mittellote zweier Seiten).

Vor. $ABCDEF$ reguläres Polygon.

$\sphericalangle A_1 = A_2$; $B_1 = B_2$; $OG \perp AB$, $OH \perp BC$ u. s. w.

Beh. I. Der $\odot$ um O mit OA (r) ist der umschriebene, II. der um O mit OG (ρ) der einbeschriebene $\odot$ von $ABCDEF$.

Bew.

I. $\triangle AOB \cong COB$ (K. I)

$AO = CO$ } (h. St.)
 $\sphericalangle C_1 = A_2$ }

$A_2 = \frac{1}{2}$ Polygon $\sphericalangle$ (V.)

$\sphericalangle C_1 = \frac{1}{2}$ Polygon $\sphericalangle$ (Gr. III)

$\sphericalangle C_2 = \frac{1}{2}$ Polygon $\sphericalangle$ (Gr. V₂)

$\sphericalangle C_1 = C_2$ (Gr. III)

$\triangle COD \cong COB$ (K. I)

$DO = BO$ (h. St.)

$EO = CO$

$FO = DO$ } (wird ebenso

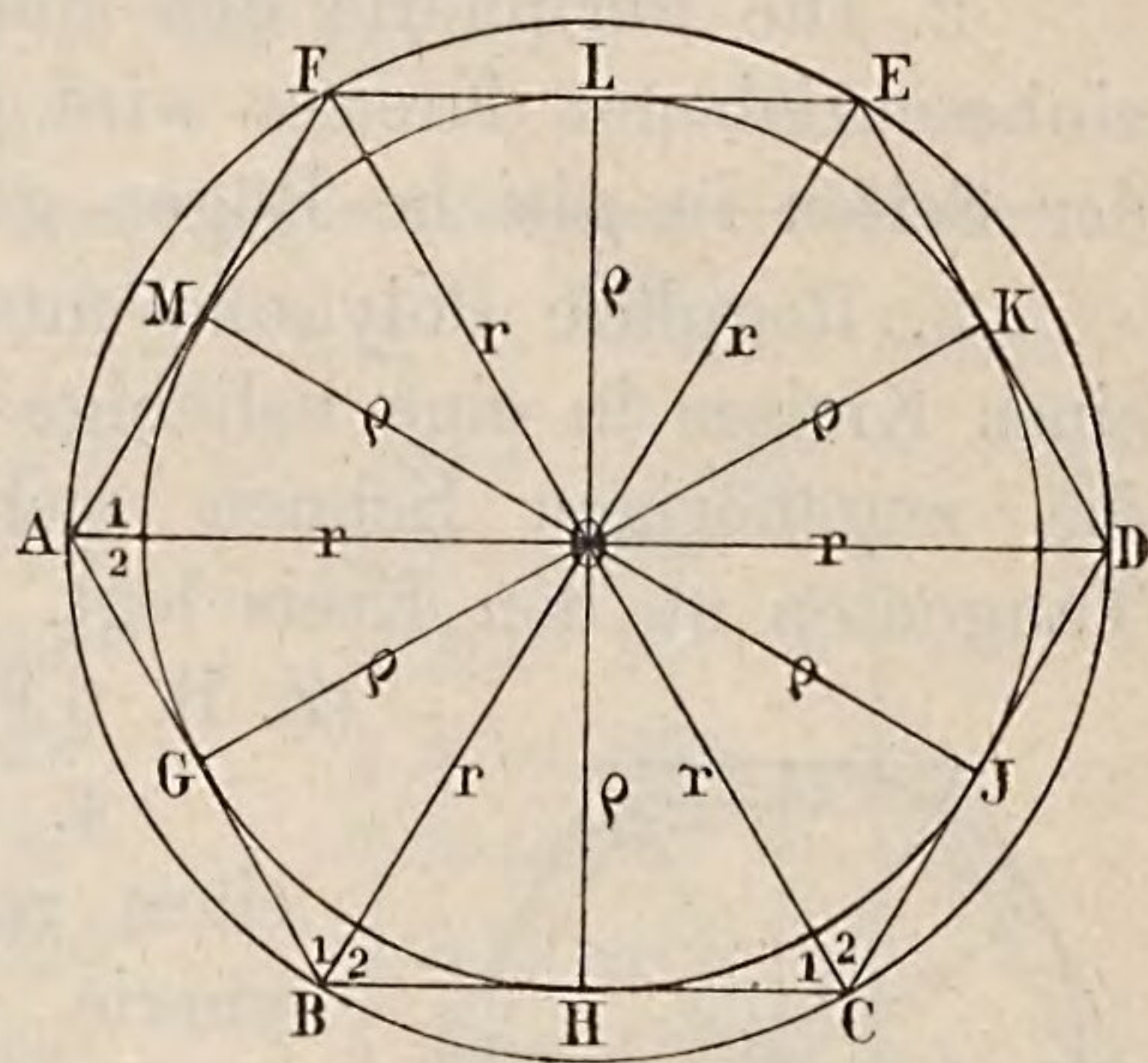
$AO = EO$ } bewiesen)

$\triangle AOG \cong BOG$ (K. II)

$AO = BO$ (h. St.)

$AO = BO = CO = DO = EO = FO$ (Gr. II),

oder der $\odot$ um O mit OA (r) ist der umschriebene.



*) Aus dem Griechischen; bedeutet „Vielwinkel“ oder „Vieleck“.

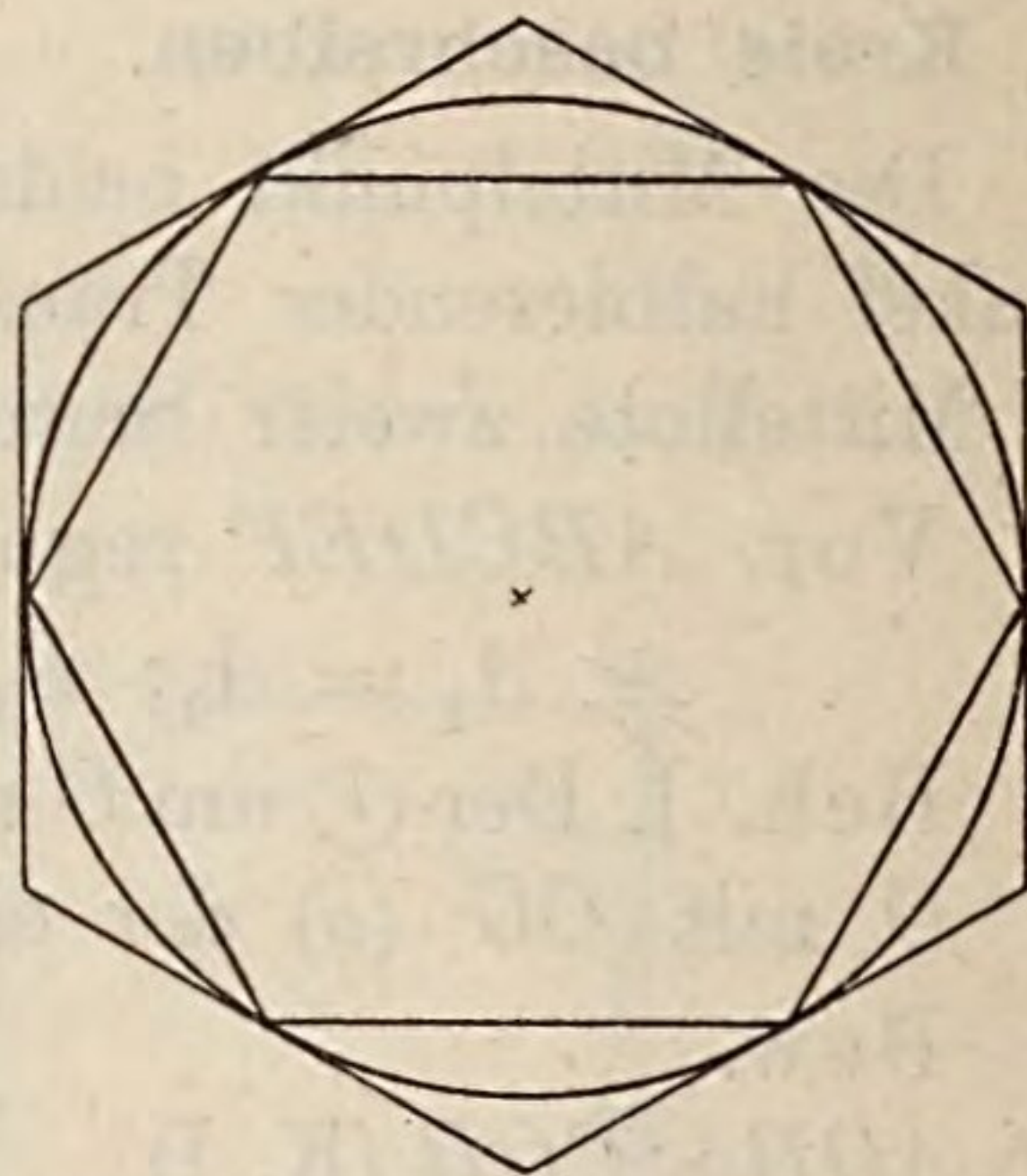
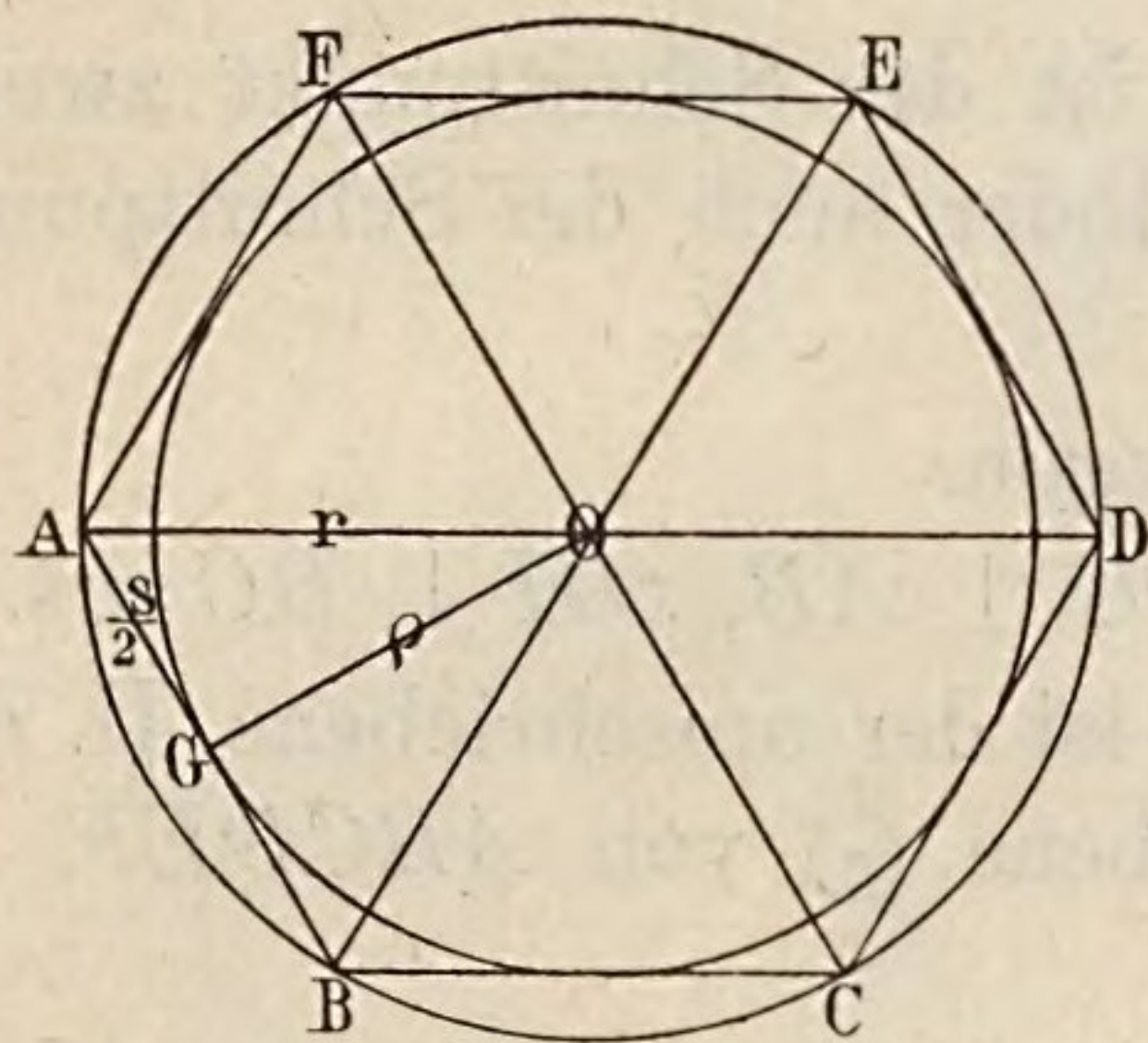
$$\text{II. } \left. \begin{array}{l} \triangle OBG \cong OBH \\ \triangle OCH \cong OCJ \end{array} \right\} \text{ (K. II) u. s. w.}$$

$\perp OG = \perp OH = \perp OJ = \perp OK = \perp OL = \perp OM$ (h. St.),
oder der $\odot$ um O mit OG (ρ) ist der einbeschriebene. W. z. b. w.

Anmerkung. Der gemeinsame Mittelpunkt des um- und einbeschriebenen Kreises heisst auch der Mittelpunkt des Polygons; r ist dann der grosse, ρ der kleine Radius und $\sphericalangle AOB$ u. s. w. der Centriwinkel des Polygons. Das rechtwinklige Dreieck AOG u. s. w. heisst das Bestimmungsdreieck des regulären Polygons; es enthält den grossen und kleinen Radius, die halbe Seite des Polygons, den halben Polygonwinkel und den halben Centriwinkel.

Folgerungen. 1. Alle Centriwinkel eines regulären Polygons sind einander gleich ($\sphericalangle AOB = BOC \dots$). Beim regulären n Eck ist

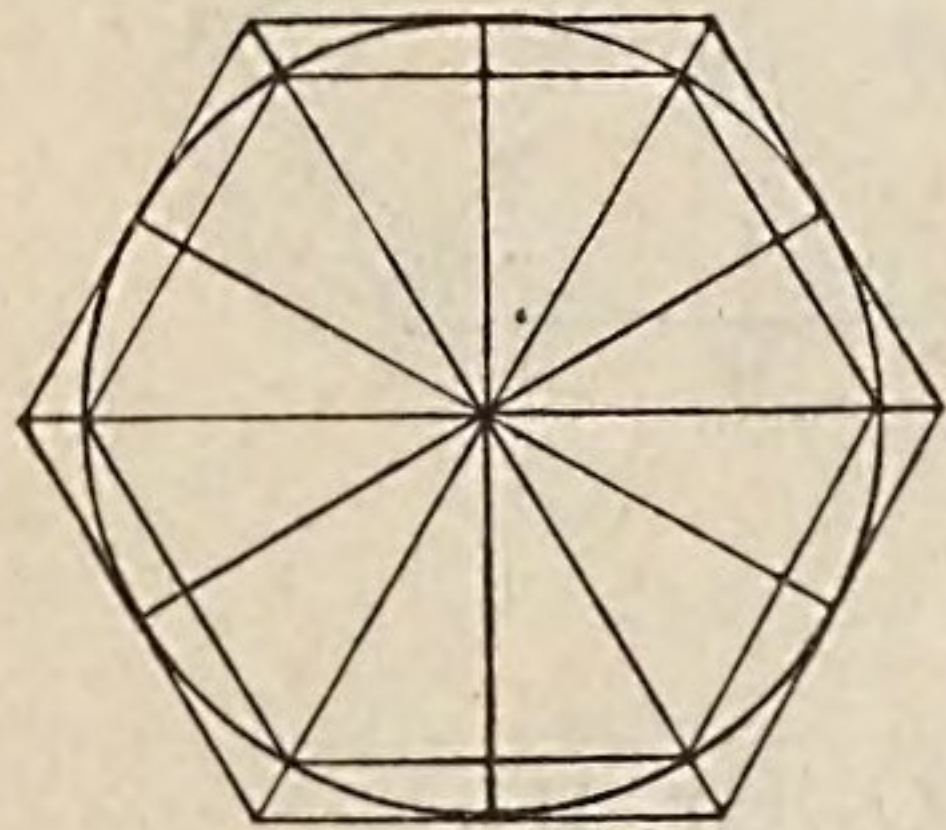
$$C_n = \frac{360^\circ}{n} = \frac{4}{n} R.$$



2. Die Peripherie des einem regulären Polygon um- und einbeschriebenen Kreises wird durch die Ecken und die Mitten der Seiten in gleiche Bögen geteilt.

3. Reguläre Polygone entstehen, wenn man die Peripherie eines Kreises in eine beliebige Anzahl gleicher Teile teilt und die zugehörigen Sehnen zieht oder durch die Teilpunkte Tangenten an den Kreis legt.

(Z. B. 6 Eck, 12 Eck...., 4 Eck, 8 Eck....)

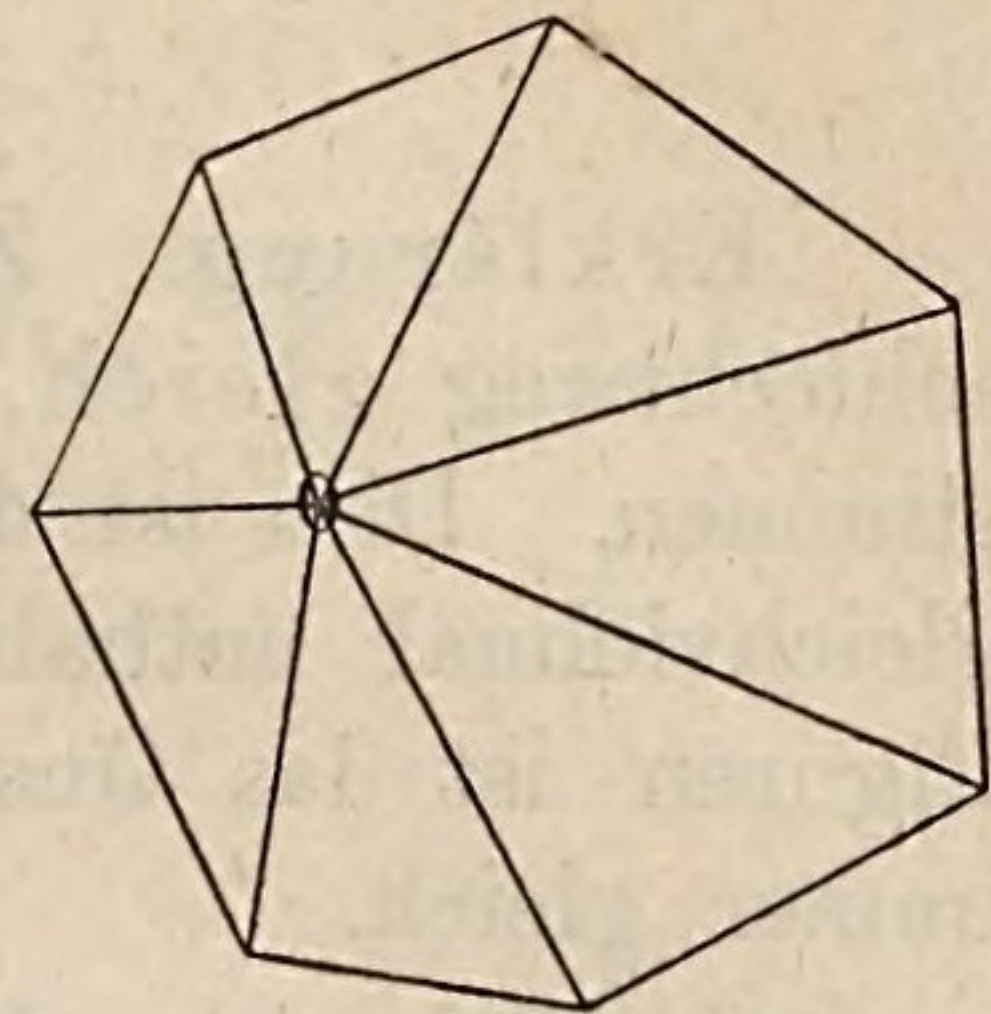


4. Verlängert man die kleinen Radien eines regulären Polygons bis zur Peripherie des umschriebenen Kreises, so wird diese in soviel gleiche Bögen geteilt, wie das Polygon Seiten hat. Legt man durch diese Teilpunkte Tangenten an den Kreis, so entsteht ein neues reguläres Polygon um den Kreis, dessen Seiten denen des ersten parallel sind.

§ 53. Vom Centriwinkel und Polygonwinkel.

1. Lehrsatz. Die Winkelsumme jedes Polygons von n Seiten (n Ecks) ist $= 2nR - 4R$.

Beweis. Verbindet man einen Punkt z. B. O innerhalb des n Ecks mit den n Ecken, so entstehen offenbar n Dreiecke, deren Winkelsumme $2nR$ ist (§ 21). Zieht man hiervon die Winkel um den Punkt O herum ab, welche $4R$ betragen (§ 12), so erhält man die Winkelsumme im Polygon. Demnach ist die Winkelsumme im n Eck $= 2nR - 4R$.



2. Lehrsatz. Jeder Polygonwinkel eines regulären n Ecks ist $= \frac{2nR - 4R}{n} = 2R - \frac{4}{n}R$.

Beweis. Die Winkelsumme im n Eck beträgt $2nR - 4R$ (Lehrsatz 1). Alle Winkel sind einander gleich (Erklärung). Folglich

$$P_n = \frac{2nR - 4R}{n} = 2R - \frac{4}{n}R.$$

3. Lehrsatz. Polygonwinkel und Centriwinkel eines regulären Polygons ergänzen sich zu $2R$.

Beweis. $P_n = 2R - \frac{4}{n}R$ (Lehrsatz 2.)

$$C_n = \frac{4}{n}R \text{ (§ 52, Folg. 1)}$$

$$P_n + C_n = 2R \text{ (Gr. V}_1\text{).}$$

Z. B.

$n =$	Winkelsumme $= 2nR - 4R$	$P_n = \frac{2nR - 4R}{n}$	$C_n = \frac{4R}{n}$	Summe
3	$2R = 180^\circ$	$\frac{2}{3}R = 60^\circ$	$1\frac{1}{3}R = 120^\circ$	} $2R$
4	$4R = 360^\circ$	$1R = 90^\circ$	$1R = 90^\circ$	
5	$6R = 540^\circ$	$1\frac{1}{5}R = 108^\circ$	$\frac{4}{5}R = 72^\circ$	
6	$8R = 720^\circ$	$1\frac{1}{3}R = 120^\circ$	$\frac{2}{3}R = 60^\circ$	
7	$10R = 900^\circ$	$1\frac{3}{7}R = 128\frac{4}{7}^\circ$	$\frac{4}{7}R = 51\frac{3}{7}^\circ$	
8	$12R = 1080^\circ$	$1\frac{1}{2}R = 135^\circ$	$\frac{1}{2}R = 45^\circ$	
9	$14R = 1260^\circ$	$1\frac{5}{9}R = 140^\circ$	$\frac{4}{9}R = 40^\circ$	
10 R	$16R = 1440^\circ$	$1\frac{3}{5}R = 144^\circ$	$\frac{2}{5}R = 36^\circ$	
.	.	.	.	
.	.	.	.	

VII. Inhaltsgleichheit und Inhaltsberechnung geradliniger Figuren.

§ 54.

Erklärung. Zwei Figuren heissen inhaltsgleich oder schlechtweg gleich, wenn sie in ihrem Flächeninhalt übereinstimmen. Dies ist der Fall, wenn eine dritte Figur in beiden gleichvielmals enthalten ist. Das Mass des Flächeninhalts der Figuren ist das Quadrat (vgl. § 8). Kongruente Figuren sind immer gleich.

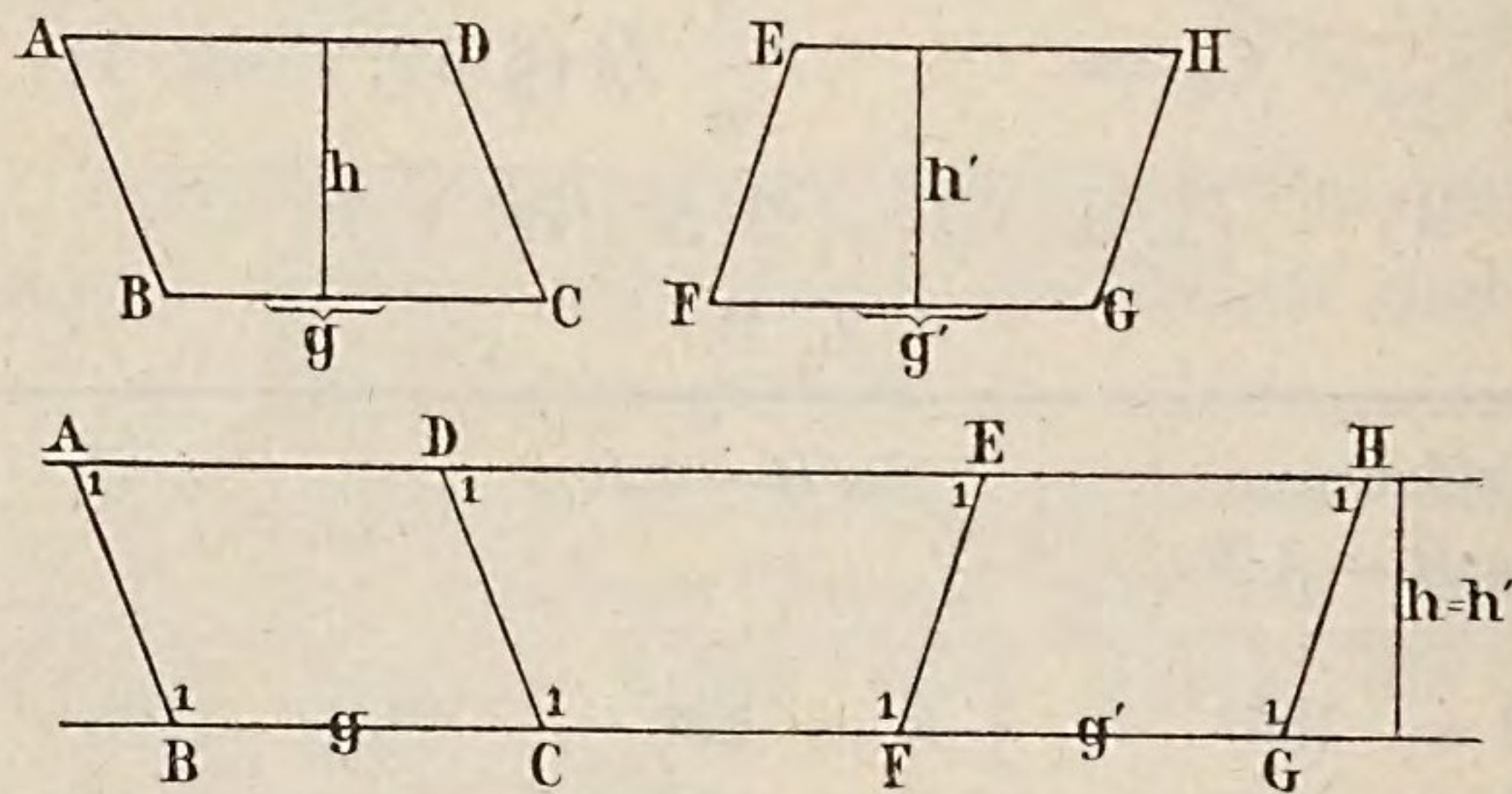
Grundsatz. Kongruentes zu Kongruentem addiert giebt Gleiches.

Kongruentes von Kongruentem subtrahiert giebt Gleiches.

$$\begin{array}{r} a \cong b \\ c \cong d \\ \hline a + c = b + d \\ a - c = b - d. \end{array}$$

§ 55. Hauptsatz von der Inhaltsgleichheit.

1. Lehrsatz. Parallelogramme von gleicher Grundlinie (g) und Höhe (h) sind gleich.



Vor. $ABCD$ u. $EFGH$ $\square$

$$g = g'; \quad h = h'.$$

Beh. $\square ABCD = \square EFGH$.

H.K. Ich lege die beiden $\square$ zwischen dieselben Parallelen von dem Abstände $h = h'$.

Bew. $BC = FG$ (V.)

$$1) \quad BF = CG \text{ (Gr. V}_1\text{).}$$

Ebenso 2) $AE = DH$

$$3) \quad FE = HG \text{ u. } 4) \quad AB = CD \text{ (Gegens. i. } \square\text{).}$$

$$\left. \begin{array}{l} 5) \sphericalangle A_1 = D_1 \\ 6) \sphericalangle B_1 = C_1 \\ 7) \sphericalangle F_1 = G_1 \\ 8) \sphericalangle E_1 = H_1 \end{array} \right\} (\text{G. } \sphericalangle \text{ an } \parallel)$$

$$\square ABFE \cong DCGH \text{ (Erklärung; § 24)}$$

$$\square DCFE \cong DCFE \text{ (Gr. I)}$$

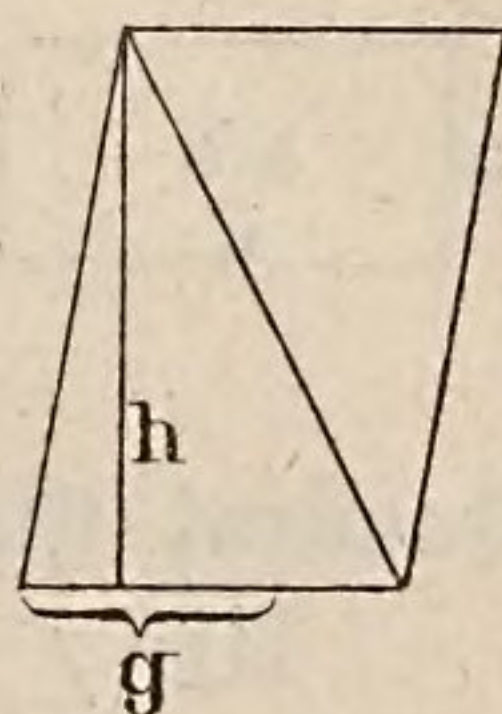
$$\square ABCD = \square EFGH \text{ (§ 54; Gr.). W. z. b. w.}$$

2. Lehrsatz. Ein Dreieck ist gleich der Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Grundlinie und Höhe.

Der Beweis folgt aus § 34, Folg. 1.

3. Lehrsatz. Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind gleich.

Der Beweis folgt aus Lehrsatz 1. und 2.



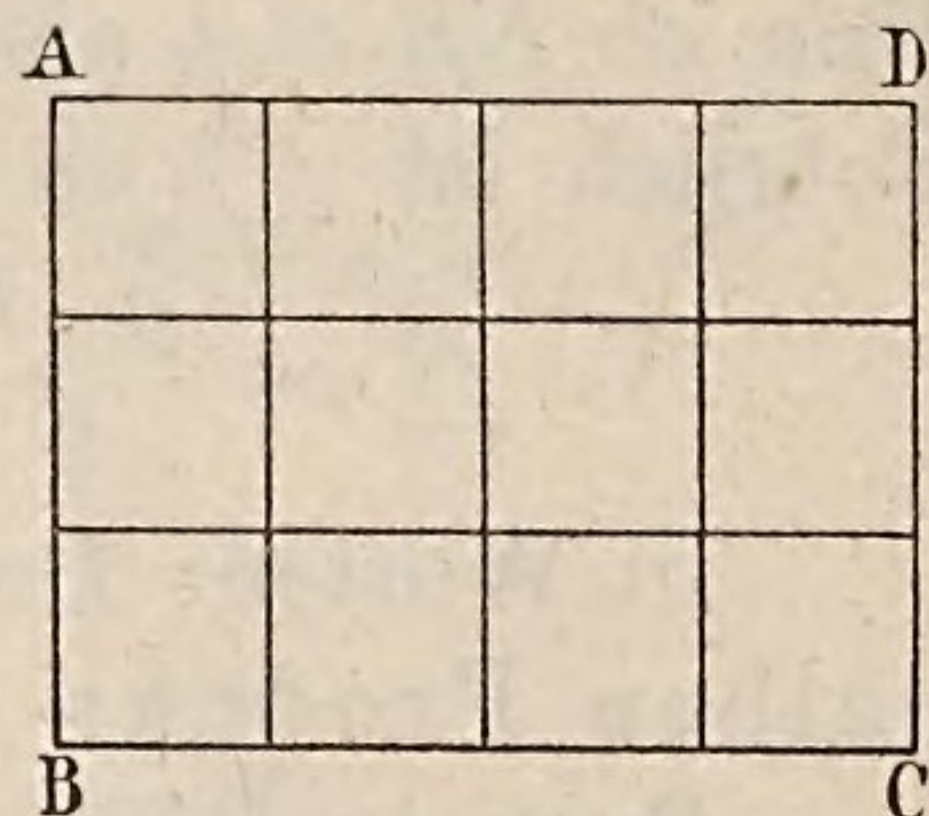
§ 56. Formeln der Inhaltsberechnung.

I. $\square = a \cdot b$.

In Worten: Der Inhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkt aus zwei anstossenden Seiten.

Beweis. Ich teile die beiden Seiten durch ein gemeinsames Mass, welches ich so klein annehmen kann, dass es in beiden ohne Rest aufgeht. Wäre z. B.

vom $\square ABCD$ die Seite $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, so wird, wenn ich durch die Teilpunkte Parallelen zu den Seiten ziehe, $ABCD$ dadurch in 3 Längsstreifen und jeder dieser Längsstreifen wieder in 4 Teile zerlegt, so dass im ganzen $3 \cdot 4 = 12$ Figuren entstehen. Jede dieser



Figuren ist aber ein Quadrat nach § 34, Folg. 4 und zwar hier ein qcm. Folglich ist in diesem Falle $\square ABCD = 12$ qcm.

Allgemein: Sei das gemeinsame Mass x und sei dasselbe in der einen Seite a , in der andern b mal enthalten, ist also $AB = a \cdot x$ und $BC = b \cdot x$, so entstehen $a \cdot b$ Quadrate von der Seite x (Quadratfuss, Quadratzoll u. s. w., je nachdem x ein Fuss, ein Zoll u. s. w. ist), oder Formel I: $\square = a \cdot b$.

W. z. b. w.

II. $\square = a^2$.

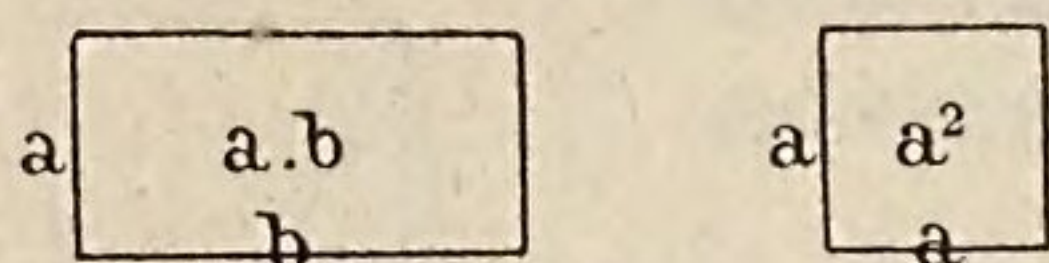
In Worten: Der Inhalt eines Quadrats ist gleich der zweiten Potenz seiner Seite.

Beweis. Wird in Formel I $a = b$, so wird die Figur zum Quadrat und ich erhalte $\square = a^2$. W. z. b. w.

Anmerkung. Hiervon rührt die Bezeichnung der zweiten Potenz als Quadrat.

Folgerung. $1 \text{ qm} = (10 \text{ dm})^2 = 100 \text{ qdm} = (100 \text{ cm})^2 = 10000 \text{ qcm} = (1000 \text{ mm})^2 = 1000000 \text{ qmm}$.

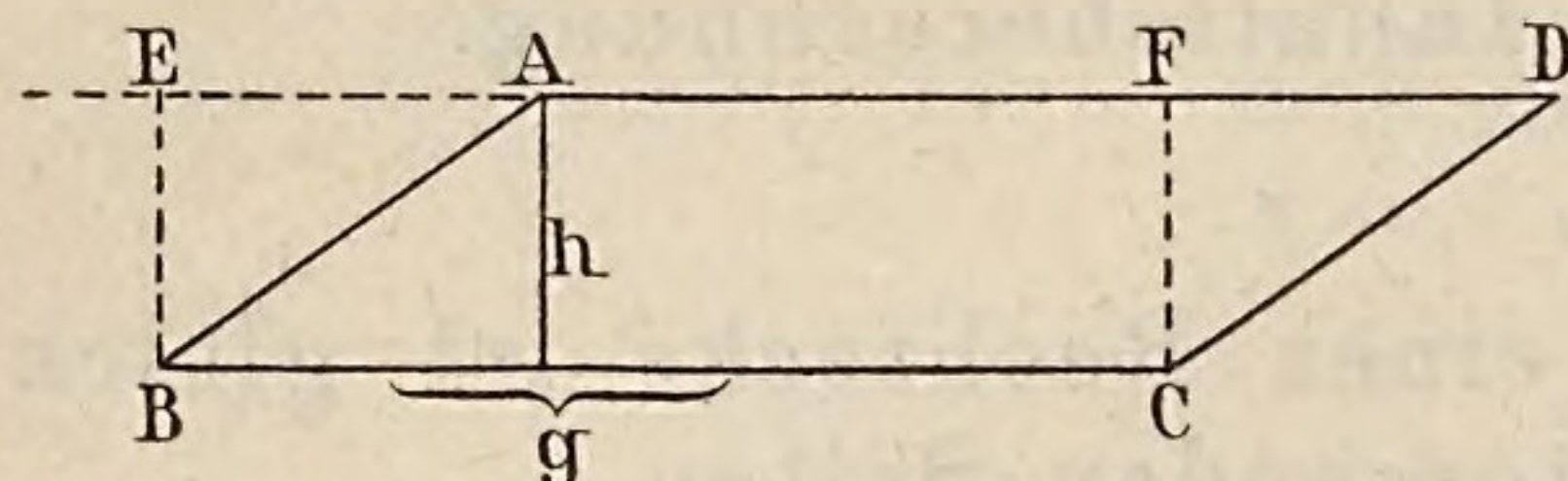
NB. Man beachte, dass, wenn es sich um das Produkt zweier Strecken (eigentlich um das Produkt ihrer Masszahlen) oder um die zweite Potenz einer Strecke handelt, dies gleichbedeutend ist mit dem Rechteck aus den beiden Strecken oder dem



Quadrat über der Strecke.

III. $\square = g \cdot h$.

In Worten: Der Inhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt (Rechteck) aus Grundlinie und Höhe.



Beweis. Errichte ich auf der Grundlinie g des Parallelogramms $ABCD$ in B u. C Senkrechte, so entsteht das $\square EBCF$, dessen Inhalt $= BC \cdot EB$ ist (Formel I).

$$\frac{\square EBCF = \square ABCD \text{ (§ 55)}}{\square ABCD = BC \cdot EB \text{ (Gr. III).}}$$

Nun ist $EB = h$ als Senkrechte zwischen Parallelen und $BC = g$. Folglich ist $\square = g \cdot h$. W. z. b. w.

IV. $\triangle = \frac{g \cdot h}{2}$.

In Worten: Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt (Rechteck) aus Grundlinie und Höhe.

Beweis folgt unmittelbar aus § 55 L. 2.

V. $\triangle = \frac{b \cdot c}{2}$.

In Worten: Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem halben Produkt (Rechteck) der beiden Katheten.

Beweis folgt unmittelbar aus Formel IV, da, wenn ich die eine Kathete als Grundlinie ansehe, die andere die zugehörige Höhe ist.

(Inhalt des $\triangle$ s. § 57, Schluss.)

VI. $\square = \frac{b + d}{2} \cdot h = m \cdot h$.

In Worten: Der Inhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkt (Rechteck) aus der Höhe und dem arith-

metischen Mittel der beiden parallelen Seiten (oder gleich dem Rechteck aus Mittellinie und Höhe).

Durch eine Diagonale zerfällt das Trapez in zwei Dreiecke mit den Grundlinien b und d und der Höhe h . Es ist also

$$\text{Trapez} = \frac{b \cdot h}{2} + \frac{d \cdot h}{2} \text{ (Formel IV)}$$

$$\text{Trapez} = \frac{b + d}{2} \cdot h.$$

$$\frac{b + d}{2} = m \text{ (§ 39)}$$

$$\text{Trapez} = m \cdot h \text{ (Gr. II). W. z. b. w.}$$

$$\text{VII. Reguläres Polygon} = \frac{U \cdot \varrho}{2}.$$

In Worten: Der Inhalt eines regulären Polygons ist gleich dem halben Produkt (Rechteck) aus seinem Umfang und dem Radius des einbeschriebenen Kreises.

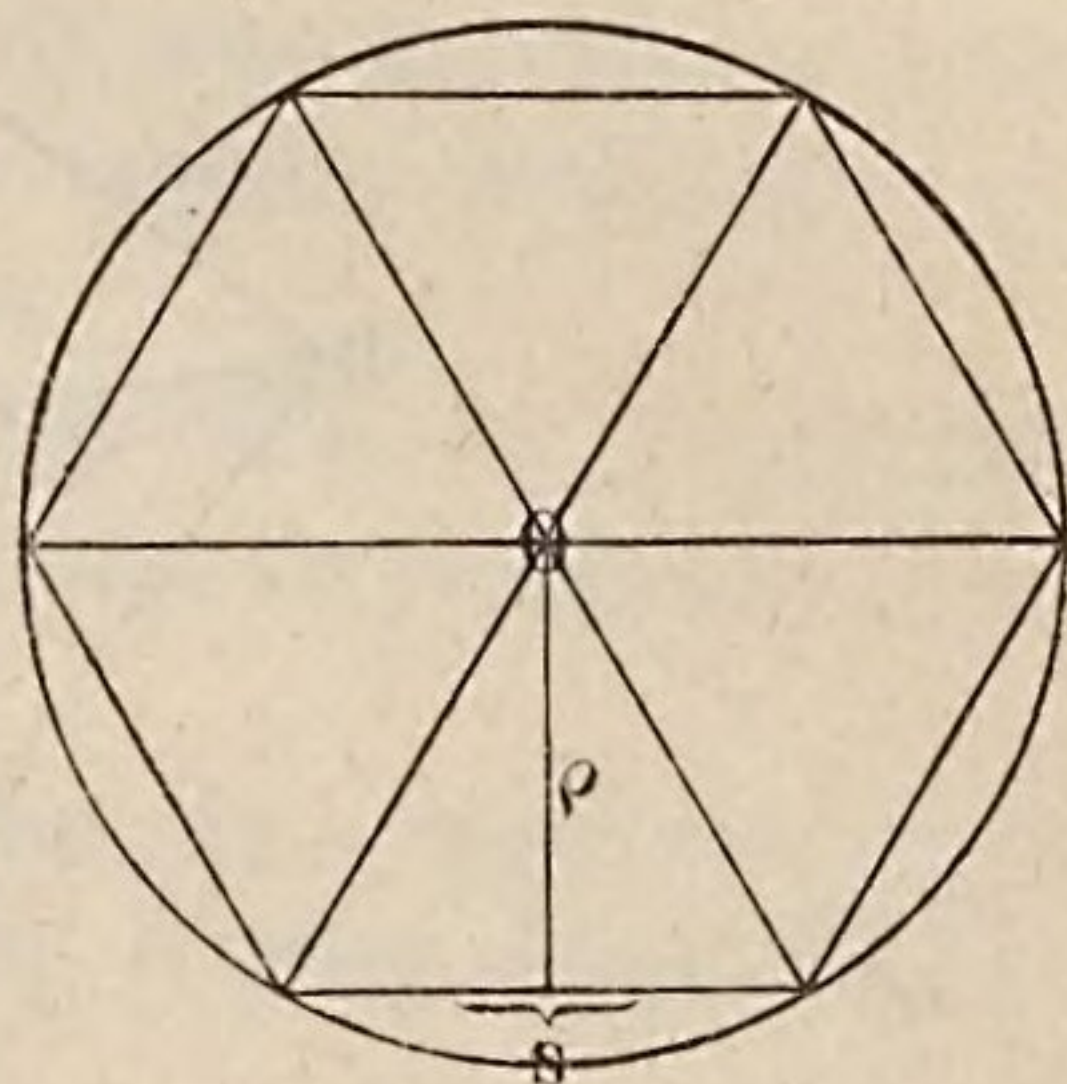
Beweis. Der Inhalt des regulären n Ecks besteht aus n kongruenten Dreiecken von der Basis s und der Höhe ϱ . Demnach ist nach Formel IV der Inhalt

$$J = \frac{n \cdot s \cdot \varrho}{2}.$$

$$n \cdot s = U$$

$$J = \frac{U \cdot \varrho}{2} \text{ (Gr. II).}$$

W. z. b. w.



§ 57. Lehrsatz des Pythagoras.*)

I. Im rechtwinkligen Dreieck ist das Hypotenusenquadrat gleich der Summe der beiden Kathetenquadrate.

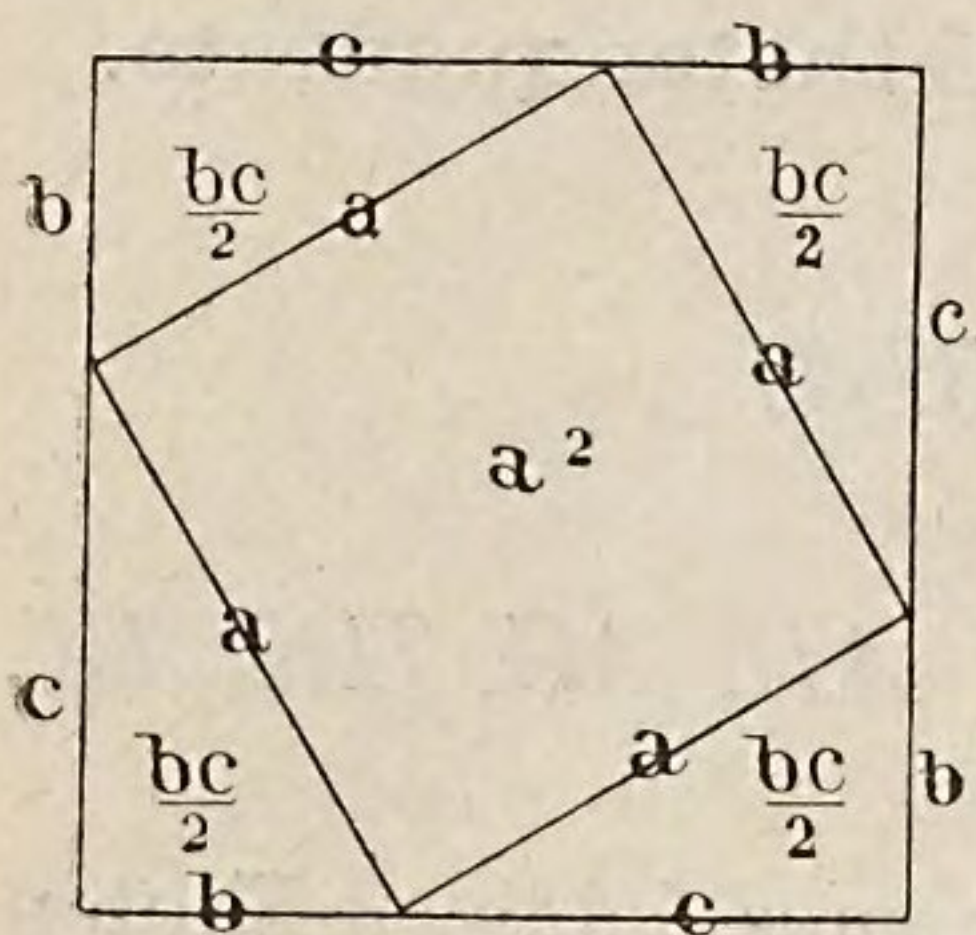
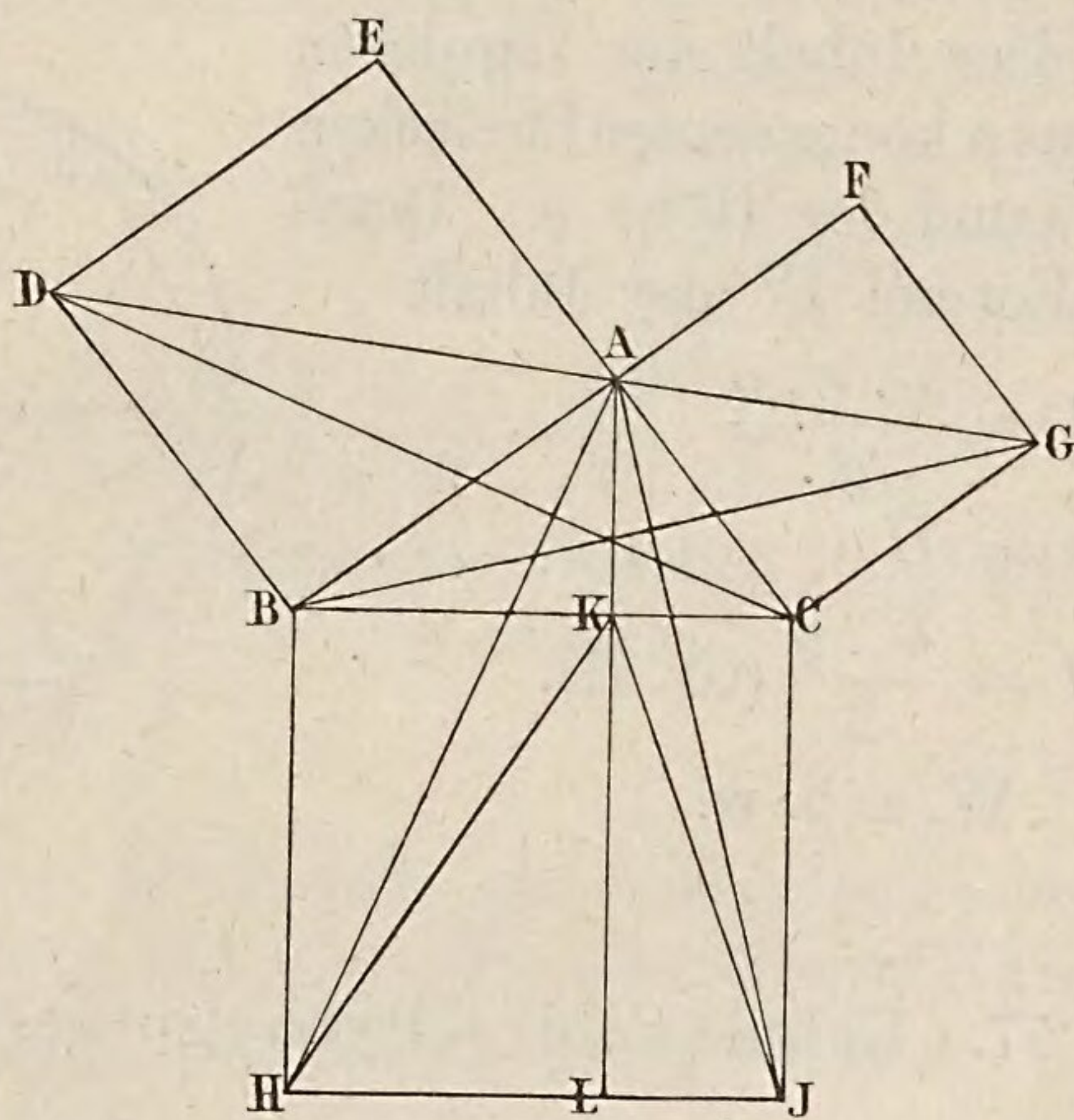
Vor. $\sphericalangle BAC = 1 \text{ R.}$

Beh. $\square BCJH = \square ACGF + \square ABDE$
 $(BC^2 = AC^2 + AB^2).$

H. K. $AKL \perp HJ, BG, CD, AH, AJ, AD, AG, HK, JK.$

*) Pythagoras, 569—470 v. Chr., geb. zu Samos, lebte zu Kroton in Unteritalien, wo er der Stifter der nach ihm benannten berühmten pythagoreischen Schule war. Es wird erzählt, dass er, als er diesen wichtigen Lehrsatz entdeckt hatte, den Göttern ein Dankopfer von 100 Ochsen (eine Hekatombe) dargebracht habe.

Bew. $\angle CBH = DBA$ (R)
 $\angle ABC = ABC$ (Gr. I)
 $\angle ABH = DBC$ (Gr. V₁)
 $\left. \begin{array}{l} AB = BD \\ BH = BC \end{array} \right\} \text{ (V.)}$
 $\triangle ABH \cong DBC$ (K. I)
 $\triangle ABH = \triangle BHK$ }
 $\triangle DBC = \triangle DBA$ } (= g u. h)
 $\triangle DBA = \triangle BHK$ (Gr. II)
 $\triangle DBA = \frac{1}{2} \square ABDE$ } § 55₂
 $\triangle BHK = \frac{1}{2} \square BHLK$ }
 $\frac{1}{2} \square BHLK = \frac{1}{2} \square ABDE$ (Gr. II)
 $\square BHLK = \square ABDE$ (Gr. V₃). Ebenso wird
bewiesen $\square CJLK = \square ACGF$
 $\square BCJH = \square ACGF + \square ABDE$ (Gr. V₁).
W. z. b. w.



Anmerkung. Von dem Lehrsatz des Pythagoras giebt es eine grosse Menge verschiedener Beweise (vgl. § 71). Der hier gegebene Beweis findet sich bei Euklid. Einer der einfachsten Beweise dürfte aus beistehender Figur ersichtlich sein. In derselben ist

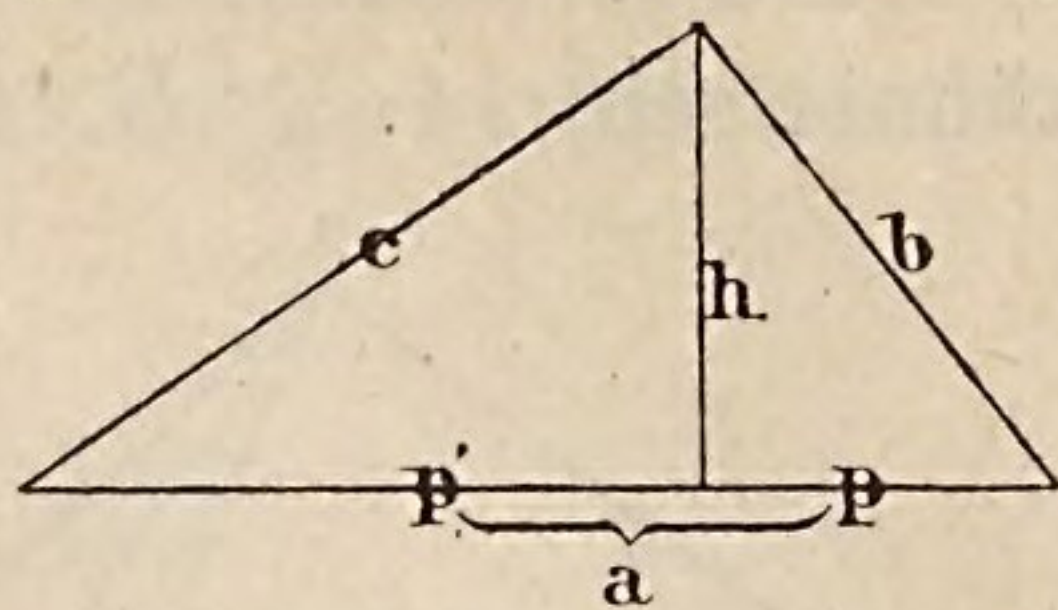
$$a^2 = (b + c)^2 - 4 \cdot \frac{bc}{2}$$

$$a^2 = b^2 + 2bc + c^2 - 2bc$$

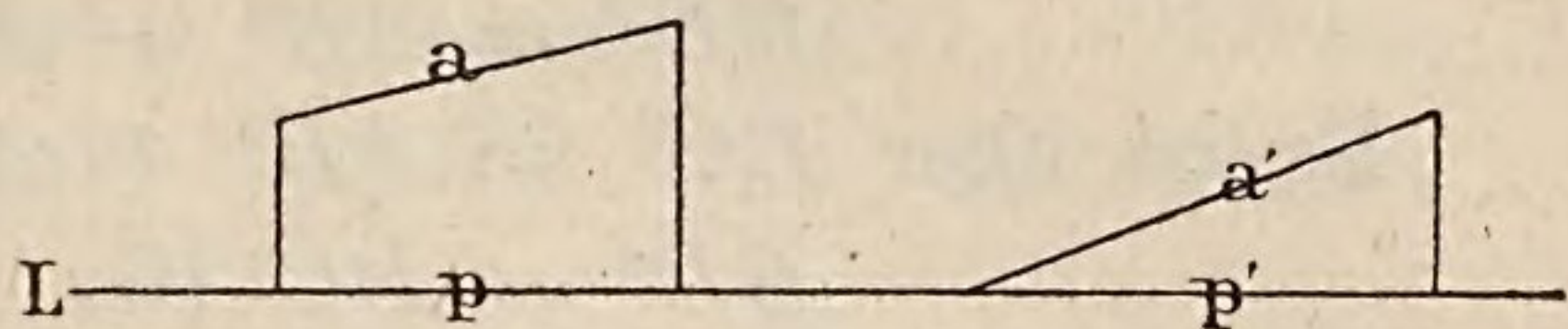
$$a^2 = b^2 + c^2.$$

II. Im Zusammenhang mit dem Lehrsatz des Pythagoras merken wir uns folgende 6 Formeln:

1. $b^2 = a \cdot p$
2. $c^2 = a \cdot p'$
3. $b^2 + c^2 = a^2$
4. $b^2 = a^2 - c^2$
5. $c^2 = a^2 - b^2$
6. $h^2 = p \cdot p'$.



p und p' sind hier die durch die Höhe h auf a gebildeten Abschnitte. Man nennt sie auch die Projektionen von b und c auf a . Unter Projektion einer Strecke auf eine Gerade versteht man das Stück der Geraden, welches zwischen den Fußpunkten der von den Endpunkten der Strecke auf die Gerade gefällten Lote liegt. Z. B. p Projektion von a auf L , kurz geschrieben $p = \text{Pr. } (a, L)$; p' Projektion von a' auf L , kurz geschrieben $p' = \text{Pr. } (a', L)$. Hiernach ist der Wortlaut von



Formel 1 und 2: Das Quadrat einer Kathete im rechtwinkligen Dreieck ist gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und der auf ihr liegenden Projektion der andern Kathete.

Formel 3: Lehrsatz des Pythagoras.

Formel 4 und 5: Das Quadrat einer Kathete im rechtwinkligen Dreieck ist gleich dem Hypotenusenquadrat vermindert um das andere Kathetenquadrat.

Formel 6: Das Quadrat der Höhe im rechtwinkligen Dreieck ist gleich dem Rechteck aus den beiden Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse.

Die Beweise von 1., 2. und 3. sind in dem Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes enthalten. 4. und 5. folgen direkt aus 3. durch Transposition. (S. Arithmetik, Gleichungen.)

Beweis von Formel 6.

$$h^2 = b^2 - p^2 \text{ (Formel 4)}$$

$$b^2 = a \cdot p \text{ (Formel 1)}$$

$$h^2 = a \cdot p - p^2 \text{ (Gr. II)} = p(a - p) = p \cdot p'.$$

W. z. b. w.

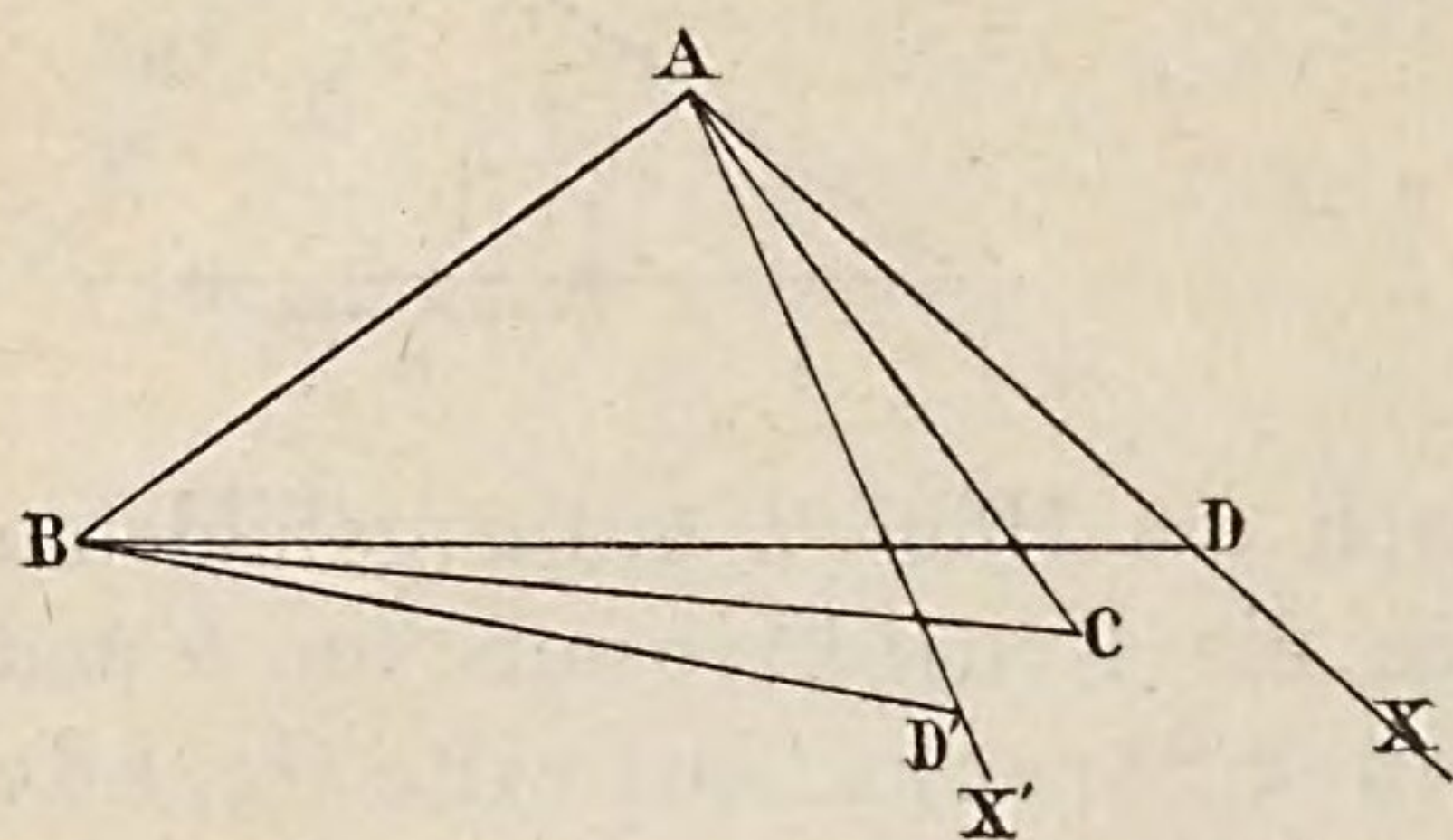
III. Umkehrung des pythagoreischen Lehrsatzes.

Ist in einem Dreieck das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern, so ist das Dreieck rechtwinklig.

Vor. $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Beh. $\sphericalangle BAC = R$.

Bew. (indirekt). Angenommen $\sphericalangle BAC$ wäre kein R , so könnte sein: 1. $\sphericalangle BAC < R$ oder 2. $\sphericalangle BAC > R$. Im ersten



Falle könnte ich ihn soviel vergrößern, dass er $= R$ würde, z. B. $BAX = R$.

Trage ich nun von A aus AC auf AX ab $= AD$ und verbinde B mit D , so ist:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 \text{ (Pythagoras).}$$

$$\text{Es ist aber } BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ (V.)}$$

$$BD^2 = BC^2 \text{ (Gr. III)}$$

$$BD = BC \text{ (Gr. V}_6\text{).}$$

Dies widerspricht aber § 29.

Folglich kann $\sphericalangle BAC$ nicht $< R$ sein.

Ebenso wird bewiesen, dass $\sphericalangle BAC$ nicht $> R$ sein kann, folglich $\sphericalangle BAC = R$. W. z. b. w.

Anmerkung: Drei Zahlen, welche so beschaffen sind, dass das Quadrat der einen gleich der Summe der Quadrate der beiden andern ist, heissen pythagoreische,

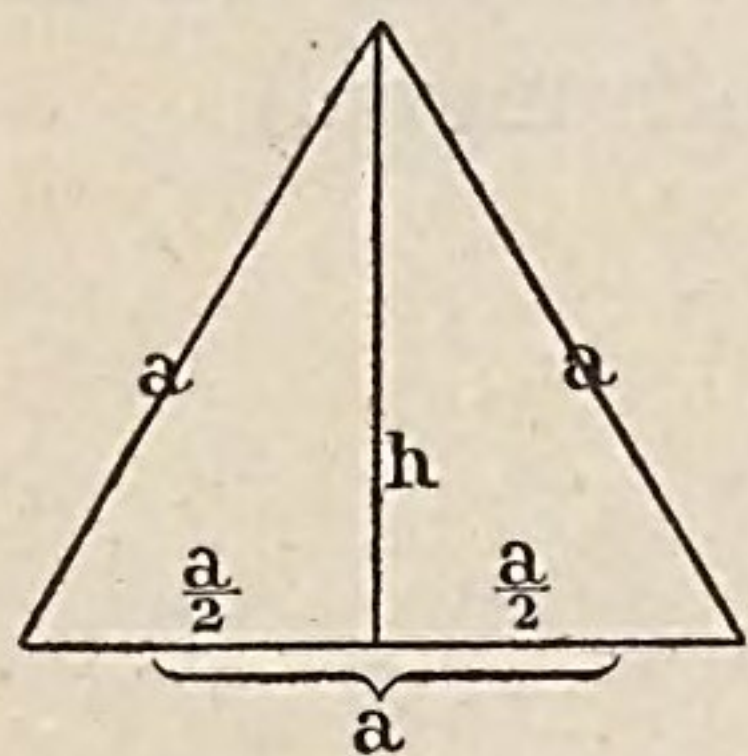
z. B. 3, 4, 5

5, 12, 13

8, 15, 17

7, 24, 25 u. s. w.

Mit Hilfe des Pythagoras kann man viele Aufgaben der rechnenden Geometrie lösen, z. B. den Inhalt des $\triangle$ zu berechnen.



$$J = \frac{a \cdot h}{2} \text{ (§ 56 IV)}$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \text{ (Pythagoras)} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{a}{2} \sqrt{3}$$

$$J = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$$

§ 58. Verallgemeinerter Pythagoras.

In jedem Dreieck ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern vermehrt oder vermindert, je nachdem der der ersten Seite gegenüberliegende Winkel ein stumpfer oder

ein spitzer ist, um das doppelte Rechteck aus einer der letzteren und der auf ihr liegenden Projektion der andern.

1. Vor. $\angle ACB > R$; $AD \perp BC$.

Beh. $AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \cdot CD$.

Bew. $AB^2 = AD^2 + BD^2$ } (Pythagoras)

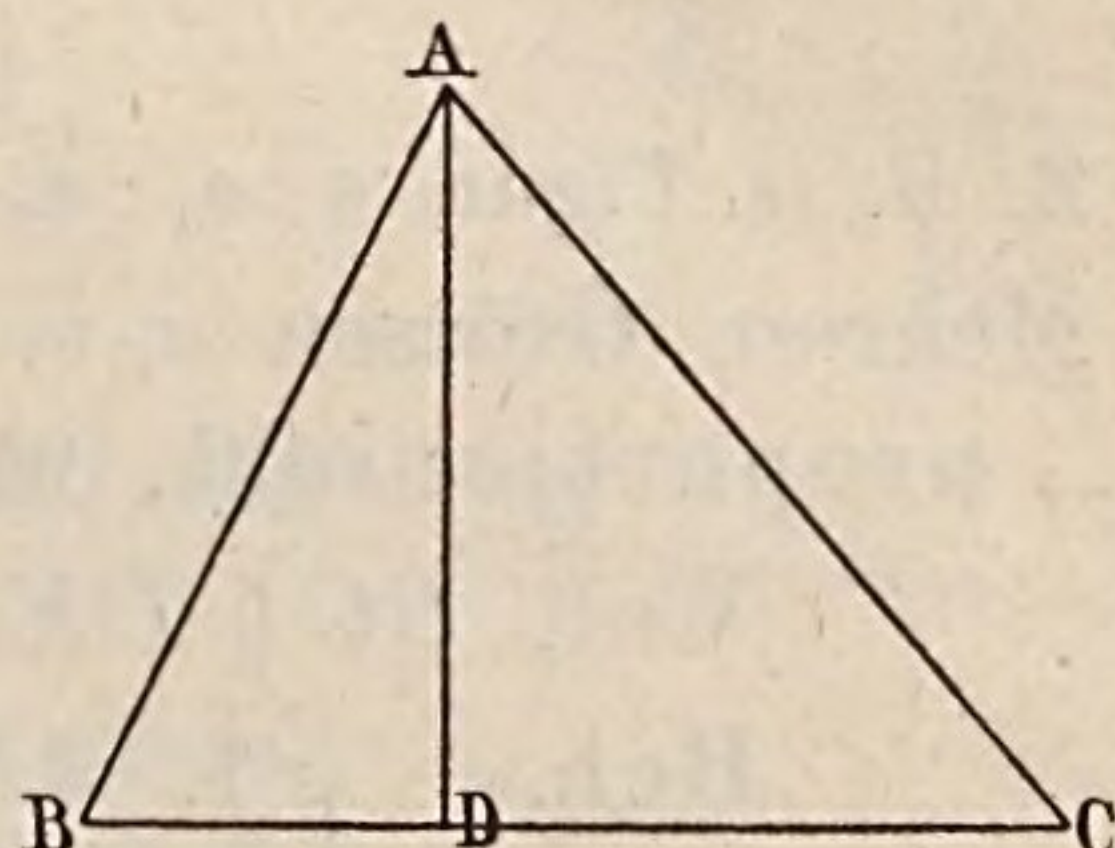
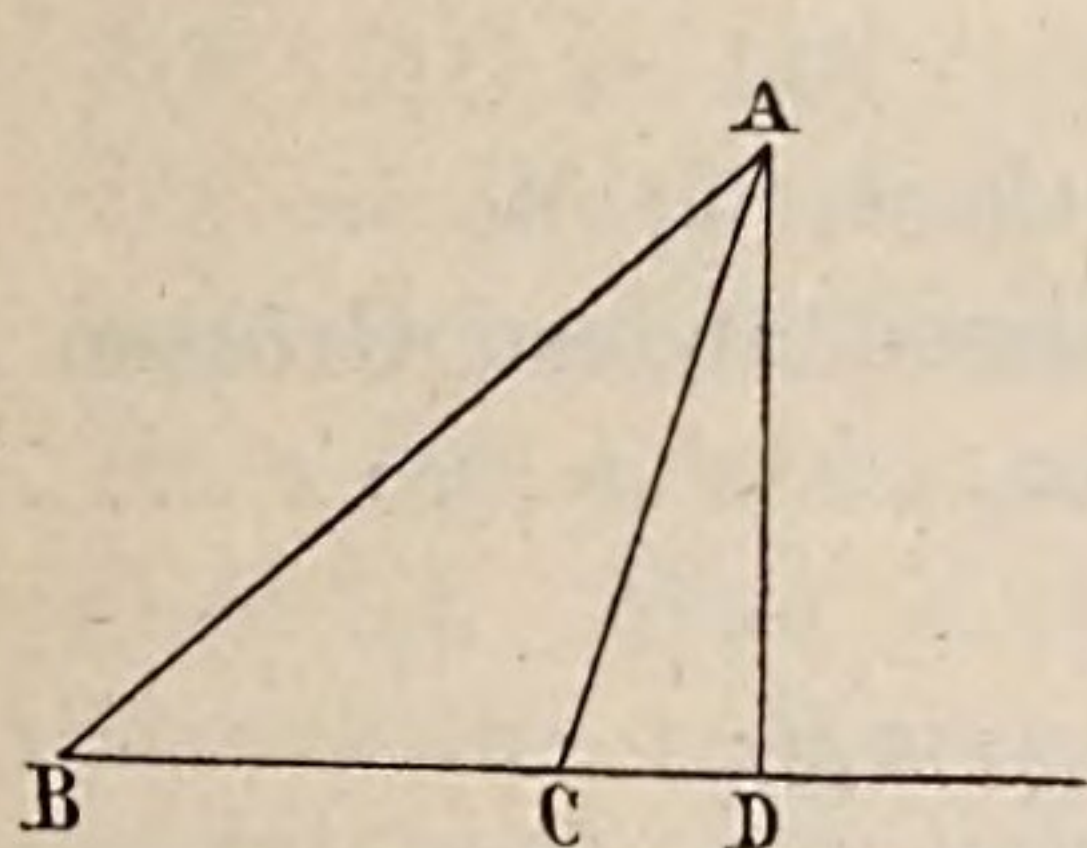
$$AD^2 = AC^2 - CD^2$$

$$BD = BC + CD \text{ (Gr. IV)}$$

$$BD^2 = BC^2 + 2BC \cdot CD + CD^2 \text{ (Gr. V}_5\text{)}$$

$$AB^2 = AC^2 - CD^2 + BC^2 + 2BC \cdot CD + CD^2 \text{ (Gr. II)}$$

oder $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot CD$. W. z. b. w.



2. Vor. $\angle ACB < R$; $AD \perp BC$.

Beh. $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot CD$.

Bew. $AB^2 = AD^2 + BD^2$ } (Pythagoras)

$$AD^2 = AC^2 - CD^2$$

$$BD = BC - CD \text{ (Gr. IV)}$$

$$BD^2 = BC^2 - 2BC \cdot CD + CD^2 \text{ (Gr. V}_5\text{)}$$

$$AB^2 = AC^2 - CD^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD + CD^2 \text{ (Gr. II)}$$

oder $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD$. W. z. b. w.

Anmerkung. Es ist gut, sich für diesen Lehrsatz die allgemeinen Formeln zu merken:

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2b \cdot \text{Pr.}(c, b) = b^2 + c^2 \pm 2c \cdot \text{Pr.}(b, c)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 \pm 2a \cdot \text{Pr.}(c, a) = a^2 + c^2 \pm 2c \cdot \text{Pr.}(a, c)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \pm 2a \cdot \text{Pr.}(b, a) = a^2 + b^2 \pm 2b \cdot \text{Pr.}(a, b).$$

Man beachte, dass, wenn der der ersten Seite gegenüberliegende Winkel R ist, die Projektion $= 0$ wird und der verallgemeinerte Pythagoras dann in den speziellen übergeht.

VIII. Von der Proportionalität und Ähnlichkeit.

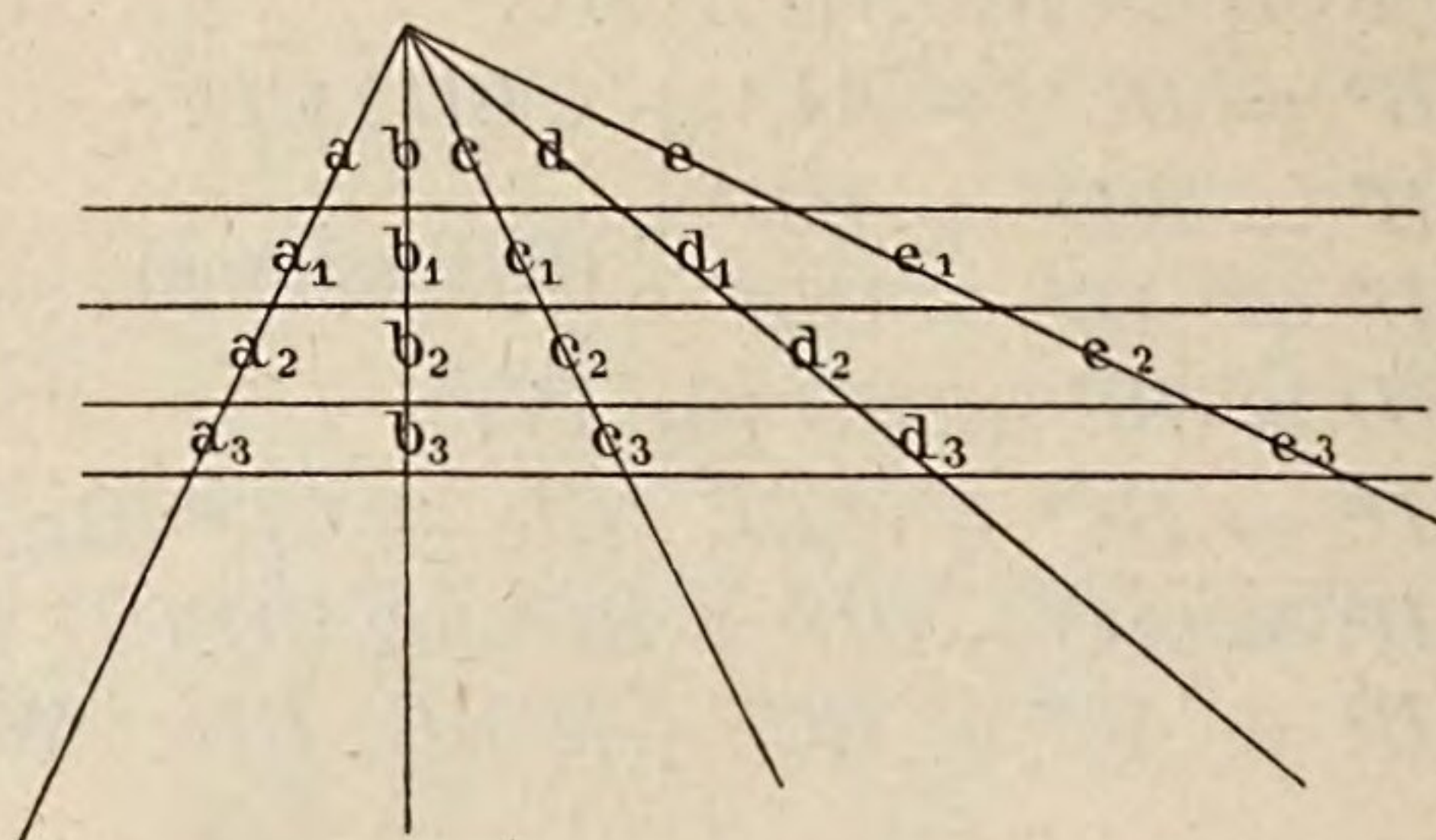
(Vgl. Arithmetik § 119—125.)

§ 59. Proportionalsatz.*)

Wird ein Strahlenbüschel von einer Schar paralleler Geraden geschnitten, so sind die entsprechenden Abschnitte

*) Aus dem Lateinischen. Proportio bedeutet „das Ebenmass“.

der Strahlen proportioniert, und die abgeschnittenen Stücke der Parallelen verhalten sich wie die in ihnen endigenden vom Strahlenpunkte aus gemessenen Abschnitte der Strahlen.

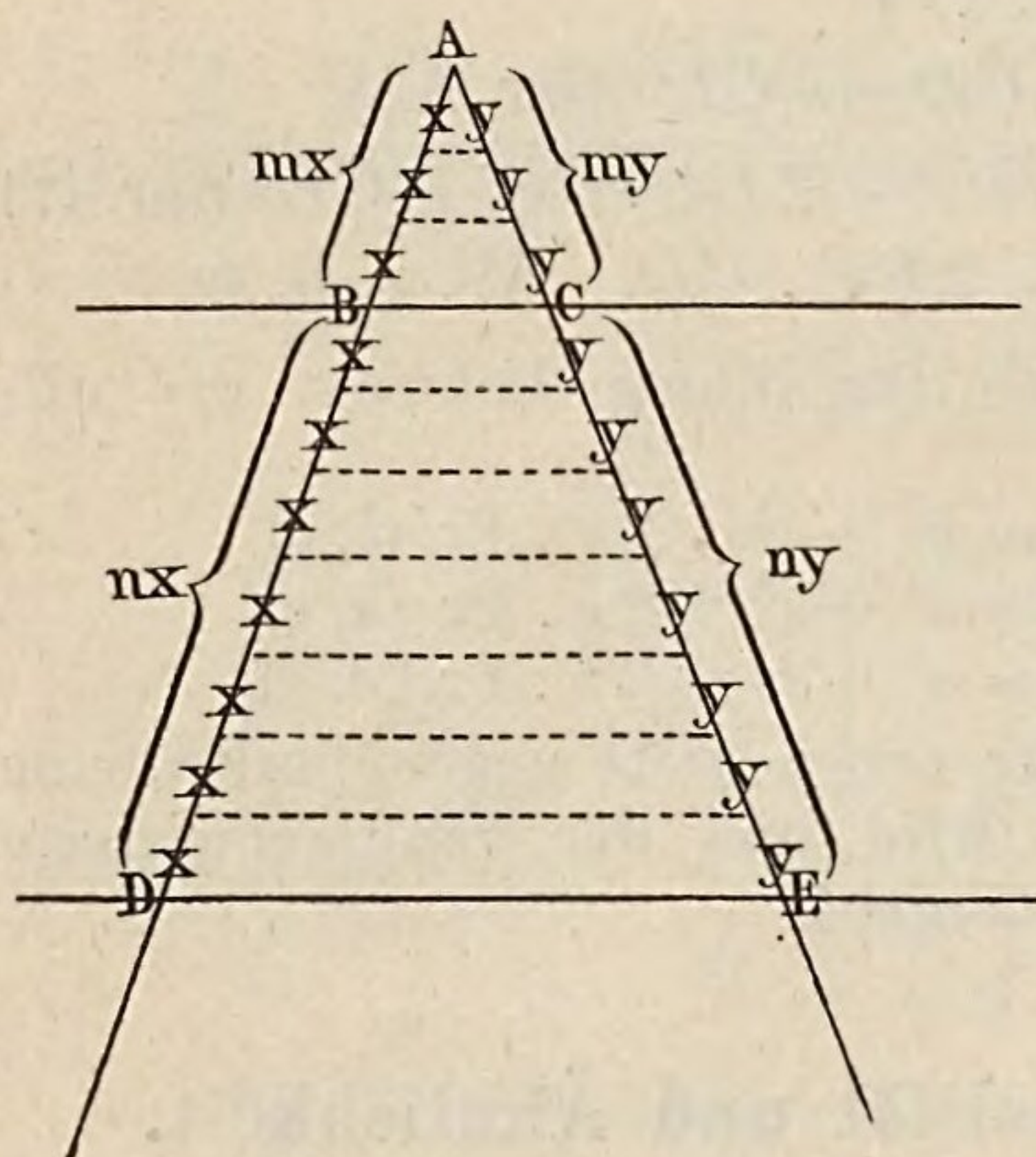


Z. B. (s. Figur) $a : a_1 : a_2 : a_3 = b : b_1 : b_2 : b_3$ u. s. w.

Mehrere Grössen $a, b, c \dots$ heissen andern Grössen $x, y, z \dots$ proportioniert, wenn $a : b : c \dots = x : y : z \dots$.

Vor. $BC \parallel DE$.

Beh. I. $\begin{cases} 1. AB : BD = AC : CE \\ 2. AB : AC = AD : AE \\ 3. BD : CE = AD : AE. \end{cases}$
 II. $\begin{cases} BC : DE = AB : AD \\ BC : DE = AC : AE. \end{cases}$



I. Bew. 1. Ich denke mir AB und BD durch ein gemeinsames Mass, z. B. x , geteilt. Dasselbe möge in AB m und in BD n mal enthalten sein, so dass also $AB = mx$ und $BD = nx$ ist. Zieht man durch die Teilpunkte Parallelen zu DE , so werden auch AC und CE in eine gleiche Anzahl unter sich gleicher Teile geteilt (§ 39, 5). Nenne ich die entstehenden Teile y , so ist $AC = my$ und $CE = ny$. In der Figur ist z. B.

$AB = 3x$, allgemein $= mx$; $AC = 3y$, allgemein $= my$
 $BD = 7x$, allgemein $= nx$; $CE = 7y$, allgemein $= ny$

$AB : BD = 3 : 7$, allgemein $= m : n$ } (Gr. V₄)
 $AC : CE = 3 : 7$, allgemein $= m : n$ }

$AB : BD = AC : CE$ (Gr. III).

$$2. \quad AB : BD = AC : CE \text{ (Teil 1)}$$

$$\frac{AB}{AB + BD} = \frac{AC}{AC + CE} \text{ (K. A.)}^*)$$

oder $AB : AD = AC : AE$

oder $AB : AC = AD : AE$. (S. Arithmetik, Proportionen.)

$$3. \quad AB : BD = AC : CE \text{ (Teil 1)}$$

$$\frac{(AB + BD) : BD = (AC + CE) : CE \text{ (K. A.)}}$$

oder $AD : BD = AE : CE$

oder $BD : CE = AD : AE$.

II. H. K. $CF \parallel AD$.

Bew. Sehe ich E als Strahlenpunkt an, so ist

$$DF : AC = DE : AE \text{ (Teil I}_3\text{)}$$

$$DF = BC \text{ (} \parallel \text{ zwischen } \parallel \text{)}$$

$$\frac{BC : AC = DE : AE \text{ (Gr. II)}}$$

oder $BC : DE = AC : AE$ oder $= AB : AD$ (Teil I₂). W. z. b. w.

Anmerkung 1. Man spricht diesen grundlegenden Satz auch oft in anderer Form aus, z. B.:

Wenn in einem Dreieck eine Parallele zu einer Seite gezogen wird, so teilt sie die beiden andern Seiten proportioniert und verhält sich zur dritten Seite wie der obere Abschnitt einer der andern Seiten zu der ganzen.

Anmerkung 2. Durch den Proportionalatz wird die Aufgabe gelöst, zu drei gegebenen Strecken die vierte Proportionale zu finden, z. B. $a : b = c : x$, ebenso: Eine Strecke nach einem gegebenen Verhältnis zu teilen und ähnliche Aufgaben mehr.

§ 60. Umkehrung des Proportionalatzes.

Wird ein Strahlenbüschel von zwei Geraden proportioniert geschnitten, so sind die schneidenden Geraden parallel.

Vor. $AB : BD = AC : CE$.

Beh. $BC \parallel DE$.

Bew. (indirekt). Angenommen BC wäre nicht $\parallel DE$, so könnte ich von B aus eine andere Gerade $\parallel DE$ ziehen, z. B. $BX \parallel DE$.

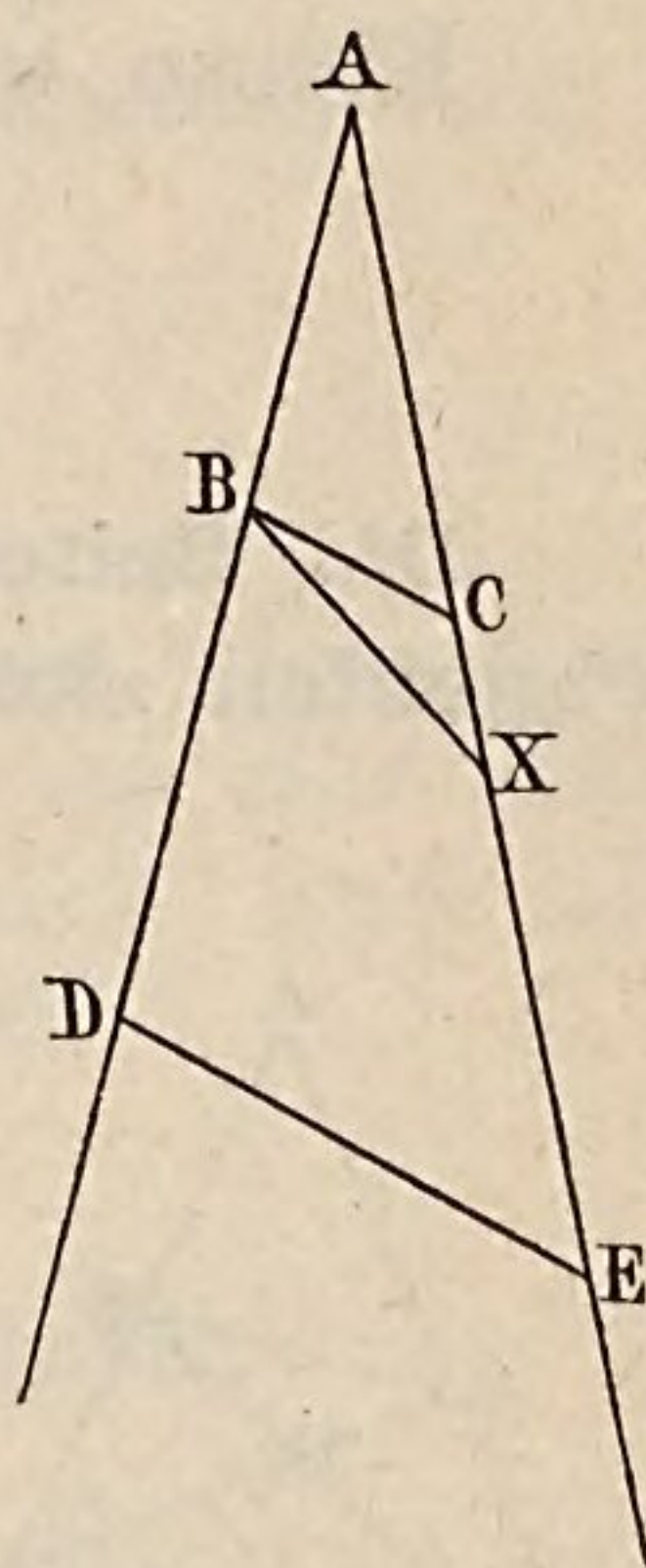
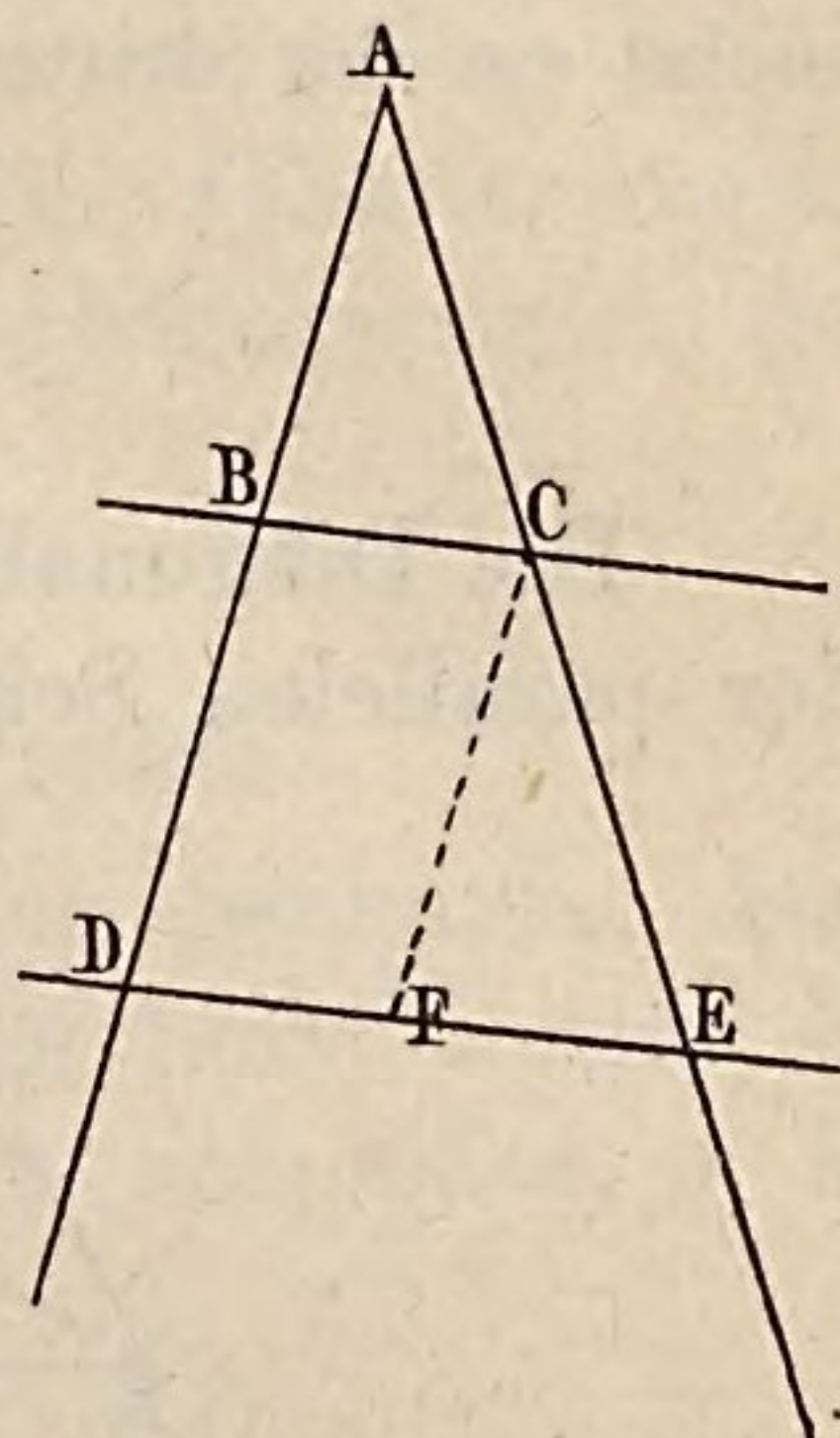
Dann wäre

$$AB : BD = AX : XE \text{ (Proportionalatz). Es ist aber } AB : BD = AC : CE \text{ (V.)}$$

$$\frac{AX : XE = AC : CE \text{ (Gr. III)}}$$

$$\frac{(AX + XE) : AX = (AC + CE) : AC \text{ (K. A.)}}$$

oder $AE : AX = AE : AC$.



*) Satz von der korrespondierenden Addition (s. § 125).

Folglich müsste $AX = AC$ sein (Gr. V₄).

Dies widerspricht aber Gr. IV.

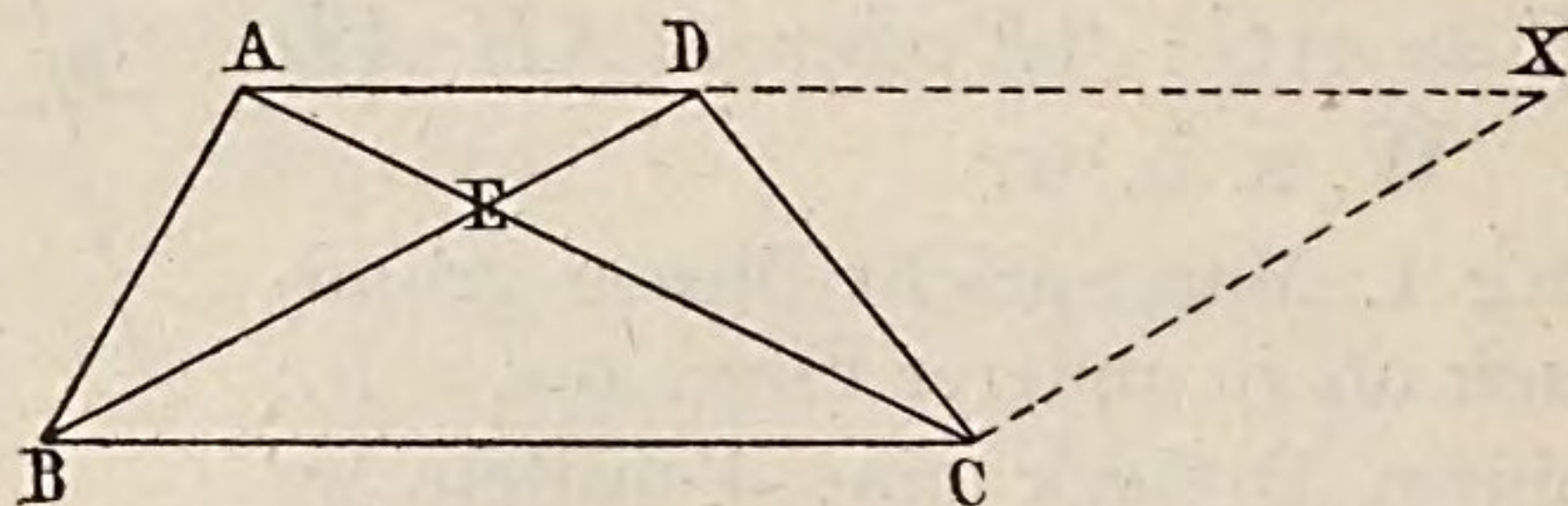
Folglich kann BX nicht $\parallel DE$ sein. Ebenso würde es mit jeder von B aus gezogenen Geraden gehen mit Ausnahme von BC . Folglich $BC \parallel DE$. W. z. b. w.

Anmerkung: Man spricht diesen Satz in Bezug auf das Dreieck aus:

Wenn eine Gerade zwei Dreiecksseiten proportioniert schneidet, so ist sie der dritten Seite parallel.

§ 61.

Die Diagonalen eines Trapezes schneiden sich im Verhältnis der parallelen Seiten.



Vor. $AD \parallel BC$.

Beh. 1. $AE : EC = AD : BC$.

2. $DE : EB = AD : BC$.

H. K. $CX \parallel BD$.

Bew. $AE : EC = AD : DX$ (Proportionalsatz)

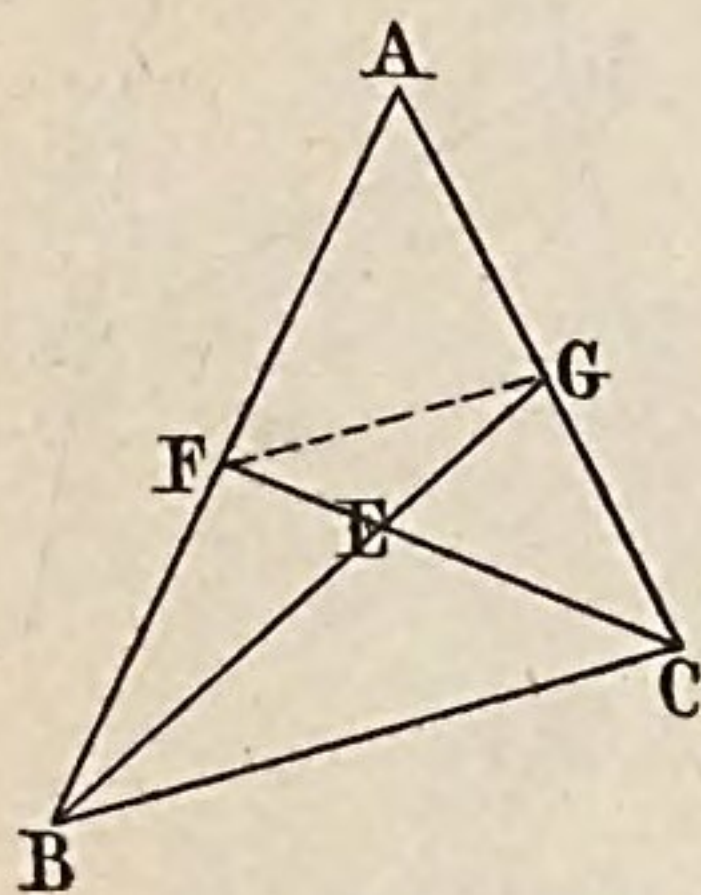
$DX = BC$ ($\parallel$ zwischen $\parallel$)

$AE : EC = AD : BC$ (Gr. II). W. z. b. w.

Ebenso wird Teil 2. bewiesen.

§ 62.

Die Seiten halbierenden Transversalen eines Dreiecks schneiden sich im Verhältnis 1 : 2, von den Mitten der Seiten an gerechnet, (im Verhältnis 2 : 1, von den Ecken an gerechnet).



Vor. $AF = BF$; $AG = CG$.

Beh. $FE : EC = 1 : 2$

$GE : EB = 1 : 2$

oder $CE : EF = 2 : 1$

$BE : EG = 2 : 1$.

H. K. FG .

Bew. $FG \parallel BC$ (§ 60)

$$\frac{FE}{EC} = \frac{FG}{BC} \quad (\S 61)$$

$$\frac{FG}{BC} = \frac{AF}{AB} \quad (\text{Proportionalatz}) = 1 : 2 \quad (\text{V.})$$

$$\frac{FE}{EC} = 1 : 2 \quad (\text{Gr. III}).$$

Ebenso $GE : EB = 1 : 2$. W. z. b. w.

§ 63.

Die drei Seiten halbierenden Transversalen eines Dreiecks schneiden sich in **einem** Punkte. (Vierter merkwürdiger Punkt des Dreiecks; er ist der Schwerpunkt des Dreiecks.)

Vor. $ABC \triangle$.

Beh. t, t', t'' schneiden sich in einem Punkte.

Bew. t' und t'' schneiden sich in E . Ich behaupte, dass auch t durch E geht. Angenommen t ginge nicht durch E , so müsste t doch BG in einem andern Punkte schneiden, z. B. in X . Dann wäre

$$BX : XG = 2 : 1 \quad (\S 62; X \text{ Schnittpunkt von } t' \text{ u. } t)$$

$$BE : EG = 2 : 1 \quad (\S 62; E \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad t' \text{ u. } t'')$$

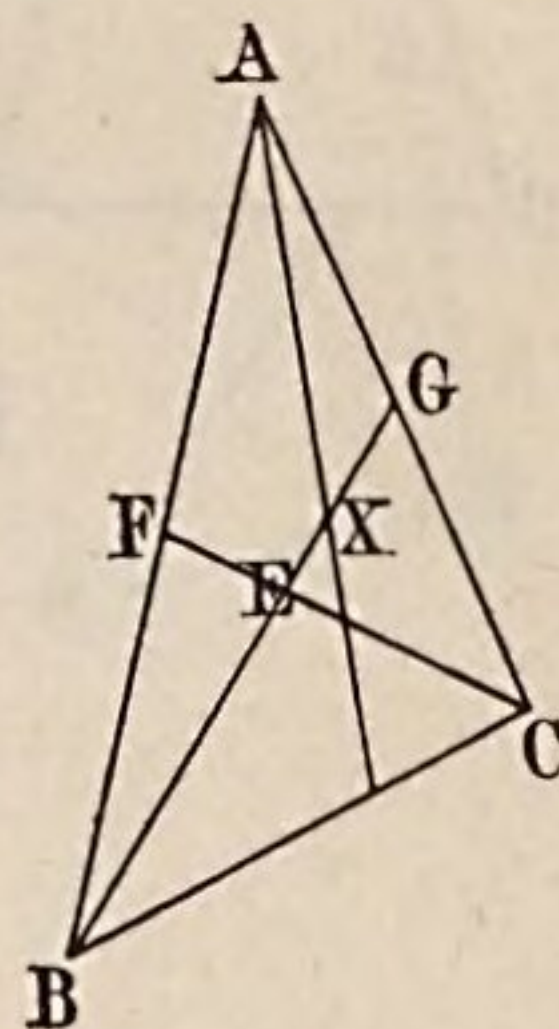
$$\frac{BX : XG}{BE : EG} \quad (\text{Gr. III})$$

$$\frac{(BX + XG) : BX}{\text{oder } BG : BX} = \frac{(BE + EG) : BE}{BG : BE} \quad (\text{K. A.})$$

$$\text{oder } BG : BX = BG : BE$$

$$BX = BE \quad (\text{Gr. V}_4).$$

Dies widerspricht aber Gr. IV. Folglich kann t nicht durch X gehen. Ebenso würde es mit allen andern Punkten ausser mit E gehen. Folglich geht auch t durch E , oder t, t' und t'' schneiden sich in einem Punkte. W. z. b. w.

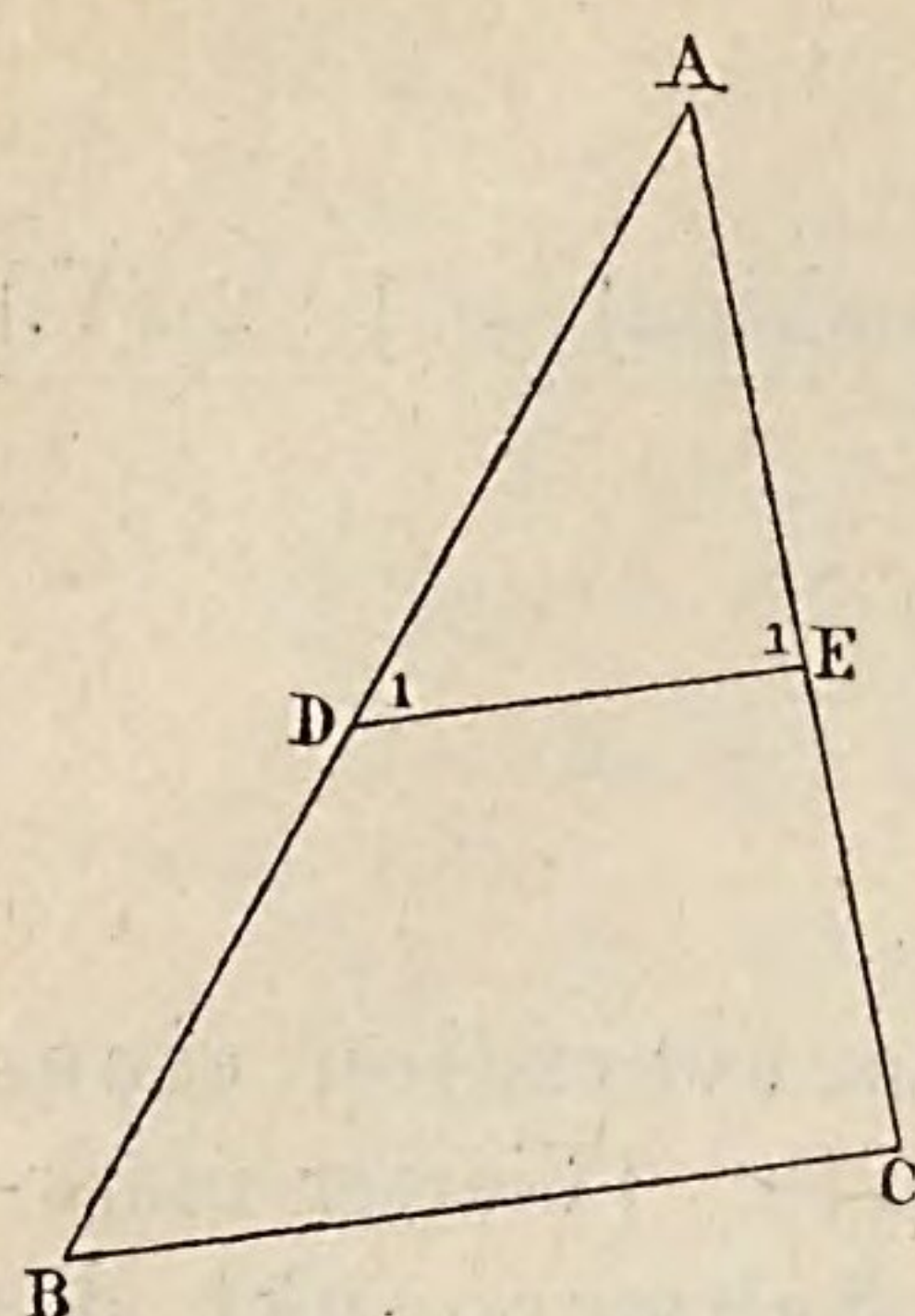


§ 64.

Erklärung. Zwei Figuren heissen ähnlich ($\sim$), wenn sie in der Form übereinstimmen. Dies ist der Fall, wenn alle Winkel der Reihe nach gleich und alle Seiten der Reihe nach proportioniert sind.

§ 65. Grundlegender Ähnlichkeitssatz.

Zieht man in einem Dreieck eine Parallele zu einer Seite, so ist das abgeschnittene Dreieck dem ursprünglichen ähnlich.



Vor. $DE \parallel BC$.

Beh. $\triangle ADE \sim ABC$.

Bew. 1. $\sphericalangle A = A$ (Gr. I)

2. $\sphericalangle D_1 = B$

3. $\sphericalangle E_1 = C$ } (G. $\sphericalangle$ a. $\parallel$).

4. $AD : DE = AB : BC$ } (Pro-

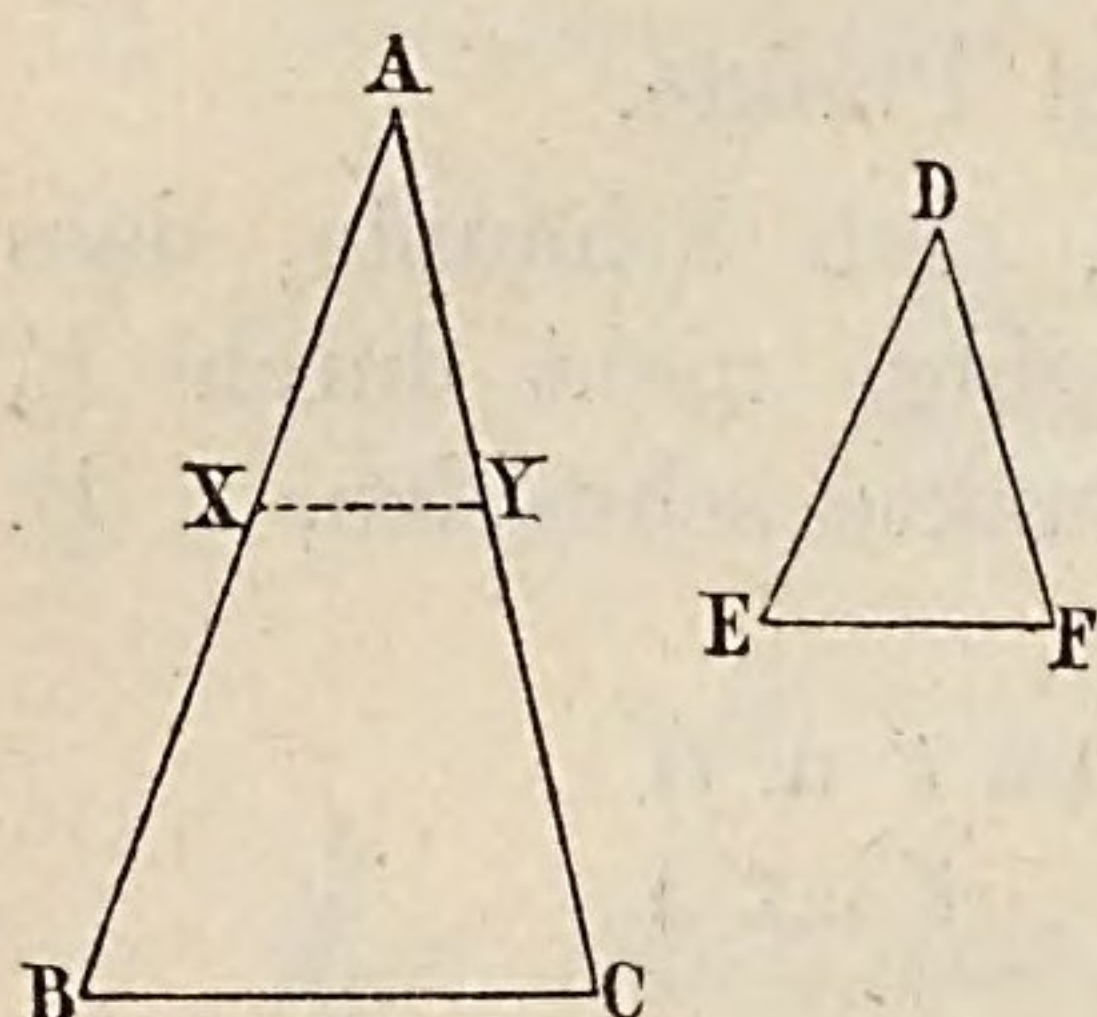
5. $DE : AE = BC : AC$ } portional-

6. $AE : AD = AC : AB$ } satz)

$\triangle ADE \sim ABC$ (Erklärung).

W. z. b. w.

§ 66. Erster Ähnlichkeitssatz. (Ä. I)



Dreiecke sind ähnlich, wenn sie zwei Seiten proportioniert und die von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich haben.

Vor. $AB : AC = DE : DF$

$\sphericalangle A = D$.

Beh. $\triangle ABC \sim DEF$.

H. K. $DE = AX$; $DF = AY$; XY .

Bew. $AB : AC = DE : DF$ (V.)

$DE = AX$
 $DF = AY$ } (H. K.)

$AB : AC = AX : AY$ (Gr. II)

$XY \parallel BC$ (§ 60)

$\triangle AXY \sim ABC$ (Grundlegender Ä.)

$\triangle AXY \cong DEF$ (K. I)

$\triangle DEF \sim ABC$ (Gr. II). W. z. b. w.

Folgerung. In ähnlichen Dreiecken sind die homologen Winkel gleich und die homologen Seiten sind proportioniert. In diesem Falle ist also:

$\sphericalangle B = E$

$\sphericalangle C = F$

$AB : BC = DE : EF$ } (h. St.).

$AC : BC = DF : EF$

§ 67. Zweiter Ähnlichkeitssatz. (Ä. II)

Dreiecke sind ähnlich, wenn sie zwei Winkel gleich haben.

Vor. $\sphericalangle B = E$; $\sphericalangle C = F$.

Beh. $\triangle ABC \sim DEF$.

H. K. $DE = AX$; $XY \parallel BC$.

Bew. $XY \parallel BC$ (H. K.)

$\triangle AXY \sim ABC$ (Grundlegender Ä.)

$\sphericalangle X_1 = B$ } (G. $\sphericalangle$ an $\parallel$)

$\sphericalangle Y_1 = C$ }

$\sphericalangle B = E$ } (V.)

$\sphericalangle C = F$ }

$\sphericalangle X_1 = E$ } (Gr. II)

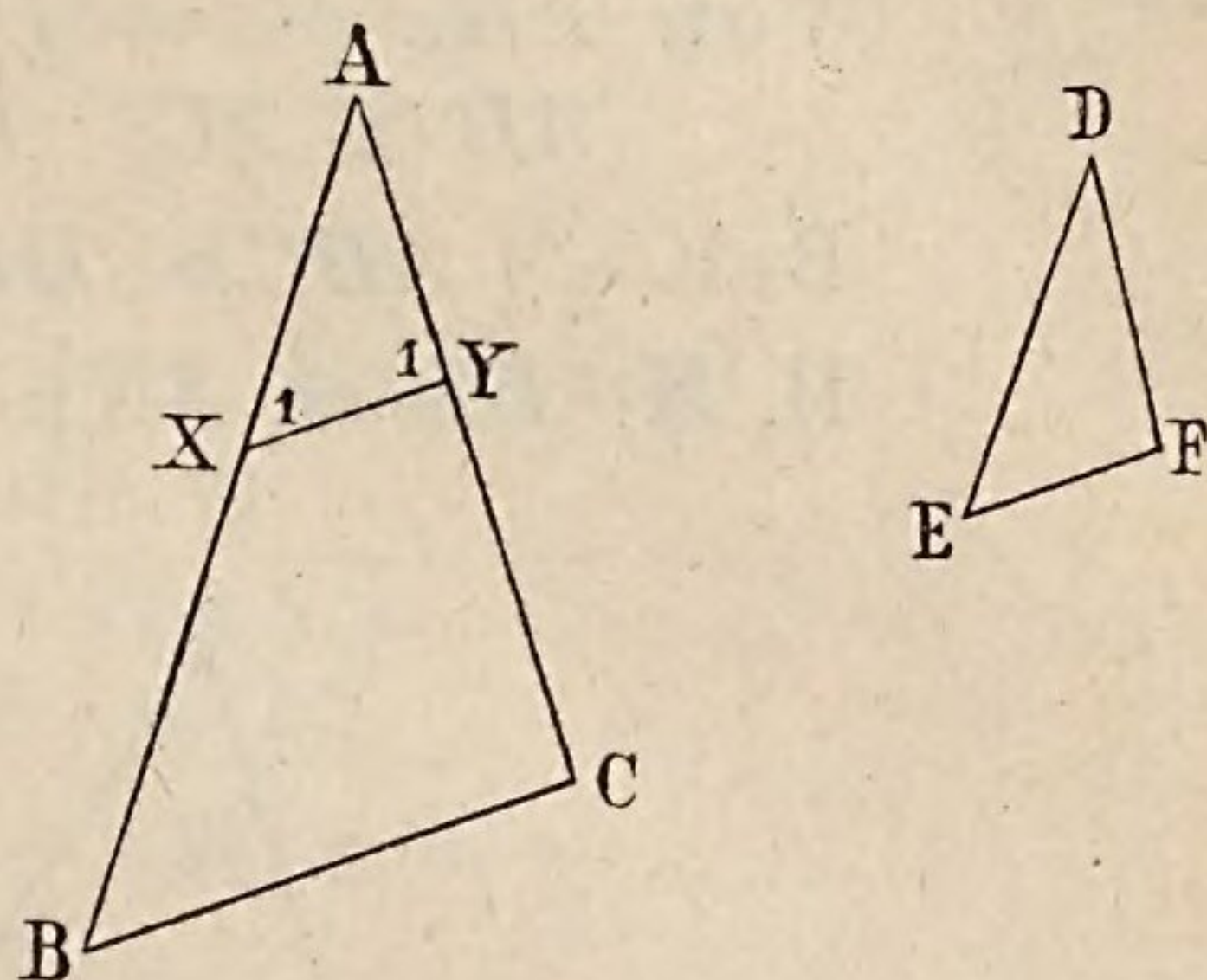
$\sphericalangle Y_1 = F$ }

$AX = DE$ (H. K.)

$\triangle AXY \cong DEF$ (K. II)

$\triangle DEF \sim ABC$ (Gr. II).

W. z. b. w.



Folgerung. Dreiecke sind ähnlich, wenn ihre Seiten parallel sind.

§ 68. Dritter Ähnlichkeitssatz. (Ä. III)

Dreiecke sind ähnlich, wenn die drei Seiten proportioniert sind.

Vor. $AB : AC = DE : DF$

$AB : BC = DE : EF$

$AC : BC = DF : EF$

oder kurz: $AB : BC : AC = DE : EF : DF$.

Beh. $\triangle ABC \sim DEF$.

H. K. $DE = AX$; $DF = AY$; XY .

Bew. $AB : AC = DE : DF$ (V.)

$DE = AX$
 $DF = AY$ } (H. K.)

$AB : AC = AX : AY$ (Gr. II)

$XY \parallel BC$ (§ 60)

$\triangle AXY \sim ABC$ (Grundlegender Ä.)

$AB : BC = AX : XY$ (h. St.)

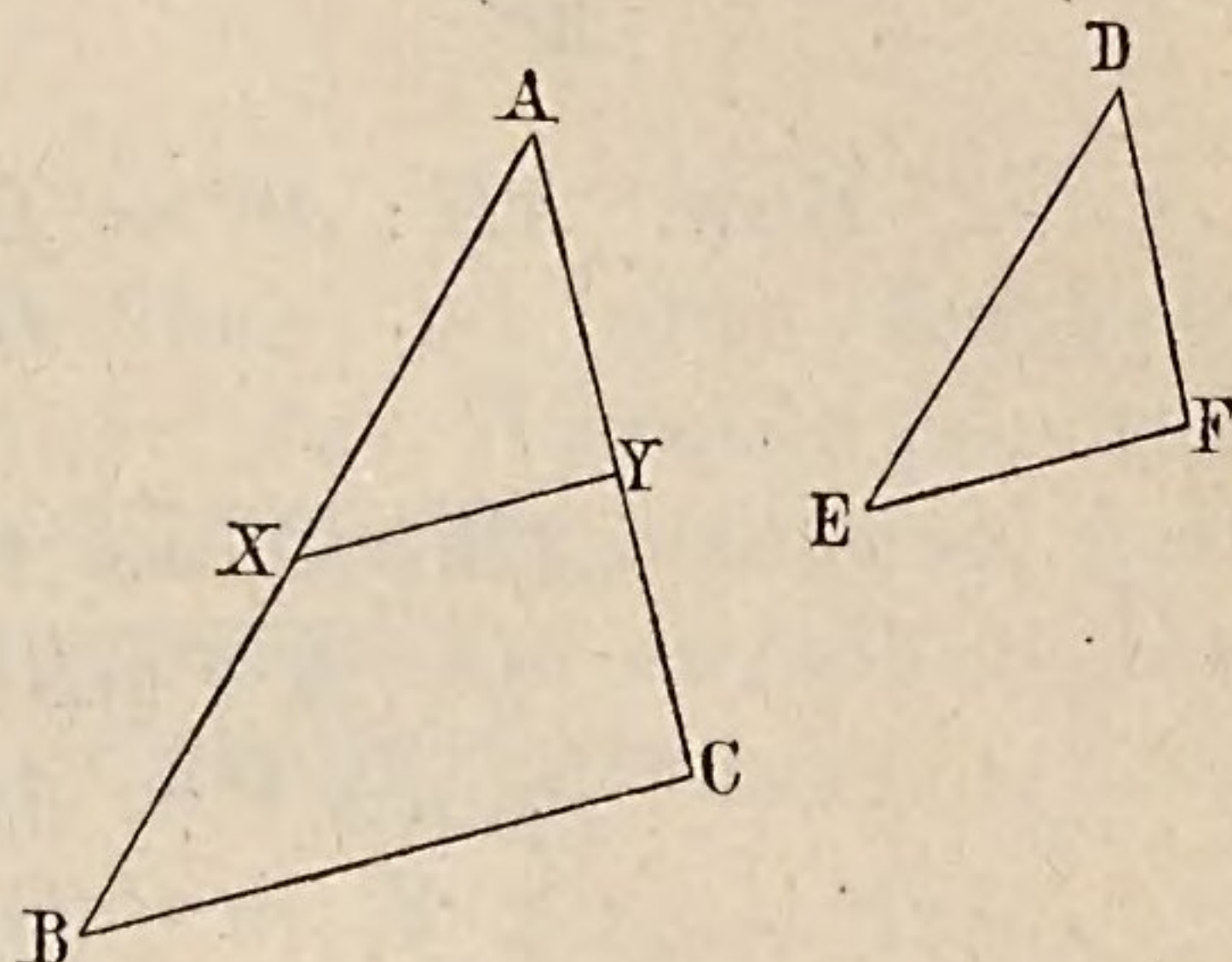
$AB : BC = DE : EF$ (V.)

$XY = EF$ (Proportionslehre, § 123₆).

$AY = DF$ } (H. K.)
 $AX = DE$ }

$\triangle AXY \cong DEF$ (K. III)

$\triangle DEF \sim ABC$ (Gr. II.). W. z. b. w.



§ 69. Vierter Ähnlichkeitssatz. (Ä. IV)

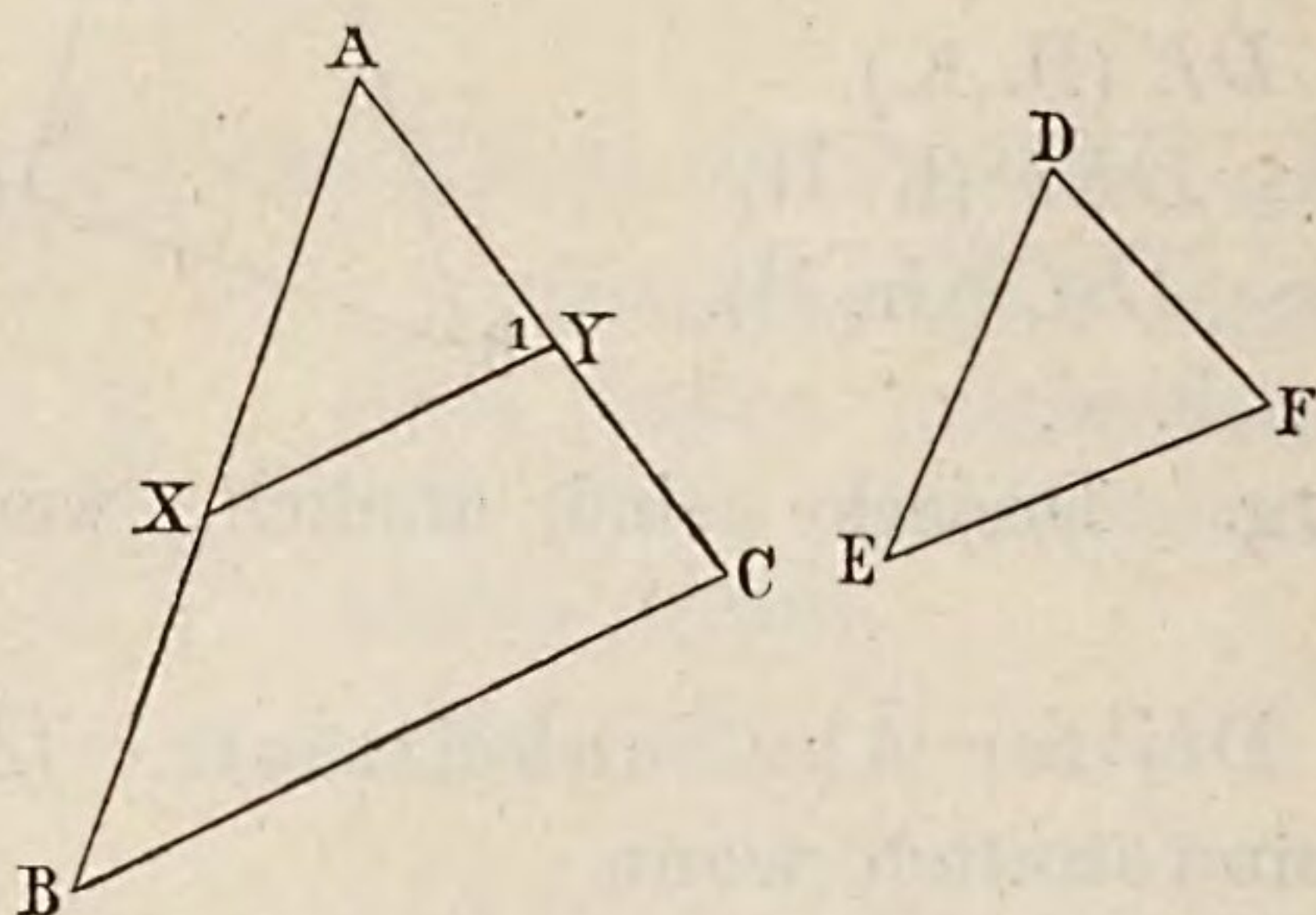
Dreiecke sind ähnlich, wenn sie zwei Seiten proportioniert und die der grösseren gegenüberliegenden Winkel gleich haben.

Vor. $AB : AC = DE : DF$

$AB > AC; DE > DF; \sphericalangle C = F$.

Beh. $\triangle ABC \sim DEF$.

H. K. $DE = AX; DF = AY; XY$.



Bew. $AB : AC = DE : DF$ (V.)

$DE = AX$
 $DF = AY$ } (H. K.)

$AB : AC = AX : AY$ (Gr. II)

$XY \parallel BC$ (§ 60)

$\triangle AXY \sim ABC$ (Grundlegender Ä.)

$\sphericalangle Y_1 = C$ (G. $\sphericalangle$ an $\parallel$)

$\sphericalangle C = F$ (V.)

$\sphericalangle Y_1 = F$ (Gr. III)

$\triangle AXY \cong DEF$ (K. IV)

$\triangle DEF \sim ABC$ (Gr. II). W. z. b. w.

Folgerung. Aus den Ähnlichkeitssätzen folgt: In ähnlichen Dreiecken sind homologe Höhen, Seiten- und Winkel halbierende Transversalen und die Radien der um- und eingeschriebenen Kreise einander und den Seiten proportional. (Es entstehen durch die genannten Linien immer ähnliche Dreiecke.)

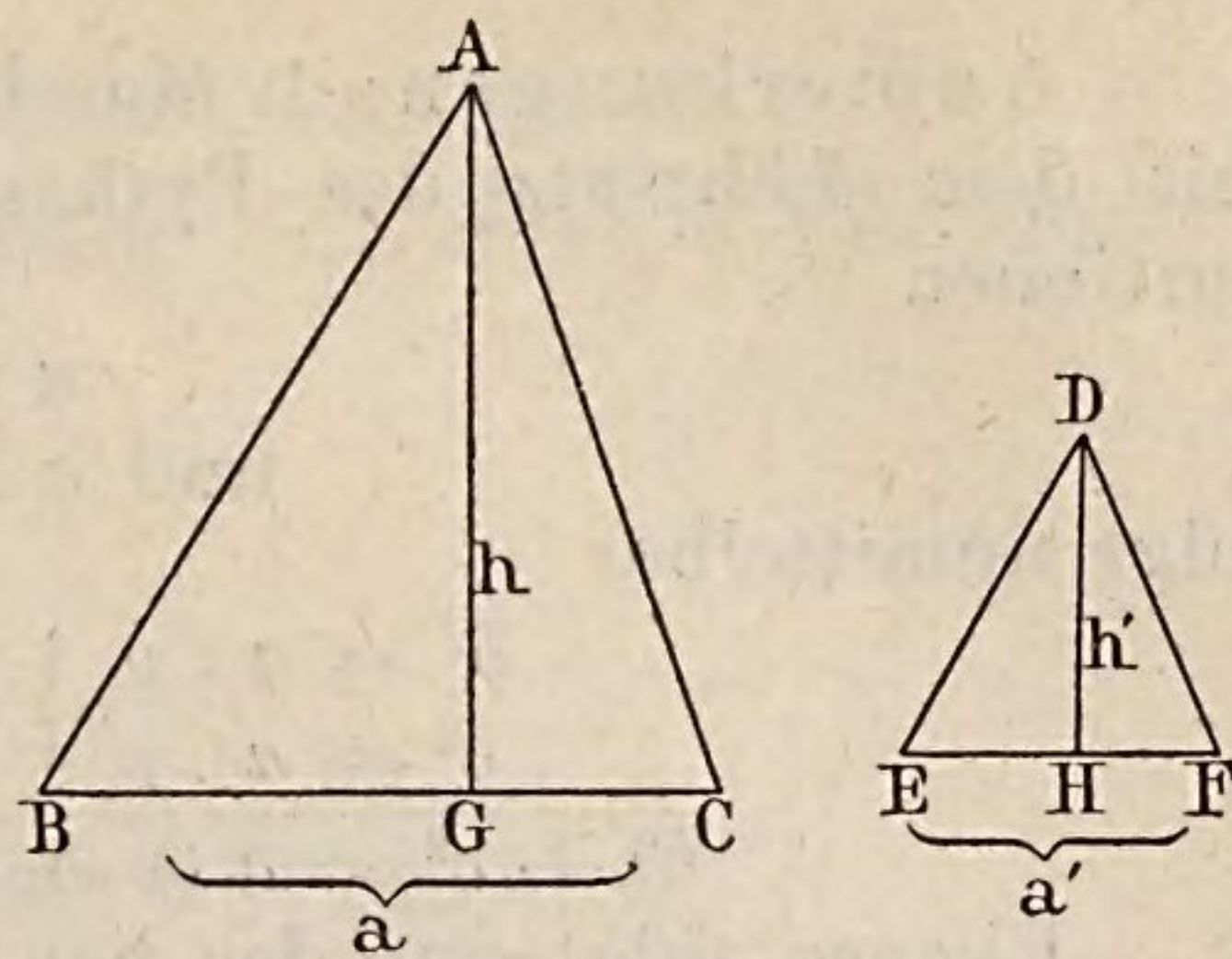
§ 70.

Die Inhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten oder Höhen.

Vor. $\triangle ABC \sim DEF$.

Beh. $\triangle ABC : \triangle DEF = a^2 : a'^2 =$
 $= h^2 : h'^2$.

Bew. $\triangle ABC = \frac{a \cdot h}{2}$ } (Inhalts-
 $\triangle DEF = \frac{a' \cdot h'}{2}$ } formel)



$$\begin{aligned} \triangle ABC : \triangle DEF &= a \cdot h : a' \cdot h' \text{ (Gr. V}_4\text{)} \\ h : h' &= a : a' \text{ (§ 69, Folgerung)} \\ a : a' &= a : a' \text{ (Gr. I)} \\ \hline a \cdot h : a' \cdot h' &= a^2 : a'^2 \text{ (Gr. V}_3\text{)} \\ \hline \triangle ABC : \triangle DEF &= a^2 : a'^2 \text{ (Gr. III)} \\ &\text{oder } = h^2 : h'^2. \text{ W. z. b. w.} \end{aligned}$$

Folgerung. Ähnliche Polygone verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten oder Diagonalen. (Durch homologe Diagonalen entstehen immer ähnliche Dreiecke.)

§ 71.

1. Im rechtwinkligen Dreieck ist eine Kathete mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und der Projektion dieser Kathete auf die Hypotenuse, und die Höhe ist die mittlere Proportionale zwischen den Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse.

Vor. $\sphericalangle A = R$; $AD \perp BC$.

Beh. I. 1. $BC : AB = AB : BD$

2. $BC : AC = AC : CD$

II. $BD : AD = AD : CD$.

Bew. I. $\sphericalangle B = B$ (Gr. I)

$\sphericalangle A = D_1$ (R)

$\triangle ABC \sim ABD$ (Ä. II)

$BC : AB = AB : BD$ (h. St.)

Ebenso $\triangle ABC \sim ADC$ (Ä. II)

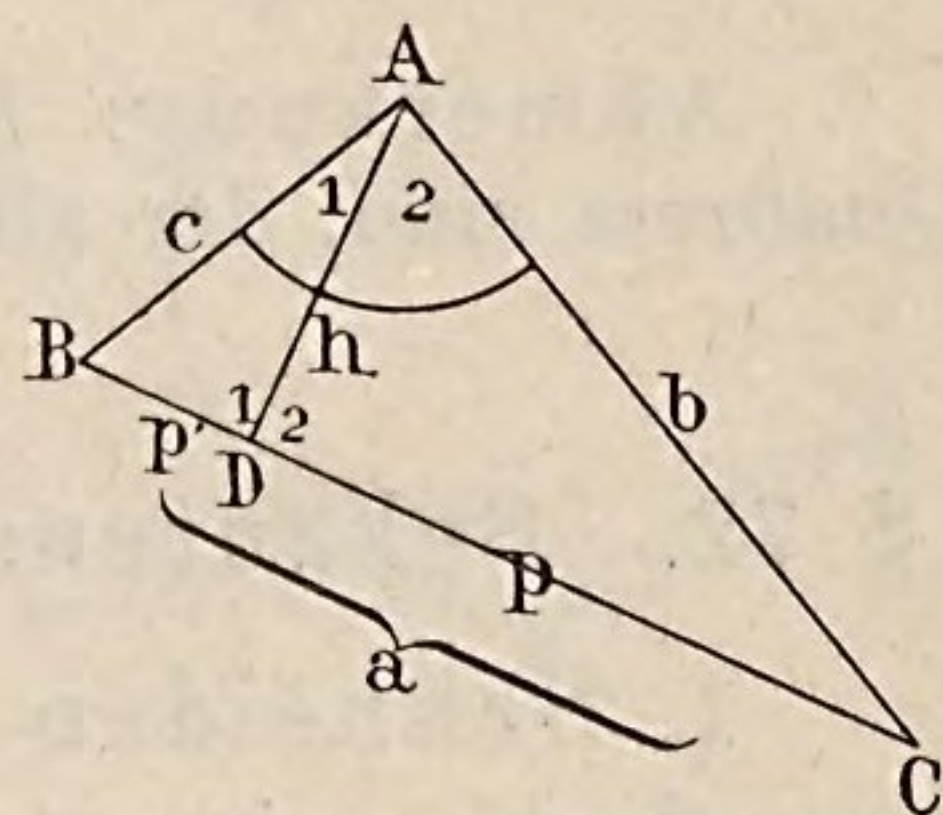
$BC : AC = AC : CD$ (h. St.)

II. $\sphericalangle D_1 = D_2$ (R)

$\sphericalangle B = A_2$ (Komplement $\sphericalangle$ zu A_1)

$\triangle ABD \sim ADC$ (Ä. II)

$BD : AD = AD : CD$ (h. St.). W. z. b. w.



Anmerkungen: 1. Man beachte den Zusammenhang dieses Satzes mit dem Lehrsatz des Pythagoras (§ 57). Aus den bewiesenen Proportionen

$$a : b = b : p \\ \text{und } a : c = c : p'$$

folgt unmittelbar

$$\left. \begin{array}{l} b^2 = a \cdot p \\ c^2 = a \cdot p' \end{array} \right\} \text{ (Proportionslehre)}$$

$$b^2 + c^2 = a(p + p') = a \cdot a = a^2.$$

Ebenso folgt aus der bewiesenen Proportion

$$p : h = h : p'$$

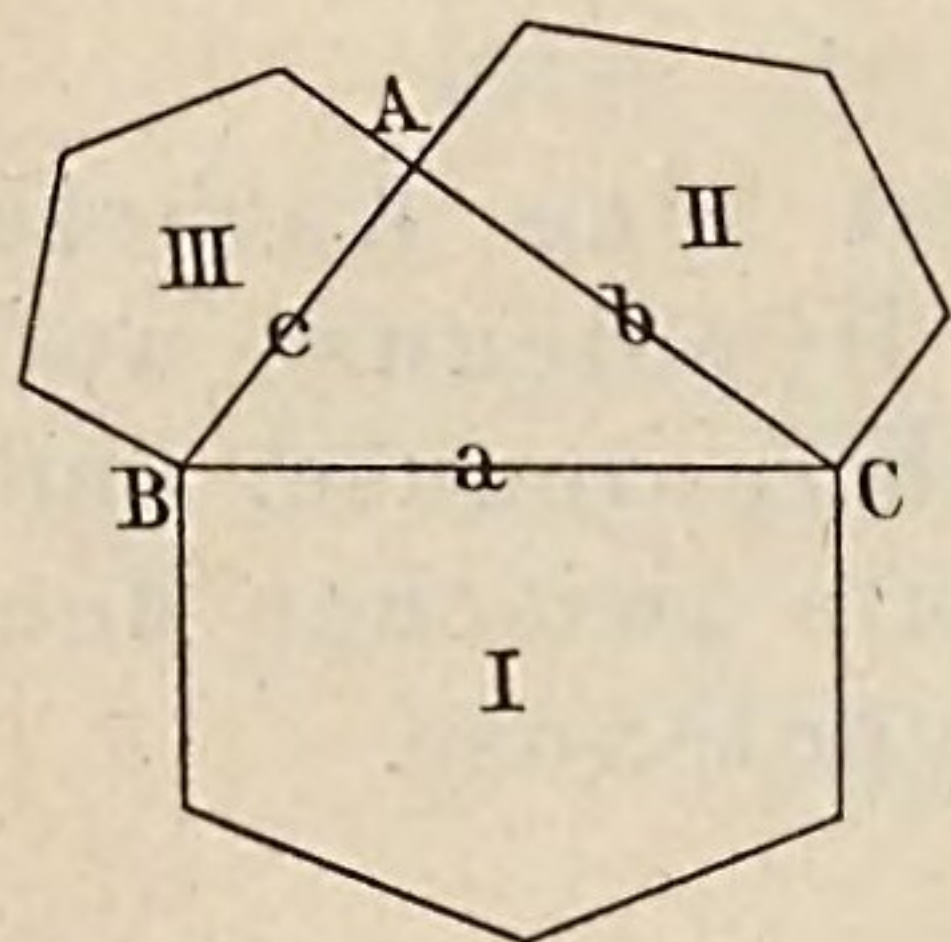
unmittelbar

$$h^2 = p \cdot p'.$$

2. Durch diesen Lehrsatz wird die Aufgabe gelöst: zu zwei gegebenen Strecken die mittlere Proportionale zu zeichnen (2 Lösungen).

Allgemeiner Pythagoras.

2. Sind über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Figuren konstruiert, so ist die Figur über der Hypotenuse gleich der Summe der beiden Kathetenfiguren.



Vor. $\sphericalangle BAC = R$

$I \sim II \sim III.$

Beh. $I = II + III.$

Bew. $II : III = b^2 : c^2$ (§ 70, Folg.)

$$(II + III) : III = (b^2 + c^2) : c^2 \text{ (K. A.)}$$

oder $(II + III) : (b^2 + c^2) = III : c^2$

$$I : III = a^2 : c^2 \text{ (§ 70, Folg.)}$$

oder $I : a^2 = III : c^2$

$$(II + III) : (b^2 + c^2) = I : a^2 \text{ (Gr. III)}$$

oder $(II + III) \cdot a^2 = I \cdot (b^2 + c^2)$ (§ 122)

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ (Pythagoras)}$$

$$II + III = I \text{ (Gr. V}_4\text{). W. z. b. w.}$$

Anmerkung: Man beachte, dass, wenn die ähnlichen Figuren Quadrate sind, der allgemeine Pythagoras in den speziellen übergeht.

§ 72. Sekantensatz (Sehnensatz) und Tangentensatz.

1. Schneiden sich zwei Sekanten ausserhalb oder innerhalb eines Kreises (Sehnen), so sind die vom Schnittpunkte aus gemessenen Abschnitte der einen innere, die der andern äussere Glieder einer Proportion, oder: die Produkte aus den vom Schnittpunkt aus gemessenen Abschnitten jeder Sekante sind einander gleich.

1. Vor. ADS und BCS sind Sekanten.

Beh. $AS : BS = CS : DS$ oder $SC \cdot SB = SD \cdot SA$.

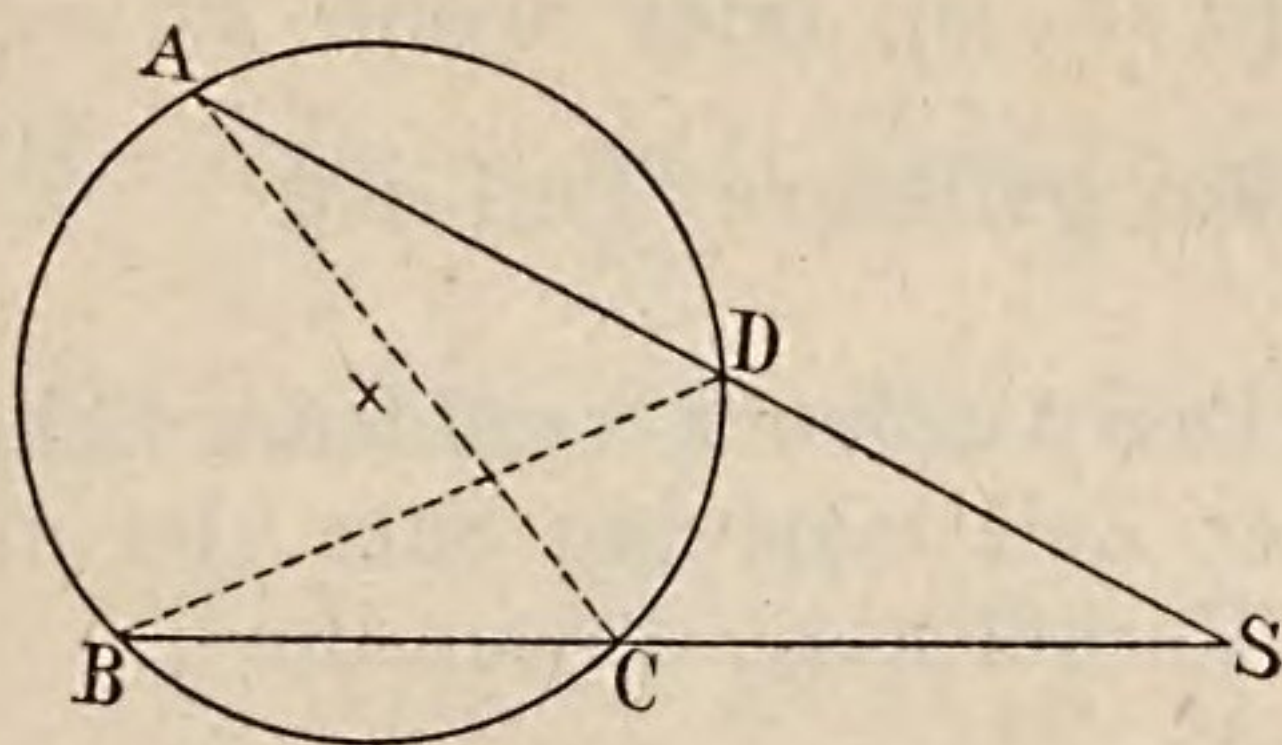
H. K. AC ; BD .

Bew. $\sphericalangle S = S$ (Gr. I)

$\sphericalangle A = B$ (P. $\sphericalangle$)

$\triangle ACS \sim BDS$ (Ä. II)

$CS : DS = AS : BS$ (h. St.) W. z. b. w.



2. (Sehnensatz.)

Vor. ASC und BSD sind Sehnen.

Beh. $AS : BS = DS : CS$ oder $SA \cdot SC = SB \cdot SD$.

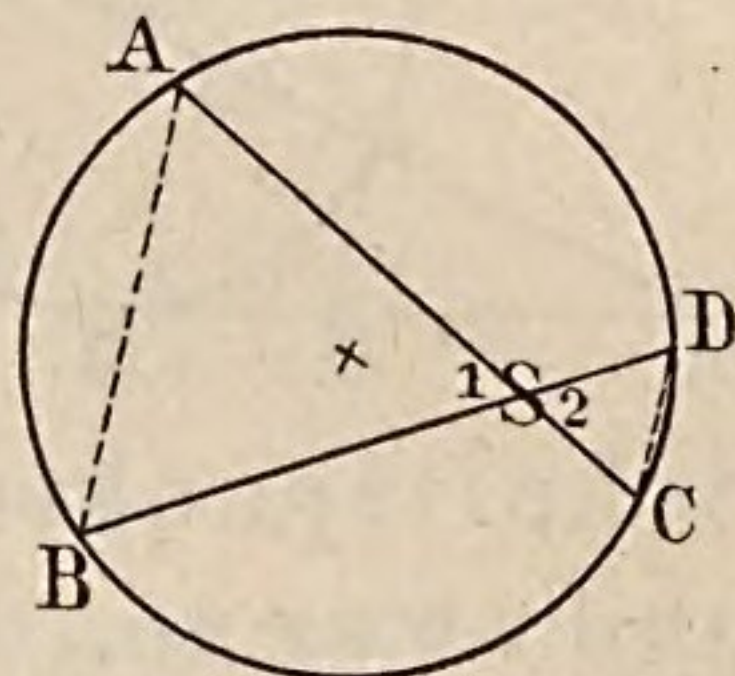
H. K. AB , CD .

Bew. $\sphericalangle S_1 = S_2$ (Sch. $\sphericalangle$)

$\sphericalangle B = C$ (P. $\sphericalangle$)

$\triangle ASB \sim DSC$ (Ä. II)

$AS : BS = DS : CS$ (h. St.) W. z. b. w.



2. Schneiden sich eine Tangente und eine Sekante, so ist die Tangente mittlere Proportionale zwischen der ganzen Sekante und ihrem äusseren Abschnitt, oder das Quadrat der Tangente ist gleich dem Produkte aus den vom Schnittpunkte aus gemessenen Abschnitten der Sekante.

Vor. AB Tangente; ACD Sekante.

Beh. $AD : AB = AB : AC$ oder $AB^2 = AC \cdot AD$.

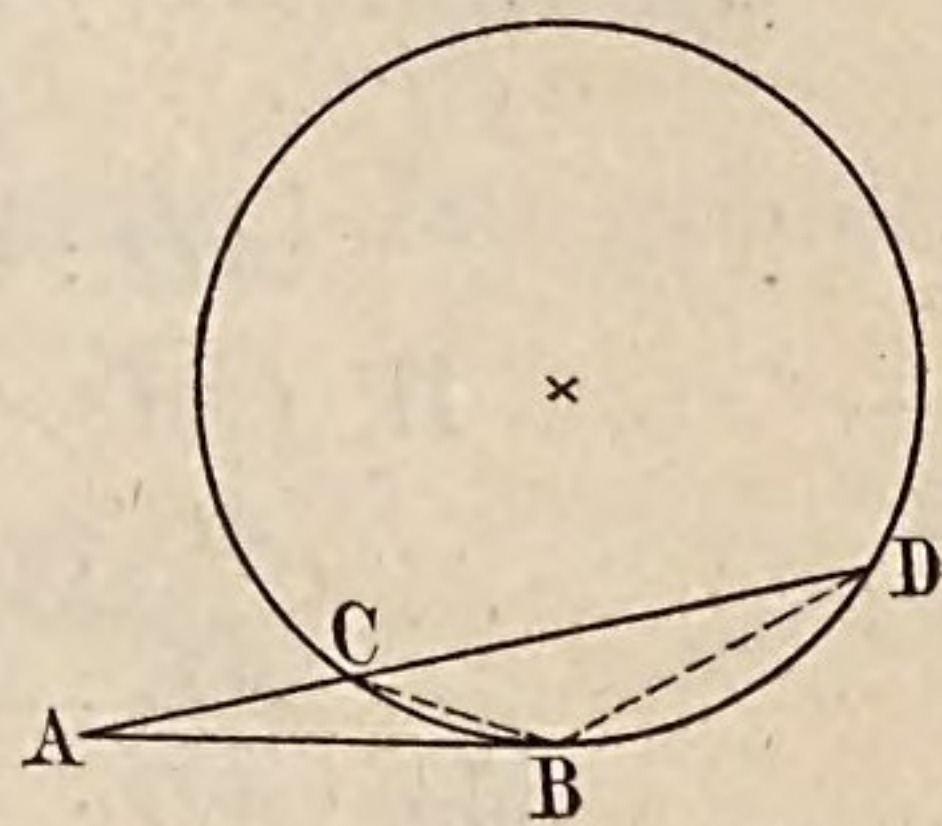
H. K. CB , DB .

Bew. $\sphericalangle A = A$ (Gr. I)

$\sphericalangle ABC = D$ (§ 48₃)

$\triangle ABC \sim ABD$ (Ä. II)

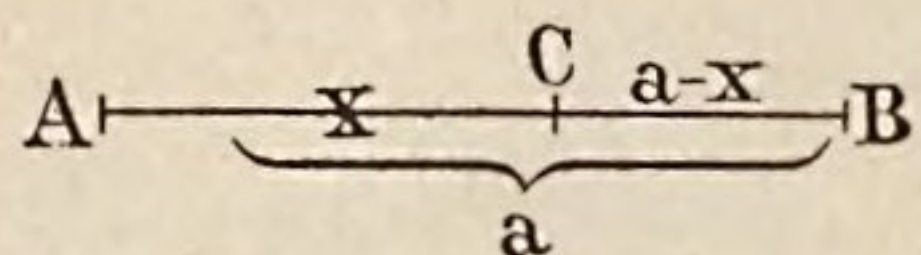
$AC : AB = AB : AD$ (h. St.) W. z. b. w.



§ 73. Der goldene Schnitt (stetige Teilung). Das reguläre Zehneck.

Erklärung. Eine Strecke heisst nach dem goldenen Schnitt oder stetig geteilt, wenn ihr grösserer Teil mittlere

Proportionale zwischen der ganzen Strecke und dem kleineren Teil ist, oder, wenn das Quadrat des grösseren Abschnitts gleich dem Produkte aus der ganzen Strecke und dem kleineren Abschnitt ist.



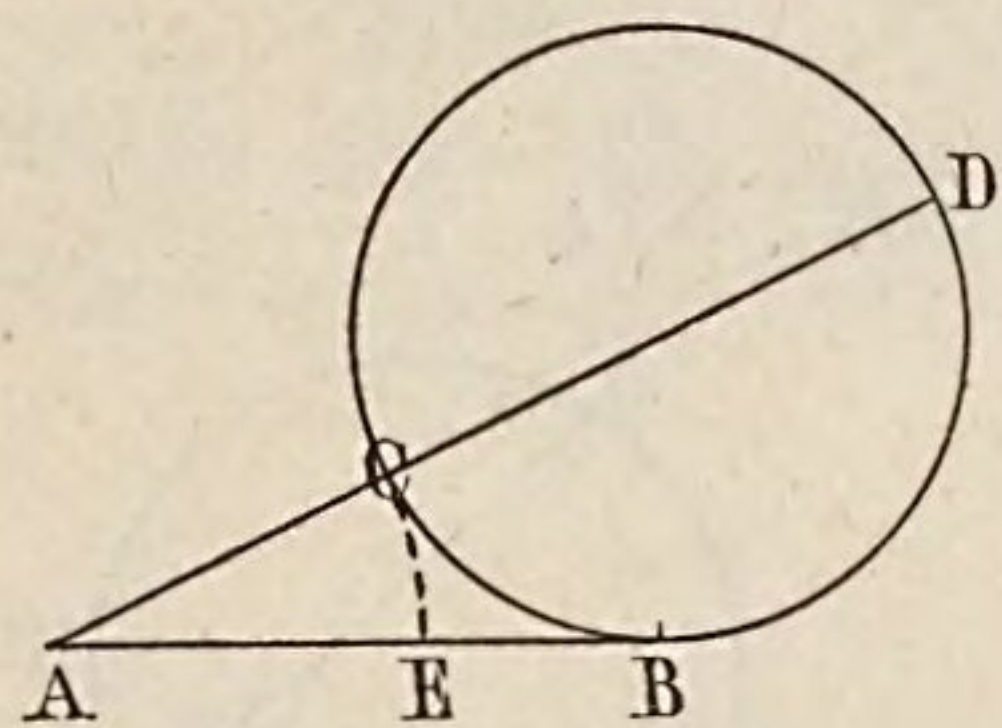
Z. B. AB ist in C stetig geteilt, wenn $AB : AC = AC : BC$, oder wenn $AC^2 = AB \cdot BC$; a ist stetig geteilt, wenn

$$a : x = x : (a - x), \text{ oder wenn } x^2 = a \cdot (a - x),$$

wobei AC bez. x der grössere Teil ist.

Anmerkung: Der Ausdruck „guldener Schnitt“ stammt aus dem Mittelalter, in welcher Zeit man den Satz viel als Grundregel für die Herstellung schöner Verhältnisse anwandte.

1. Lehrsatz: Schneiden sich eine Tangente und eine



Sekante, und ist die Tangente gleich dem inneren Abschnitt der Sekante, so ist diese stetig geteilt, und zwar so, dass der äussere Abschnitt der kleinere Teil ist. Schneidet man diesen auf der Tangente vom Schnittpunkte aus ab, so ist auch diese stetig geteilt, und zwar so, dass das abgeschnittene Stück der grössere Teil ist.

Vor. AB Tangente; ACD Sekante; $AB = CD$; $AE = AC$.

Beh. I. $AD : CD = CD : AC$.

II. $AB : AE = AE : BE$.

Bew. I. $AD : AB = AB : AC$ (Tangentensatz)

$$AB = CD \text{ (V.)}$$

$$\frac{AD : CD = CD : AC \text{ (Gr. II).}}{}$$

II. $(AD - CD) : CD = (CD - AC) : AC$ (c. S.)*)

$$AC = AE; \quad AB = CD \text{ (V.)}$$

$$\frac{AE : AB = BE : AE \text{ (Gr. II)}}{}$$

oder $AB : AE = AE : BE$.

W. z. b. w.

Auf diesem Lehrsatz beruht die Lösung der Aufgabe, eine Strecke stetig zu teilen (s. Anhang A).

*) Satz von der korrespondierenden Subtraktion (s. § 125).

2. Lehrsatz: Ist in einem gleichschenkligen Dreieck die Basis gleich dem grösseren Teile des stetig geteilten Schenkels, so ist der Winkel an der Spitze 36° .

Vor. $AB = AC$

$AB : AD = AD : BD$

$BC = AD$.

Beh. $\sphericalangle A = 36^\circ$.

H. K. CD .

Bew.

$$\left. \begin{array}{l} AB : AD = AD : BD \\ AD = BC \end{array} \right\} (V.)$$

$$AB : BC = BC : BD \text{ (Gr. II)}$$

$$\sphericalangle B = \sphericalangle B \text{ (Gr. I)}$$

$$\triangle ABC \sim BCD \text{ (Ä. I)}$$

$$AB : AC = BC : CD \text{ (h. St.)}$$

$$AB = AC \text{ (V.)}$$

$$BC = CD \text{ (Proportionslehre)} = AD \text{ (V.)}$$

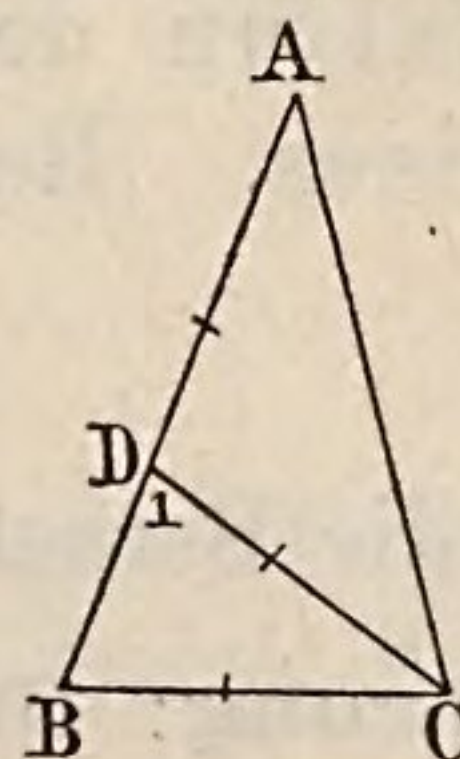
$$\sphericalangle D_1 = 2 \sphericalangle A \text{ (A. } \sphericalangle \text{ an der Spitze i. } \triangle)$$

$$\sphericalangle B = \sphericalangle C \text{ (B. } \sphericalangle)$$

$$5 \sphericalangle A = 2 \sphericalangle R \text{ (Winkelsumme i. } \triangle)$$

$$\text{oder } \sphericalangle A = \frac{2}{5} \sphericalangle R = 36^\circ.$$

W. z. b. w.

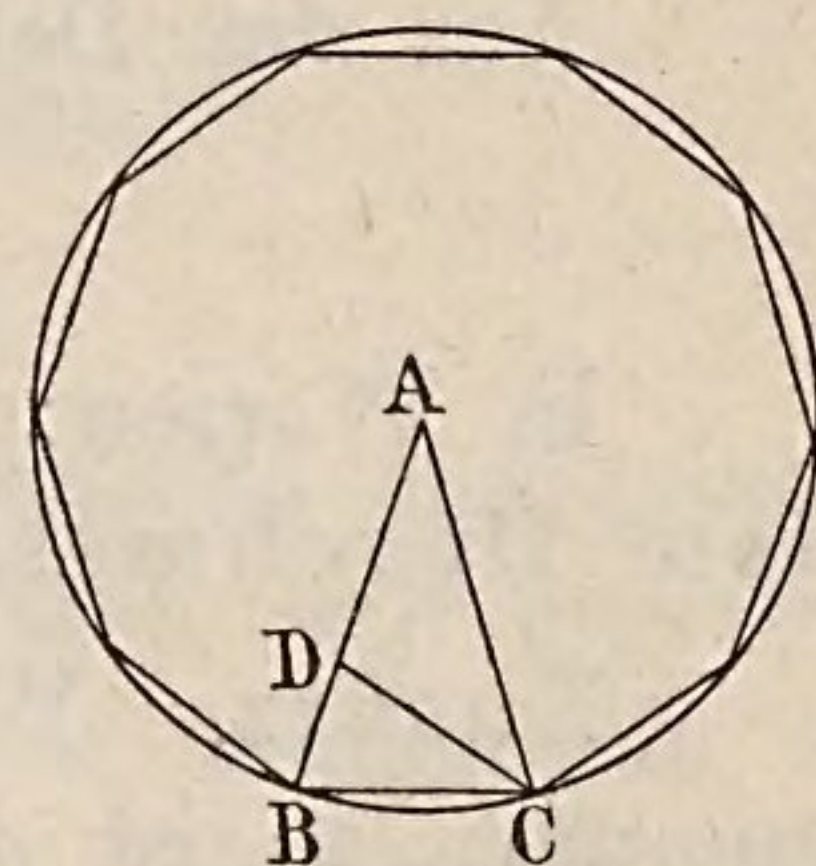


Zusatz. Die Basiswinkel im obigen Dreieck sind jeder $= 72^\circ$, also doppelt so gross als der Winkel an der Spitze.

Da der Centriwinkel des regulären Zehnecks $C_{10} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ ist, so kann man nach

obigem Lehrsatz ein reguläres Zehneck in einen Kreis zeichnen, wenn man den

Radius nach dem goldenen Schnitt teilt. Der grössere Teil ist dann s_{10} (s. Figur).



IX. Berechnung des Kreises.

§ 74.

Beschreibt man in oder um den Kreis reguläre Polygone, so werden sich diese dem Kreise um so mehr nähern, je grösser die Seitenzahl der Polygone wird. Man kann den Kreis als ein reguläres Polygon von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten ansehen. Die grossen und kleinen Radien der Polygone fallen dann mit dem Kreisradius

zusammen. Hieraus ergibt sich für den Mathematiker ein Mittel, die Peripherie und den Inhalt eines Kreises zu berechnen. Die Berechnung der Länge der Peripherie nennt man auch wohl die Rektifikation des Kreises, die des Inhaltes die Quadratur des Kreises. Beide Aufgaben sind nur angenähert lösbar.

§ 75.

Für die Berechnung des Kreises benutzt man die Zahl π .*)

Erklärung: Unter π versteht man das in allen Kreisen gleiche Verhältnis der Peripherie zum Durchmesser.

Es ist also $\pi = \frac{P}{2r}$ (Definitionsformel). Die Zahl π ist annähernd von vielen Mathematikern berechnet worden. Archimedes**) berechnete sie aus dem 96eck und fand angenähert $\pi = 3\frac{1}{7}$. Ludolf von Cöln (1539—1610) (van Ceulen) berechnete $\pi = 3,141592653589$ u. s. w. auf 35 Dezimalstellen. Nach ihm nennt man deshalb π auch wohl die Ludolfsche Zahl. Man merke:

$$\pi = 3,14159 \dots \text{ oder abgerundet}$$

$$\pi = 3,1416.$$

(Näheres über die Berechnung s. Trigonometrie § 216.)

§ 76.

Aus der Definitionsformel $\pi = \frac{P}{2r}$ folgt unmittelbar

$$P = 2r\pi.$$

In Worten: Die Peripherie des Kreises ist gleich dem Durchmesser mal der Zahl π .

Zusatz. Wird der Durchmesser eines Kreises $= 1$ genommen, so ist die Peripherie unmittelbar $= \pi$.

§ 77.

Lehrsatz. Der Inhalt des Kreises ist gleich dem Quadrat des Radius mal der Zahl π .

$$\text{Formel: } J \odot = r^2 \pi.$$

Bew. Man kann den Kreis als ein reguläres Polygon von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten ansehen (§ 74)

*) π ist der griechische Buchstabe für unser p .

**) Archimedes war einer der grössten Mathematiker des Altertums. Er kam um bei der Eroberung seiner Vaterstadt Syrakus durch die Römer, 212 v. Chr.

Der Inhalt eines solchen ist aber $= \frac{U \cdot \varrho}{2}$ (§ 56_{VII}). Beim Kreise wird $U = 2 r \pi$ (§ 76) und $\varrho = r$. Demnach folgt $J \odot = r^2 \pi$.
W. z. b. w.

§ 78.

Lehrsatz. Der Inhalt eines Kreissektors ist gleich dem zugehörigen Bogen mal dem Radius geteilt durch 2.

$$\text{Formel: Sektor} = \frac{b \cdot r}{2}$$

Entwicklung der Formel: Es verhält sich

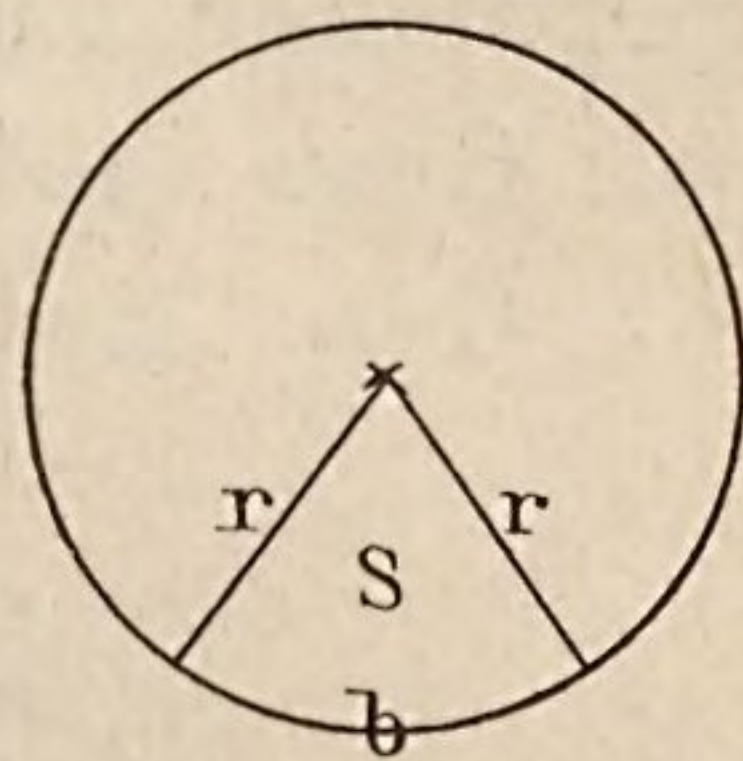
$$\frac{S : \odot = b : P.}{S = \frac{\odot \cdot b}{P}.$$

Nun ist

$$\odot = r^2 \pi$$

$$P = 2 r \pi$$

$$S = \frac{b \cdot r}{2}. \quad \text{W. z. b. w.}$$



X. Anhang A.

§ 79.

Von der geometrischen Aufgabe.

I. Fundamentalaufgaben.

Fundamentalaufgaben sind solche geometrische Aufgaben, deren Lösung unmittelbar aus den Lehrsätzen sich ergibt. Ein Beweis braucht bei ihnen nicht gegeben zu werden, da er unmittelbar aus der Konstruktion*) und den Lehrsätzen, auf denen diese beruht, folgt.

Teile der Fundamentalaufgabe sind 1) der Wortlaut der Aufgabe, 2) Gegeben (Geg.), 3) Gesucht (Ges.), 4) Konstruktion (Kon.), 5) Determination (Det.).**)

In Geg. und Ges. wird nach dem Wortlaut der Aufgabe in mathematischen Zeichen das, was zur Lösung der Aufgabe gegeben ist und das, was gesucht wird, so kurz wie möglich ausgedrückt.

*) Aus dem Lateinischen; bedeutet „Herstellung“. Konstruieren heisst: In einer vorgeschriebenen Art gegebene räumliche Grössen zusammenstellen.

**) Aus dem Lateinischen; bedeutet „Begrenzung, Bestimmung“.

In der Kon. wird in gutem deutschen Ausdruck die Herstellung erzählt. Man achte darauf, dass alle Buchstaben, die in der fertigen Figur vorkommen, im Texte erwähnt sind, so dass jeder die Figur, ohne sie zu sehen, nach dem Wortlaut der Konstruktion herstellen kann.

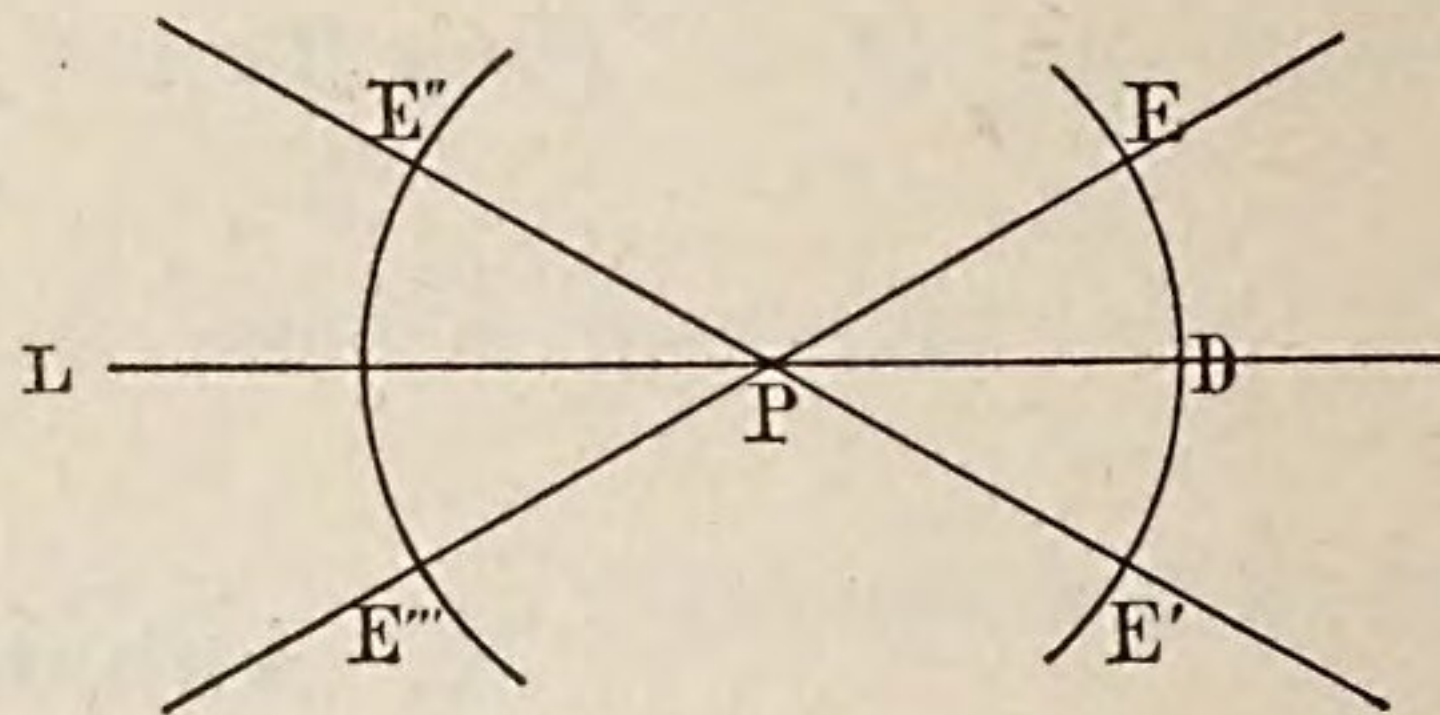
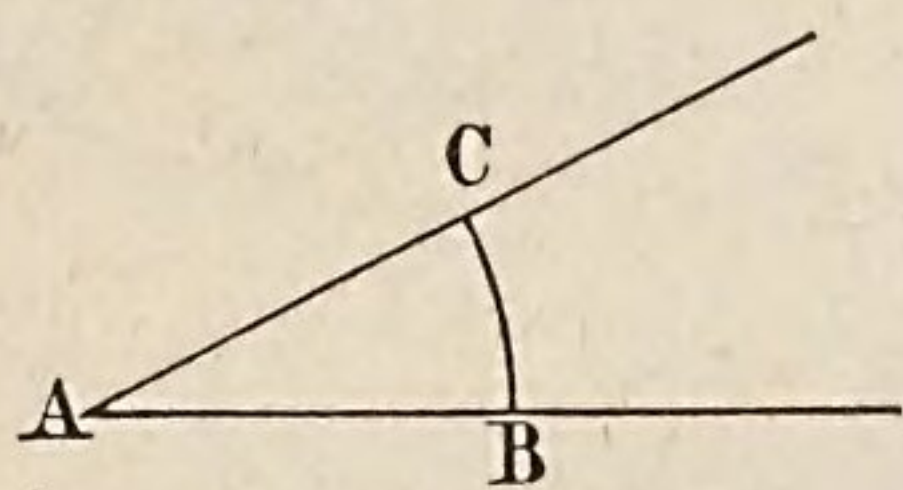
In der Det. wird angegeben, welche Bedingungen die gegebenen Stücke erfüllen müssen, damit die Aufgabe überhaupt ausführbar ist. Ist die Aufgabe immer lösbar, so fällt die Determination fort. Bei schwierigeren Aufgaben wird auch in der Determination die Anzahl der möglichen Lösungen besprochen.

Die wichtigsten Fundamentalaufgaben sind:

1. Einen gegebenen Winkel an eine Gerade in einem gegebenen Punkte anzutragen.

Geg. $\sphericalangle A$, L mit P .

Ges. $\sphericalangle A$ an L in P .



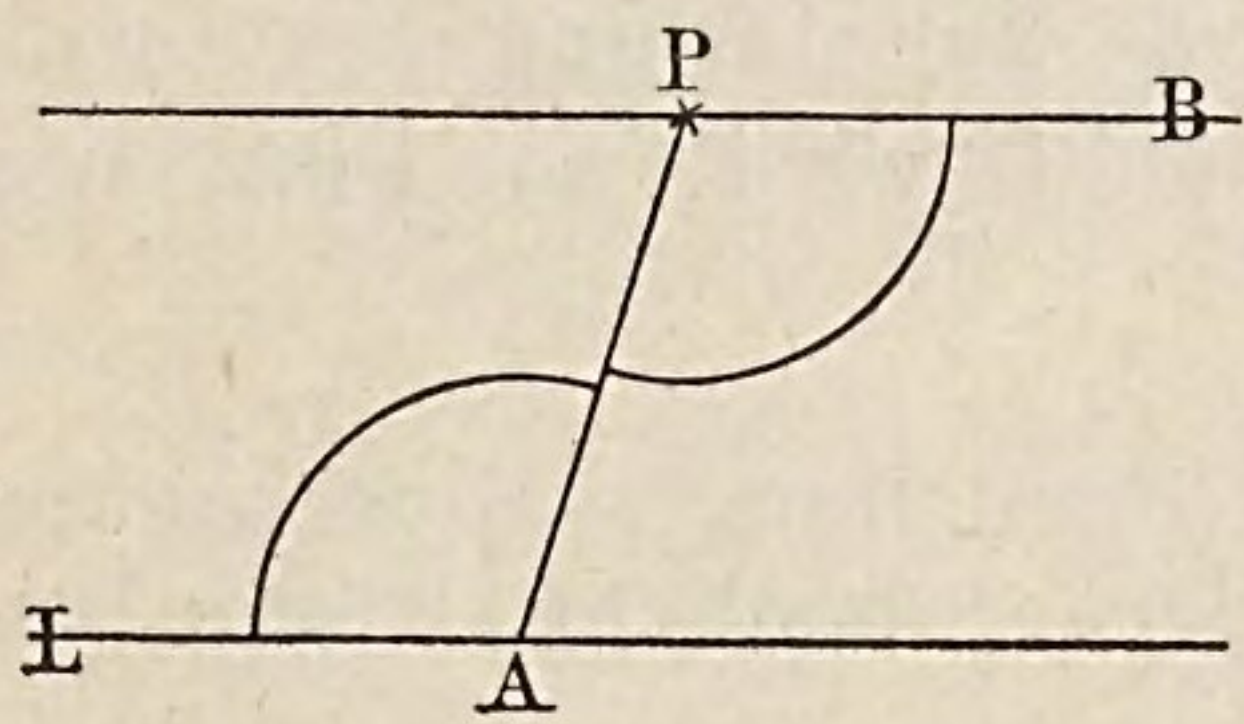
Kon. Von A und P aus schlage ich mit derselben Zirkelöffnung Bögen, die die Schenkel von $\sphericalangle A$ in B und C und L in D treffen. Dann trage ich $\widehat{BC}$ von D aus auf dem geschlagenen Bogen ab $= \widehat{DE}$. Verbinde ich endlich E mit P , so ist $\sphericalangle EPD$ der gesuchte.

Anmerkung. Es sind vier Lagen möglich (s. Figur).

2. Zu einer Geraden durch einen Punkt ausserhalb die Parallele zu ziehen.

Geg. L , P .

Ges. Parallele zu L durch P .



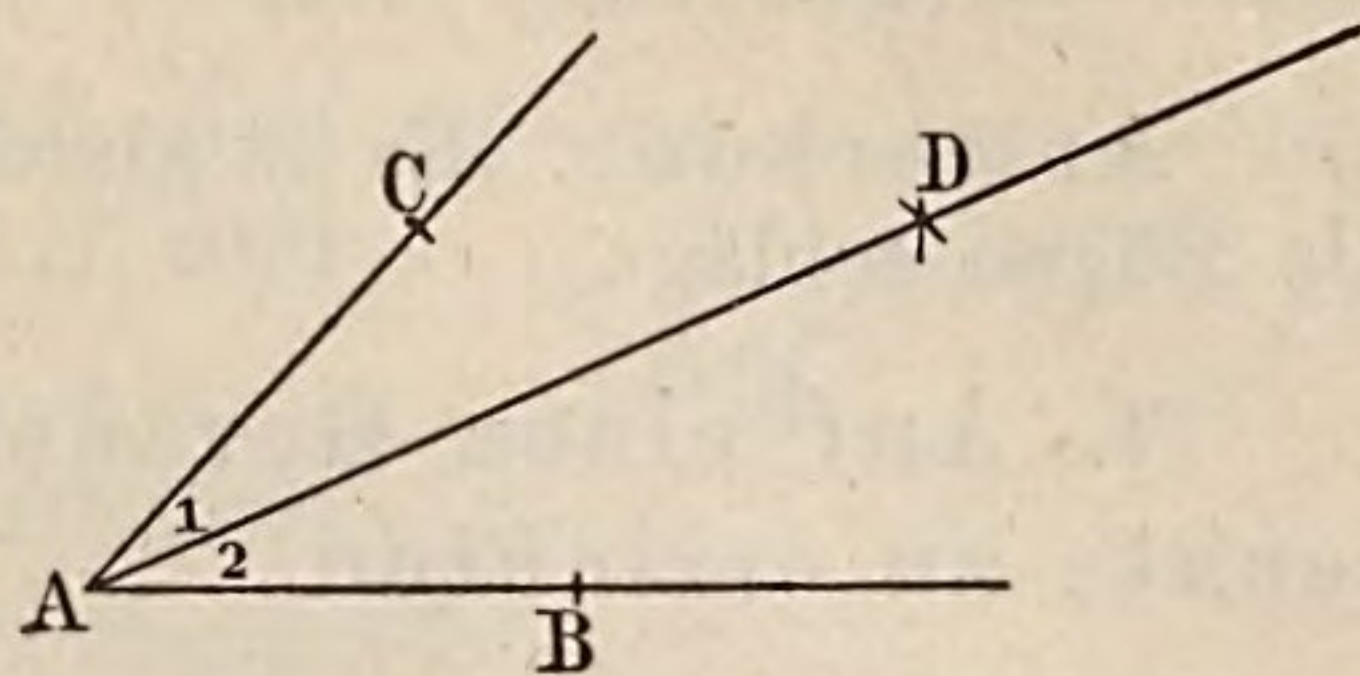
Kon. Ich ziehe von P aus eine beliebige Gerade, die L in A trifft. Trage ich dann $\sphericalangle PAL$ an AP in P nach der entgegengesetzten Seite hin als inneren Wechselwinkel an $= \sphericalangle APB$, so ist PB die gesuchte Parallele.

Anmerkung. Andere Lösungen sind mit Hilfe der Gegenwinkel und entgegengesetzten Winkel möglich.

3. Einen gegebenen Winkel zu halbieren.

Geg. $\angle A$.Ges. $\frac{1}{2} \angle A$.

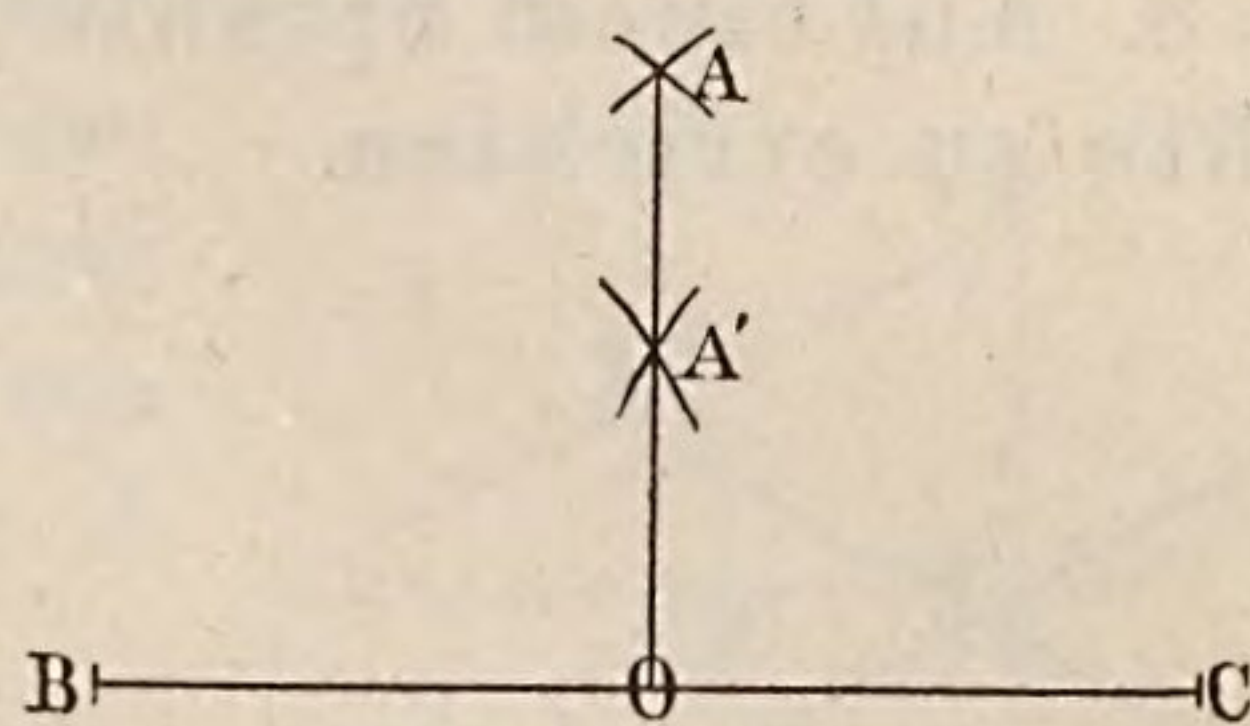
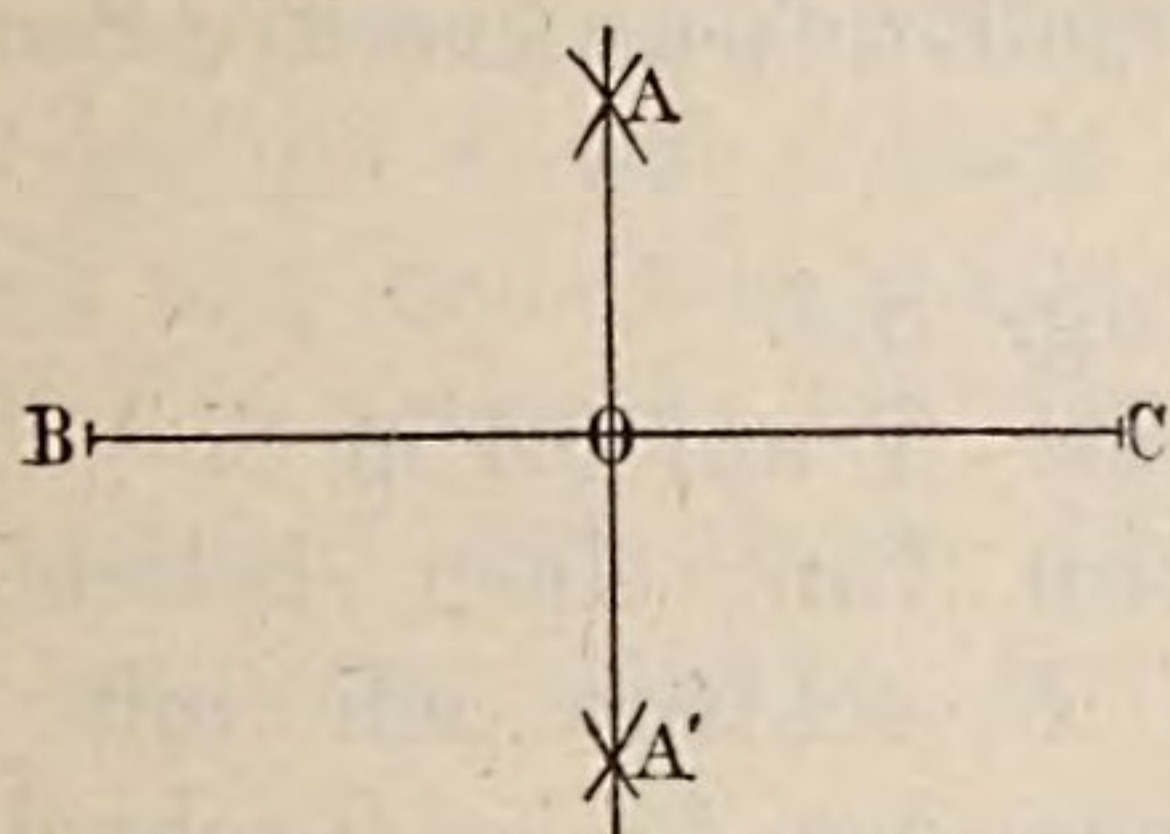
Kon. Von A aus schneide ich auf den Schenkeln gleiche Stücke, AB und AC , ab. Von B und C aus schlage ich gleiche Bögen, die sich in D schneiden. Verbinde ich nun D mit A , so ist AD die Halbierungslinie von $\angle A$, und die $\angle A_1$ und A_2 sind jeder $= \frac{1}{2} \angle A$.



4. Eine Strecke zu halbieren.

Geg. BC .Ges. $\frac{1}{2} BC$.

Kon. Von B und C aus schlage ich nach oben und unten je zwei unter sich gleiche Bögen, welche sich in A und A'



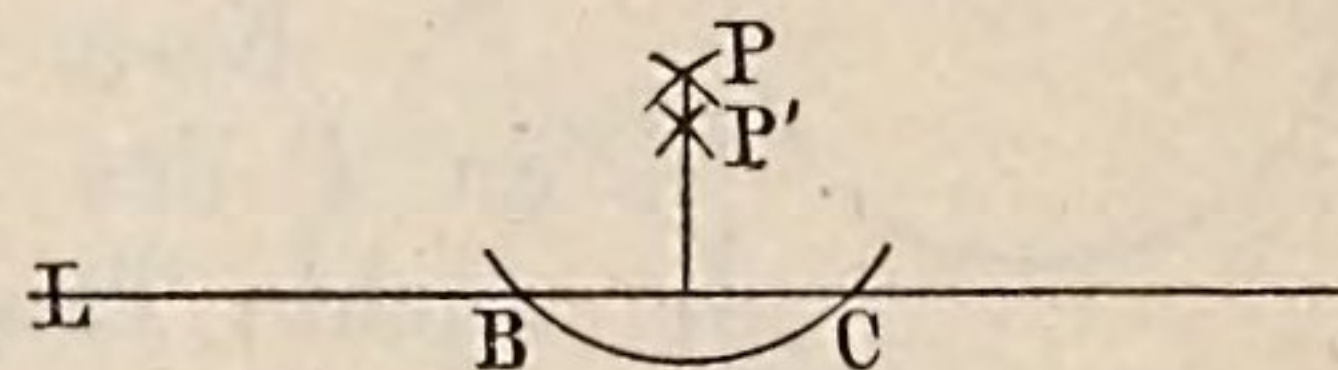
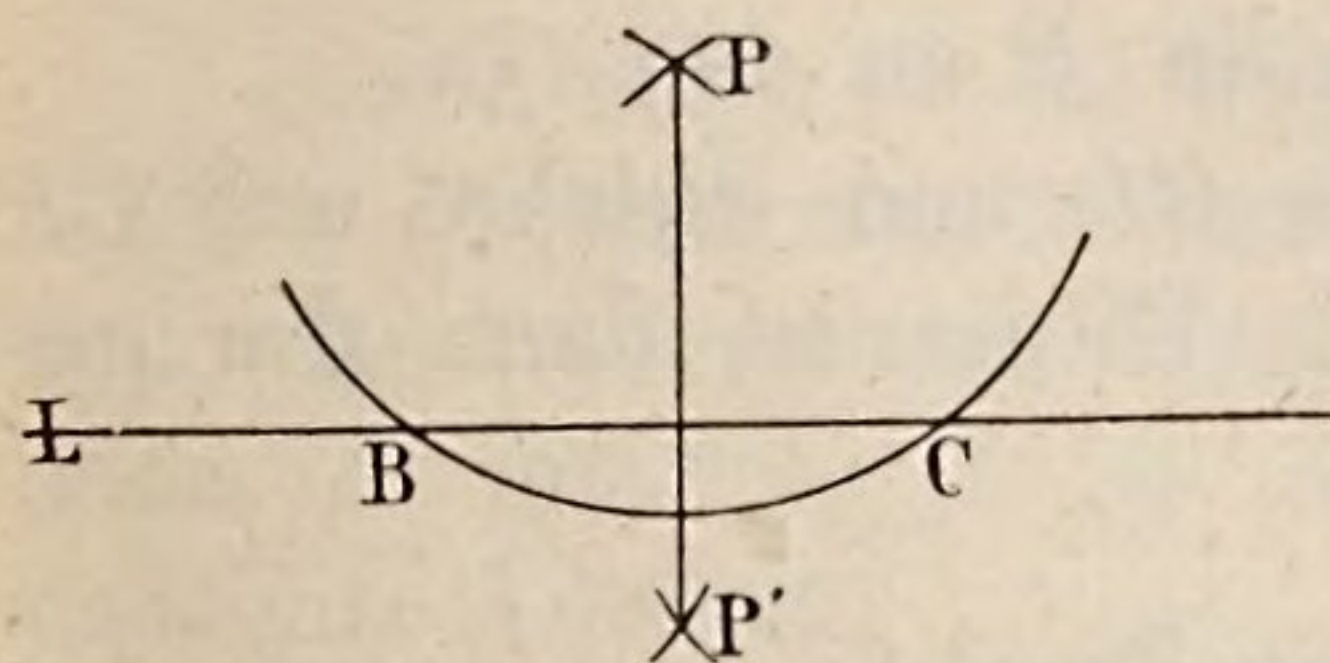
schneiden. Verbinde ich dann A mit A' , so ist der Schnittpunkt dieser Verbindungslinie mit BC die gesuchte Mitte.

Anmerkung. Man kann die je zwei gleichen Bögen auch nach einer Seite von BC schlagen. Die Verlängerung der Verbindungslinie von A und A' trifft dann BC in der Mitte.

5. Die Mittelsenkrechte einer Strecke zu ziehen.

Siehe die vorige Aufgabe. AA' steht ebenfalls $\perp BC$, ist also die Mittelsenkrechte zu BC .

6. Auf eine Gerade von einem Punkte ausserhalb das Lot zu fällen.

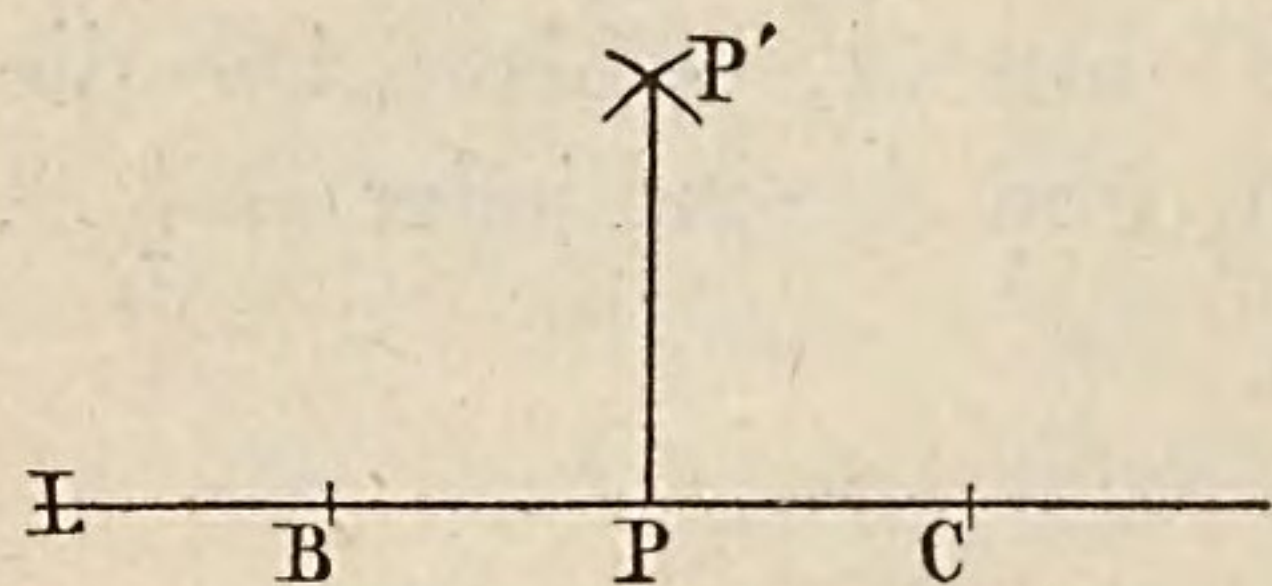
Geg. L, P .Ges. $\perp$ von P auf L .

Kon. Von P aus schlage ich einen Bogen, der L in B und C schneidet. Von B und C aus schlage ich gleiche Bögen, die

sich in P' schneiden. Die Verbindungslinie von P und P' ist dann das gesuchte Lot.

Anmerkung. Es ist gleichgültig, nach welcher Seite von L man die Bögen schlägt.

7. Auf einer Geraden in einem Punkte die Senkrechte zu errichten.

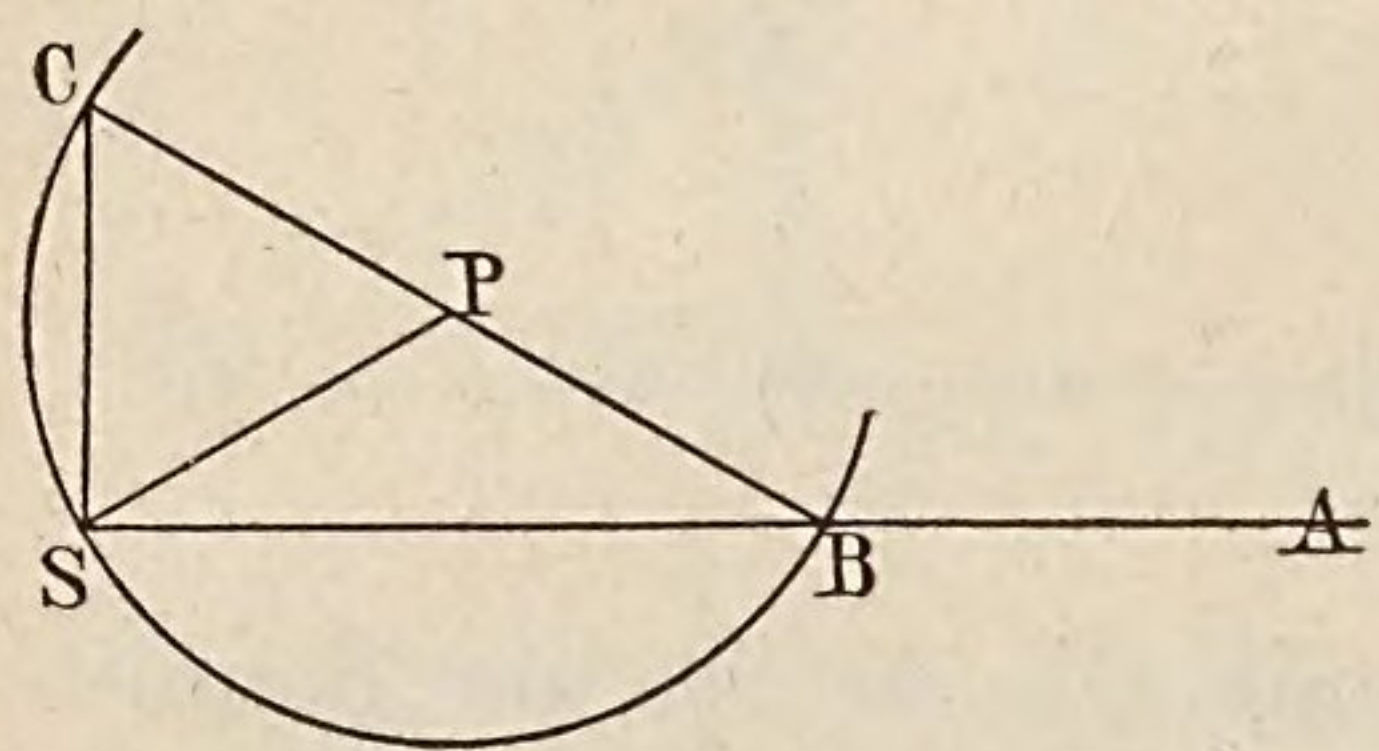


Geg. L mit P .

Ges. $\perp$ auf L in P .

Kon. Von P aus schneide ich auf L gleiche Stücke ab, $PB = PC$. Schlage ich sodann von B und C aus gleiche Bögen, die sich in P' schneiden, so ist die Verbindungslinie von P' und P die gesuchte Senkrechte.

8. Auf einem Strahle in seinem Endpunkte die Senkrechte zu errichten.



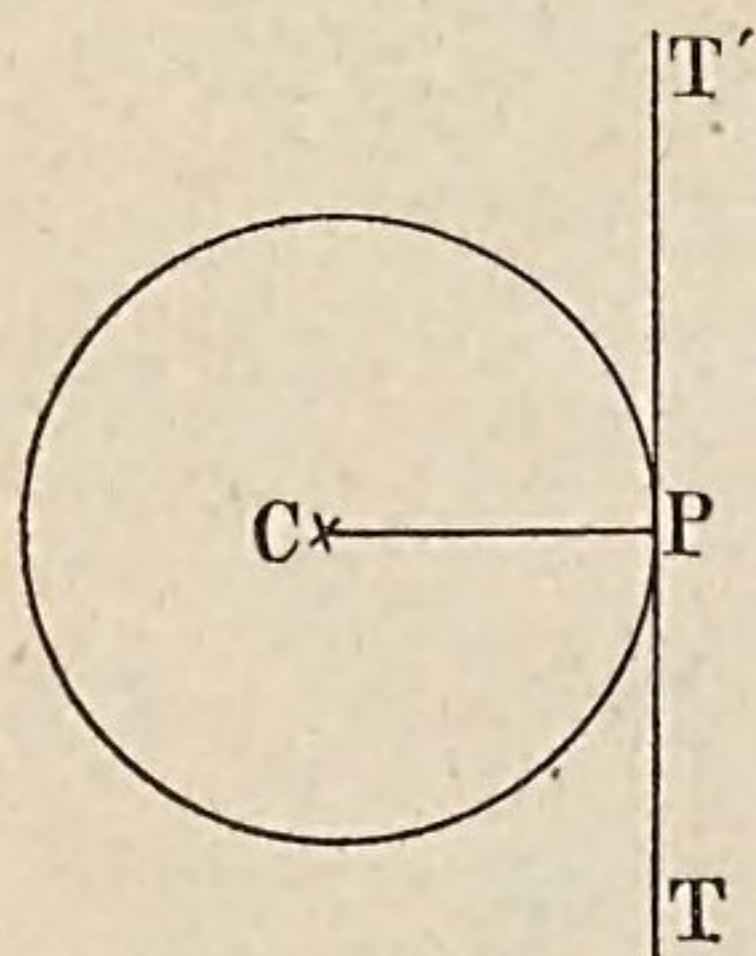
Geg. SA .

Ges. $\perp$ auf SA in S .

Kon. Um einen beliebigen Punkt P schlage ich mit PS den Kreis, der AS in B schneidet, und verbinde B mit P . Verlängere ich sodann BP über P hinaus bis zum Schnittpunkte mit dem Kreise in C , so ist die Verbindungsstrecke CS die gesuchte Senkrechte.

Der Beweis beruht auf dem Lehrsatz des Thales.

Anmerkung. Der Ausdruck „die Senkrechte errichten“ ist zu gebrauchen, wenn der Ausgangspunkt des Lotes in der Geraden liegt; liegt der Ausgangspunkt ausserhalb der Geraden, so heisst es „das Lot fällen“.



9. An einen Kreis in einem gegebenen Punkte die Tangente zu ziehen.

Geg. $\odot$ um C ; P auf der Peripherie.

Ges. Tangente in P an den $\odot$.

Kon. Ich ziehe CP und errichte auf CP in P das Lot TT' . Dieses ist dann die gesuchte Tangente.

10. An einen Kreis von einem Punkte ausserhalb die beiden Tangenten zu ziehen.

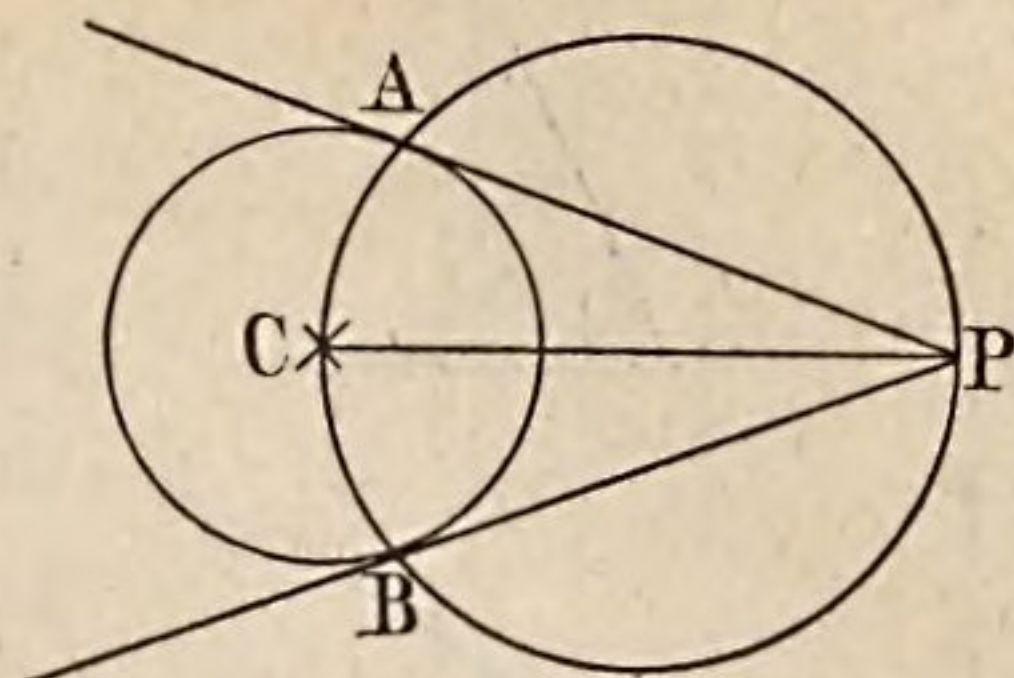
Geg. $\odot$ um C ; P ausserhalb.

Ges. Die Tangenten von P an den $\odot$.

Kon. Ich verbinde C mit P und schlage über CP als Durchmesser den Kreis, welcher den Kreis um C in A und B schneidet.

Ziehe ich dann PA und PB , so sind diese beiden Linien die gesuchten Tangenten.

Der Beweis beruht, nachdem man A und B mit C verbunden hat, auf dem Lehrsatz des Thales.

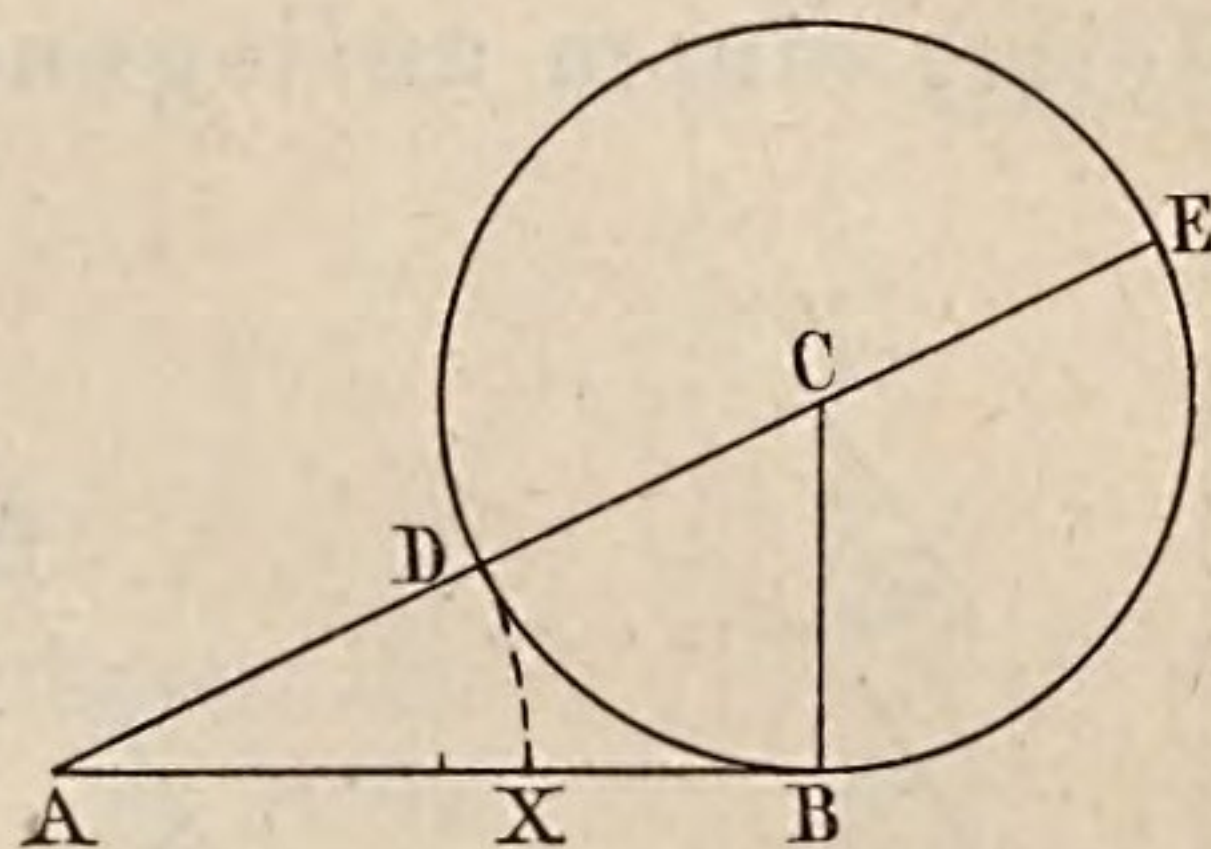


11. Eine Strecke stetig zu teilen.

Gegeben: AB .

Gesucht: Punkt X auf AB , so dass $AB : AX = AX : BX$.

Konstruktion: Auf AB in B errichte ich $\frac{1}{2} AB$ senkrecht $= BC$, schlage um C mit CB als Radius den Kreis und ziehe von A aus die Sekante $ADCE$. Schneide ich dann AD von A aus auf AB ab $= AX$, so ist X der gesuchte Punkt.



$$\text{Bew. } \frac{DE = 2 \cdot CB \ (d = 2r) = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \ (K.) = AB}{AB : AX = AX : BX \ (\text{nach } \S 73_1).$$

W. z. b. w.

Die Fundamentaldreieckskonstruktionen.

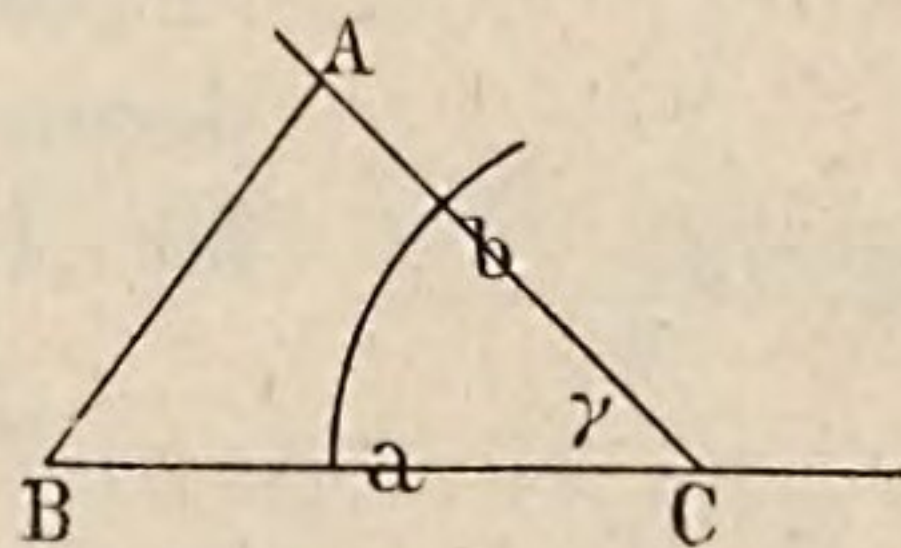
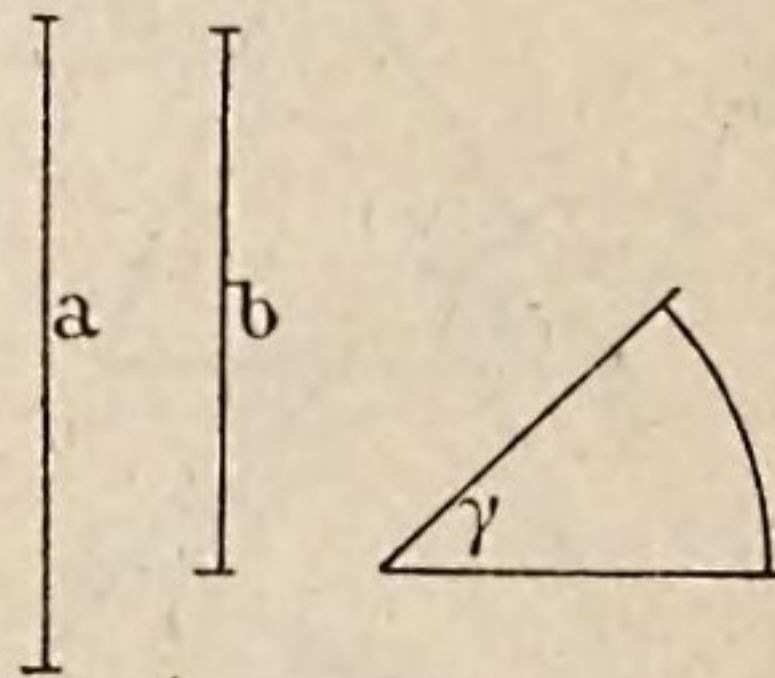
Dreieckskonstruktion 1. $\triangle a, b, \sphericalangle \gamma$.

In Worten: Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

Geg. $a, b, \sphericalangle \gamma$.

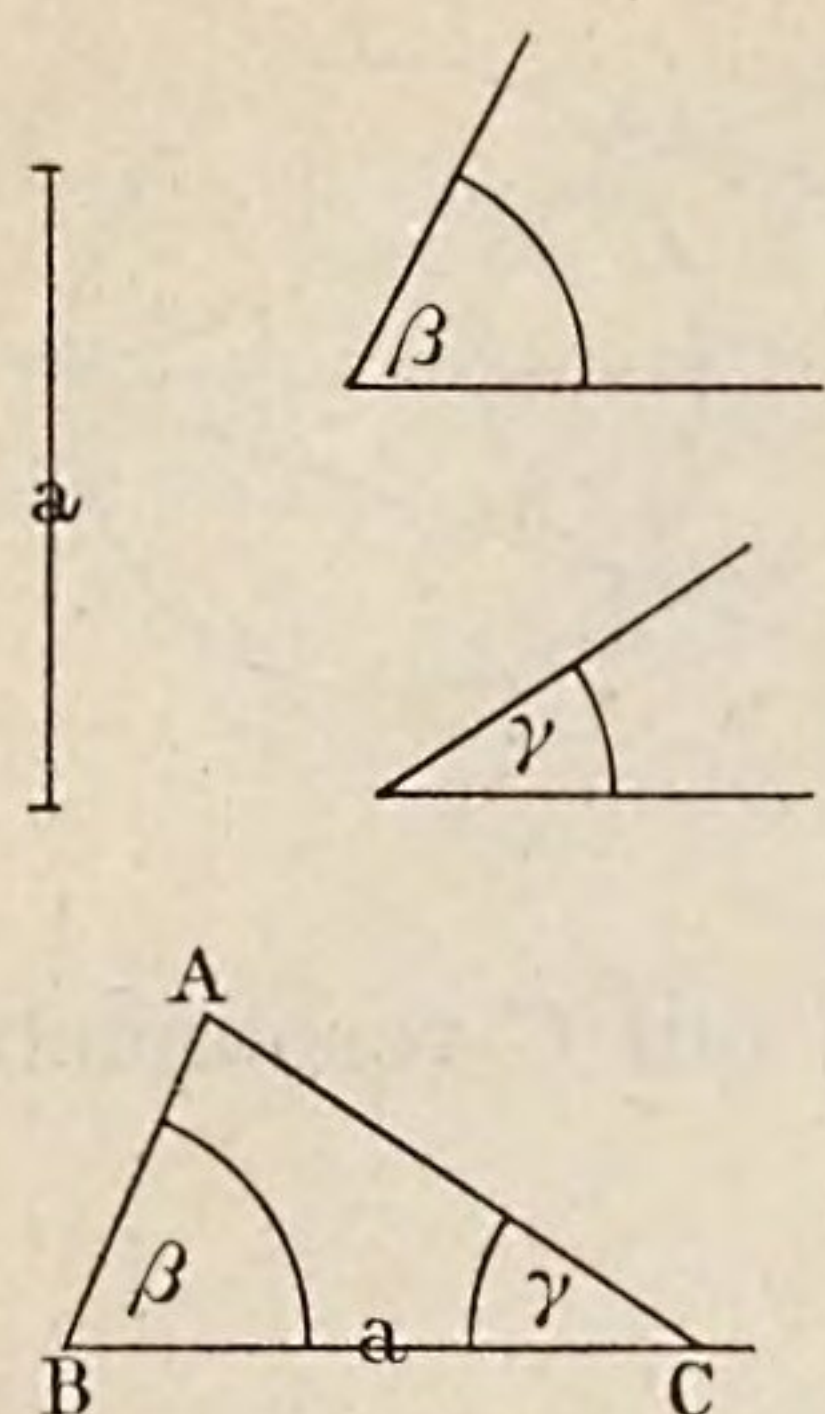
Ges. $\triangle$

Kon. An $a = BC$ trage ich in C $\sphericalangle \gamma$ an und mache dessen freien Schenkel $= b = CA$. Verbinde ich dann A mit B , so ist ABC das gesuchte Dreieck.



Det. $\sphericalangle \gamma < 180^\circ$.

Dreieckskonstruktion 2^a. $\triangle a, \sphericalangle \beta, \sphericalangle \gamma$.



In Worten: Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln.

Geg. $a, \sphericalangle \beta, \sphericalangle \gamma$.

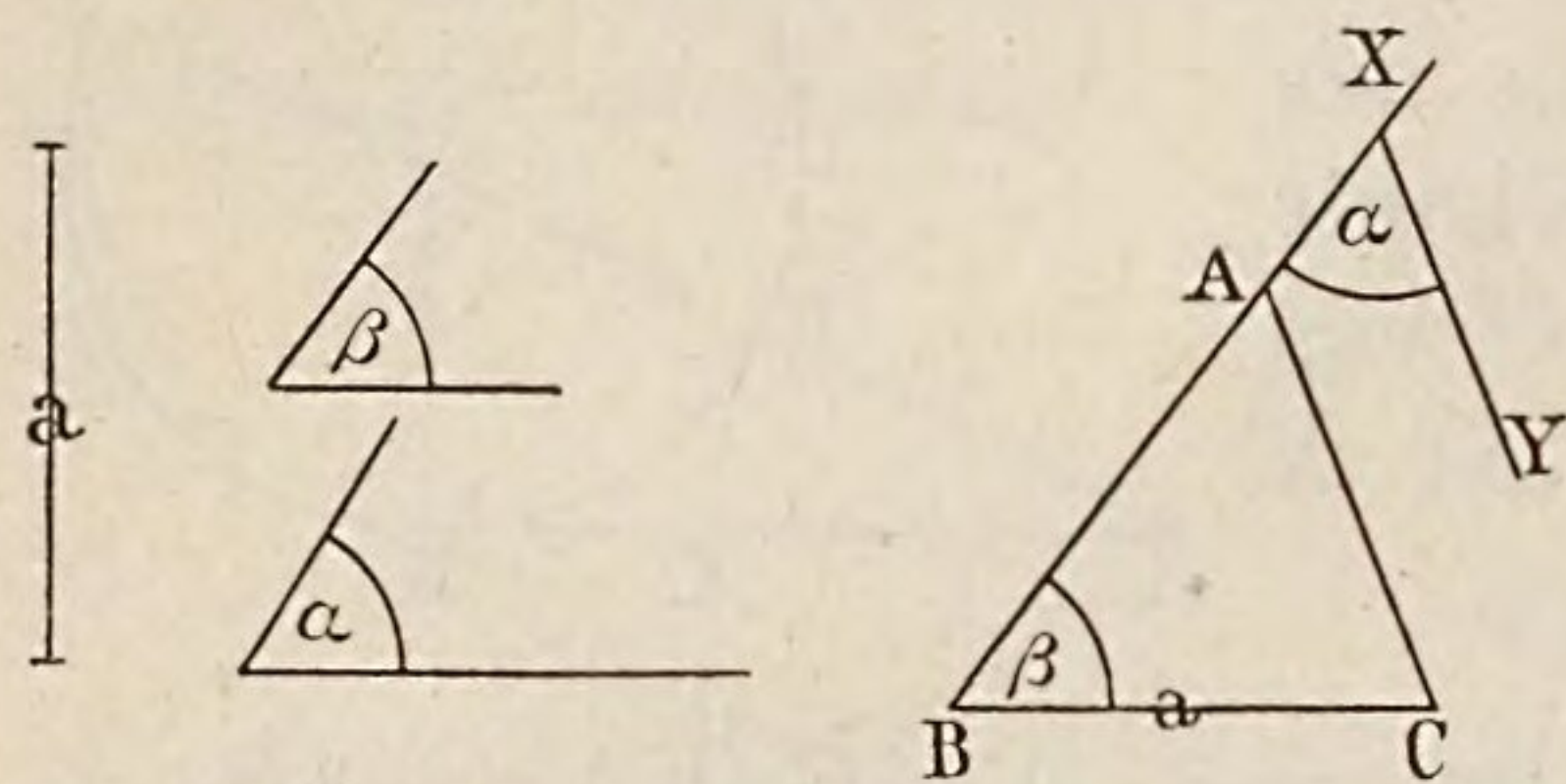
Ges. $\triangle$

Kon. An $a = BC$ trage ich in B $\sphericalangle \beta$ und in C $\sphericalangle \gamma$ an, deren freie Schenkel sich in A treffen. Dann ist ABC das gesuchte Dreieck.

Det. $\sphericalangle \beta + \gamma < 180^\circ$.

Dreieckskonstruktion 2^b. $\triangle a, \sphericalangle \beta, \sphericalangle \alpha$.

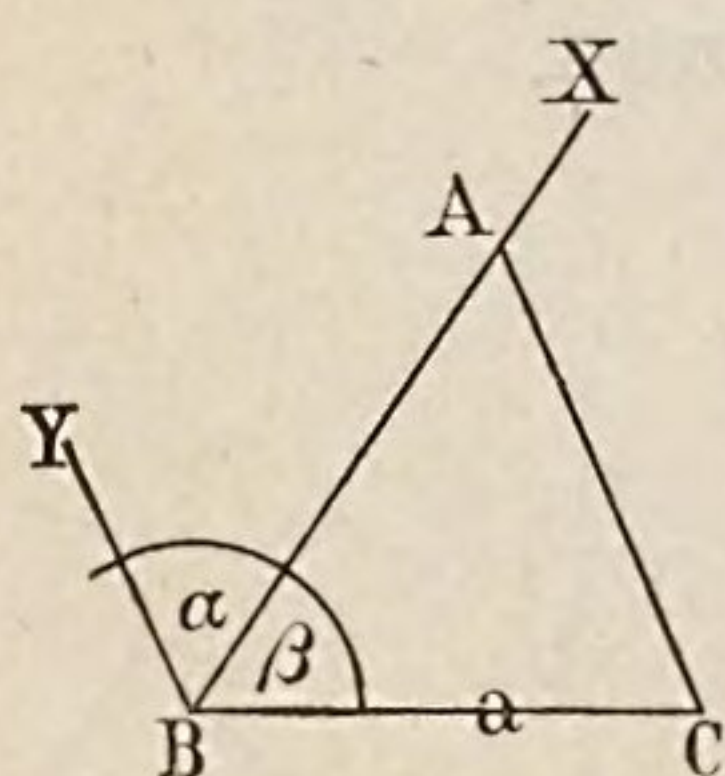
In Worten: Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel.



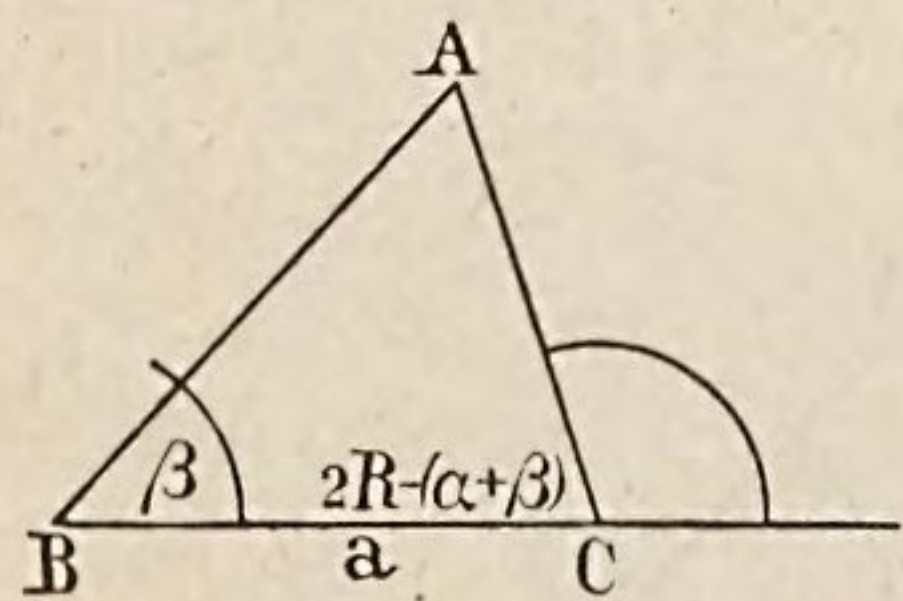
Geg. $a, \sphericalangle \beta, \sphericalangle \alpha$.

Ges. $\triangle$

Kon. I (mit Hilfe der Gegenwinkel). An $a = BC$ trage ich in B $\sphericalangle \beta$ und an dessen freien Schenkel in einem beliebigen Punkte X den $\sphericalangle \alpha$ an $= BXY$. Ziehe ich dann von C aus zu XY die Parallele, welche BX in A trifft, so ist ABC das gesuchte Dreieck.



Kon. II (mit Hilfe der Wechselwinkel). An $a = BC$ trage ich in B $\sphericalangle \beta$ und an dessen freien Schenkel BX in B nach der andern Seite hin den $\sphericalangle \alpha$ an $= XBY$. Ziehe ich dann von C aus zu BY die Parallele, welche BX in A trifft, so ist ABC das gesuchte Dreieck.



Kon. III (mit Hilfe des Supplementwinkels). An $a = BC$ trage ich in B $\sphericalangle \beta$ und in C einen Winkel an $= 2R - (\alpha + \beta)$, deren freie Schenkel sich in A treffen. Dann ist ABC das gesuchte Dreieck.

Det. $\sphericalangle \alpha + \beta < 180^\circ$.

Dreieckskonstruktion 3. $\triangle a, b, c$.

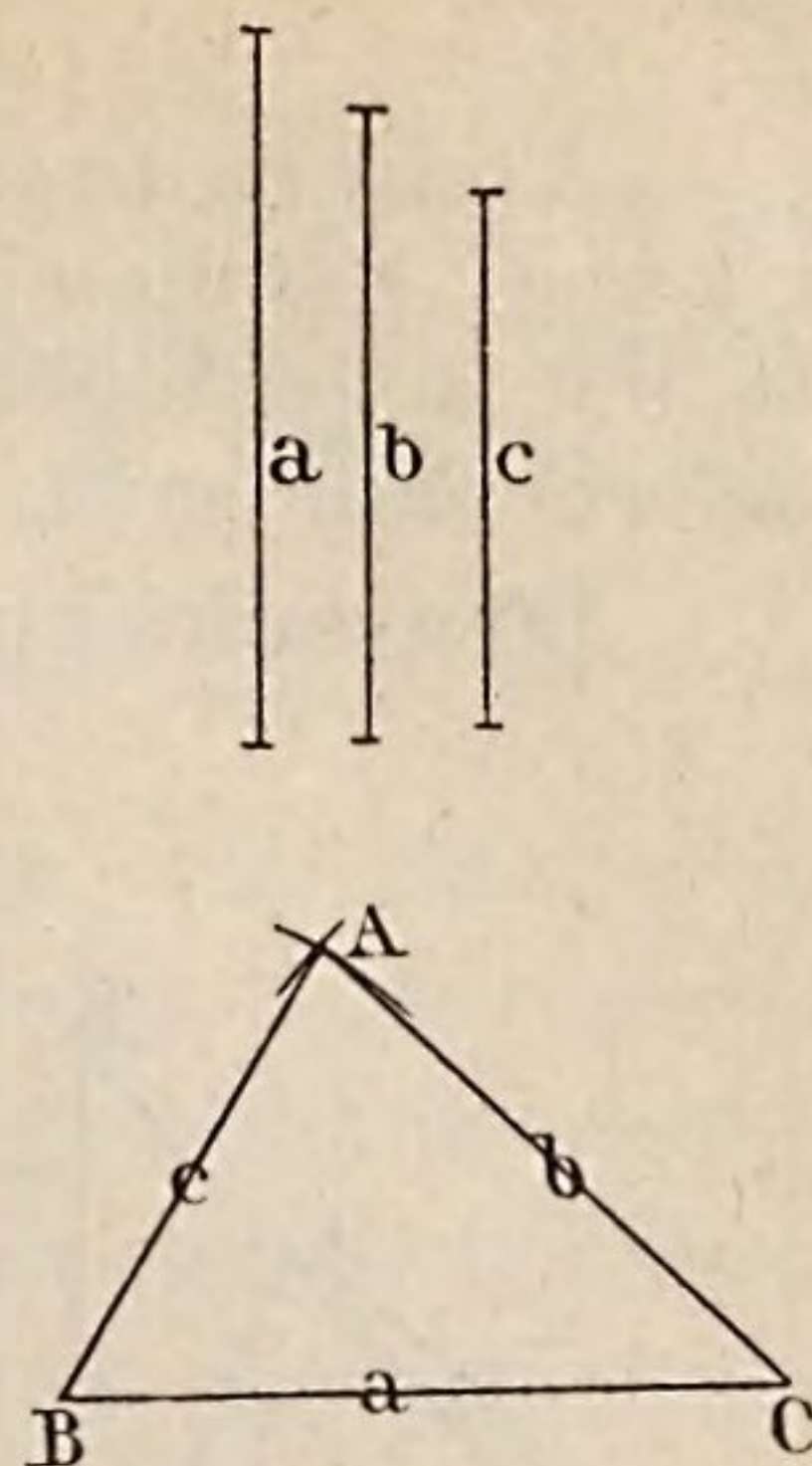
In Worten: Ein Dreieck aus den drei Seiten zu konstruieren.

Geg. a, b, c .

Ges. $\triangle$

Kon. Über $a = BC$ schlage ich von C und B aus mit b und c Bögen, die sich in A schneiden. Verbinde ich dann A mit B und C , so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Det. $b + c > a$
 $a + c > b$
 $a + b > c$.



Dreieckskonstruktion 4^a. $\triangle a, b, \sphericalangle \beta$; ($b > a$).

In Worten: Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem der grösseren gegenüberliegenden Winkel.

Geg. $a, b, \sphericalangle \beta$; ($b > a$).

Ges. $\triangle$

Kon. An $a = BC$ trage ich in $B \sphericalangle \beta$ an und schlage von C aus mit b einen Bogen, der den freien Schenkel des $\sphericalangle \beta$ in A trifft. Verbinde ich dann A mit C , so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Det. $\sphericalangle \beta < 180^\circ$.

Dreieckskonstruktion 4^b. $\triangle a, b, \sphericalangle \beta$; ($b < a$).

In Worten: Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem der kleineren gegenüberliegenden Winkel.

Geg. $a, b, \sphericalangle \beta$; ($b < a$).

Ges. $\triangle$

Kon. S. 4^a.

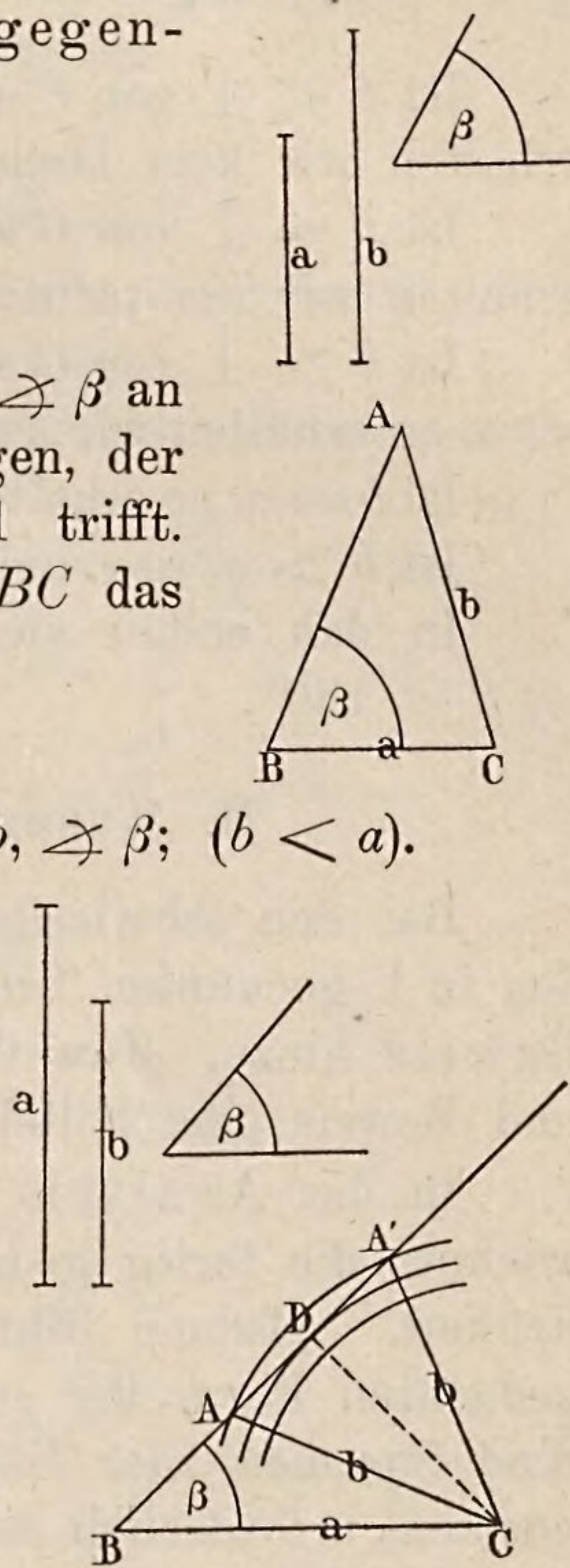
Det. $\sphericalangle \beta < 90^\circ$.

Man muss hier drei Fälle unterscheiden:

Ist $b < \perp$ von C auf den freien Schenkel des $\sphericalangle \beta$ (CD), so erhalten wir kein Dreieck.

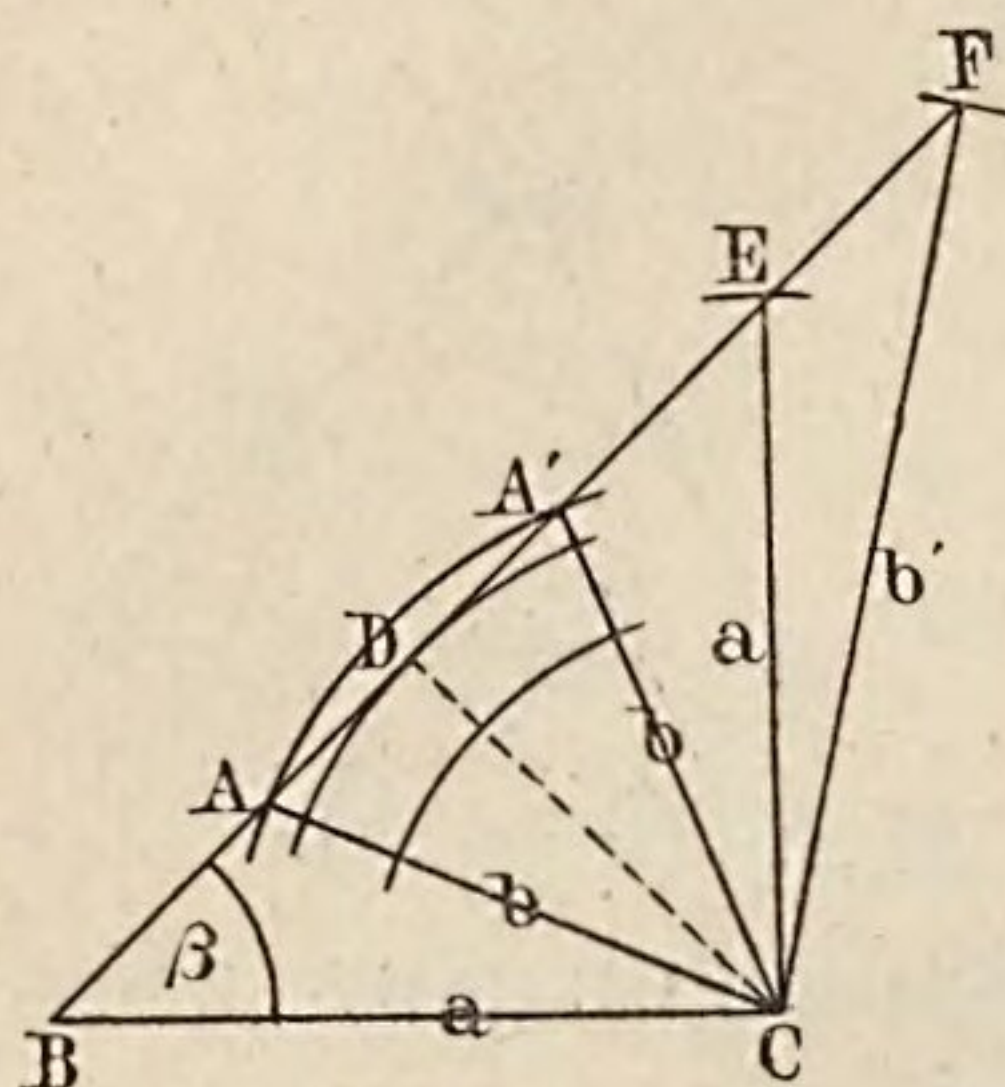
Ist $b = \perp$ von C auf den freien Schenkel des $\sphericalangle \beta$ (CD), so erhalten wir ein rechtwinkliges Dreieck (DBC).

Ist $b > \perp$ von C auf den freien Schenkel des $\sphericalangle \beta$ (CD), so erhalten wir zwei Dreiecke ($ABC, A'BC$).



Anmerkung. In den beiden Dreiecken ABC und $A'BC$ sind a, b und $\sphericalangle \beta$ dieselben, die übrigen Stücke sind ungleich. Insbesondere ist der a gegenüberliegende Winkel in einem Falle stumpf und im andern Falle spitz, und zwar so, dass sie zusammen $2 R$ betragen.

Dreieckskonstruktion 4^c. $\triangle a, b, \sphericalangle \beta$.



In Worten: Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem einer von ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Geg. $a, b, \sphericalangle \beta$.

Ges. $\triangle$

Kon. S. 4^a.

Det. Man muss hier fünf Fälle unterscheiden:

Ist $b < \perp$ von C auf den freien Schenkel des $\sphericalangle \beta$ (CD), so erhalten wir kein Dreieck, s. 4^b.

Ist $b = \perp$ von C auf den freien Schenkel des $\sphericalangle \beta$ (CD), so erhalten wir ein rechtwinkliges Dreieck (DBC), s. 4^b.

Ist $b > \perp$ von C auf den freien Schenkel des $\sphericalangle \beta$ (CD), aber $< a$, so erhalten wir zwei Dreiecke ($ABC, A'BC$), s. 4^b.

Ist $b = a$, so erhalten wir ein gleichschenkliges Dreieck (EBC).

Ist $b > a$, so erhalten wir ein Dreieck (FBC), s. 4^a.

In den ersten vier Fällen $\sphericalangle \beta < 90^\circ$; im fünften Falle $\sphericalangle \beta < 180^\circ$.

II. Zusammengesetzte Aufgaben.

Bei den schwierigen geometrischen Aufgaben kommen zu den in I. genannten Teilen noch die Analysis*) (Anal.) und der Beweis hinzu. Zuweilen wird auch noch zwischen Konstruktion und Beweis eine Hilfskonstruktion eingeschaltet.

In der Analysis denkt man sich die Aufgabe gelöst und zeichnet die fertig gedachte Figur mit möglichster Wahrscheinlichkeit. Alsdann führt man in den Buchstaben dieser fertig gedachten Figur die gegebenen Stücke an (vgl. Musterbeispiel). Sind Summen oder Differenzen von Seiten gegeben, so ist es meistens erforderlich, sie in der Figur herzustellen. Sodann sucht man Beziehungen zwischen den gegebenen und den weiter notwendigen Stücken, um die Figur konstruieren zu können.

Diese Beziehungen können mannigfacher Art sein. Bei den Dreiecks- und Vierecksaufgaben ist es oft möglich, Teile der Figur durch die Fundamentaldreieckskonstruktionen

*) Aus dem Griechischen; bedeutet „Auflösung, Zergliederung“.

herzustellen. Vielfach lassen sich mit Hilfe der entsprechenden Lehrsätze nicht gegebene Winkel aus den gegebenen Stücken berechnen, z. B. im Dreieck $\sphericalangle \alpha = 2R - (\beta + \gamma)$, im $\triangle$ $\sphericalangle \beta = R - \gamma$, im $\triangle$ $\sphericalangle \beta = \frac{2R - \alpha}{2}$ oder $\sphericalangle \alpha = 2R - 2\beta$ u. s. w. Die Lage von Punkten bestimmt man oft durch Parallelen, durch Mittellote u. dgl., im allgemeinen durch geometrische Örter s. Anhang B). Um schwierige planimetrische Aufgaben lösen zu können, muss man sich die geometrischen Örter, alle Lehrsätze, die Beziehungen zwischen den Winkeln der Figuren, die Fundamentalaufgaben und die vorhergegangenen Aufgaben immer gegenwärtig halten. Im übrigen gehört zum Lösen schwerer Aufgaben ein gewisses Kombinationsgeschick, das dem einen mehr als dem andern eigen ist.

Musterbeispiel.

Aufgabe. $\triangle a + b + c = s$, $\sphericalangle \beta$, $\sphericalangle \gamma$.

In Worten: Ein Dreieck zu konstruieren aus der Summe seiner Seiten und zwei Winkeln.

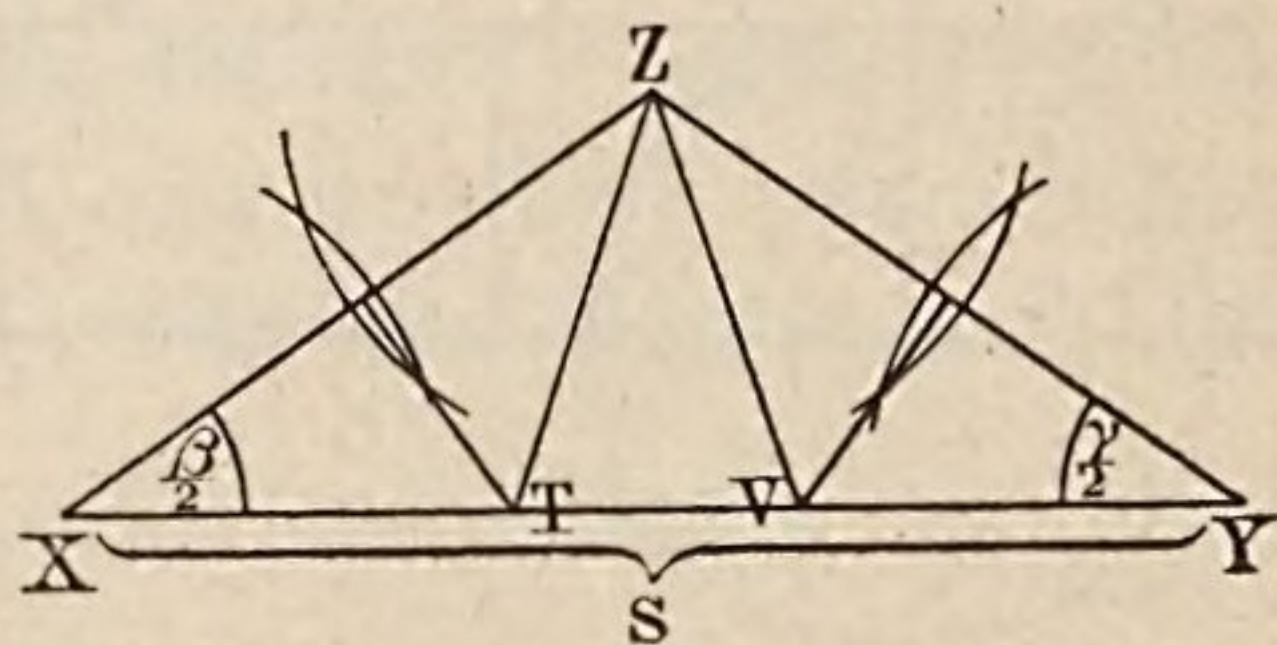
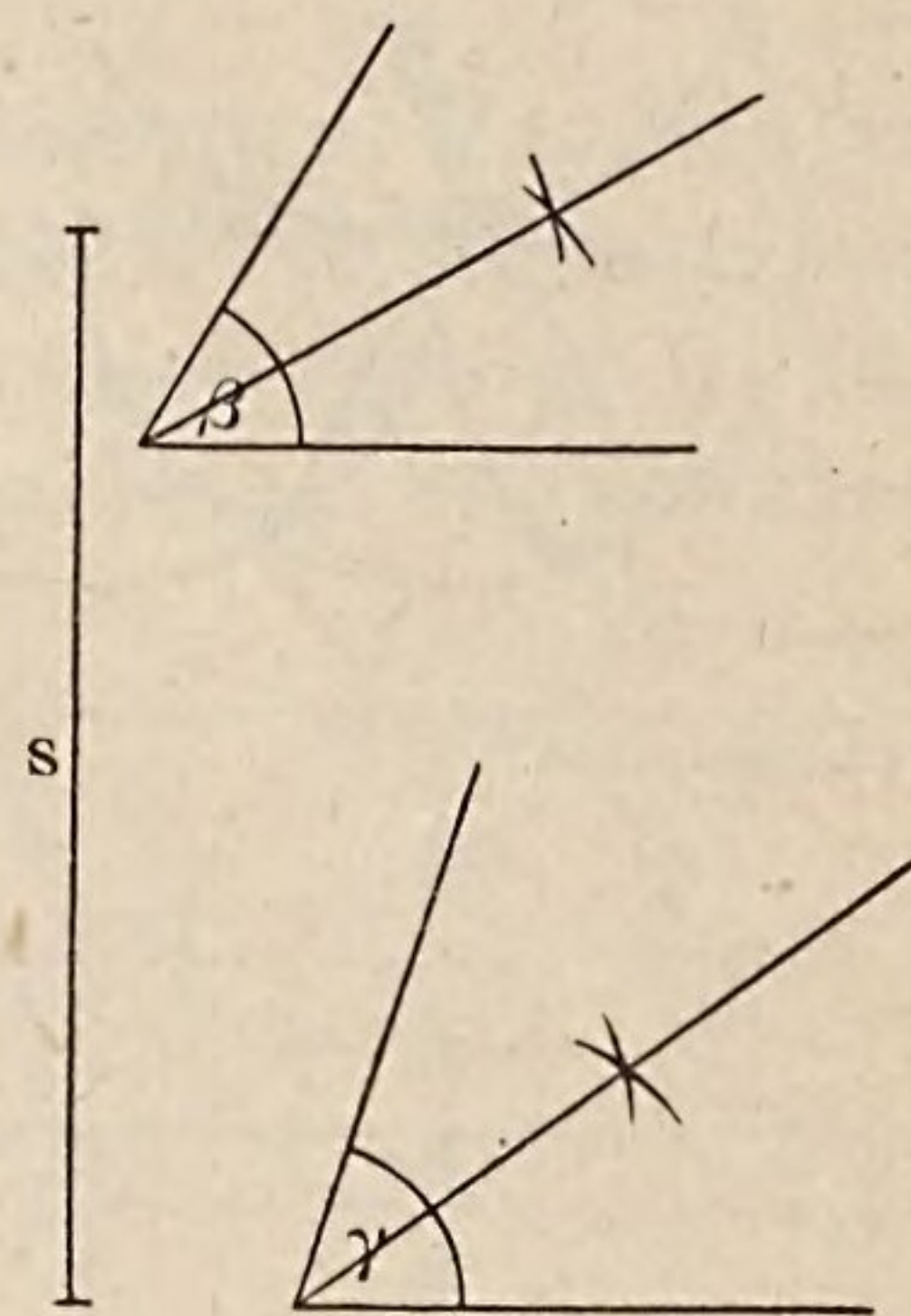
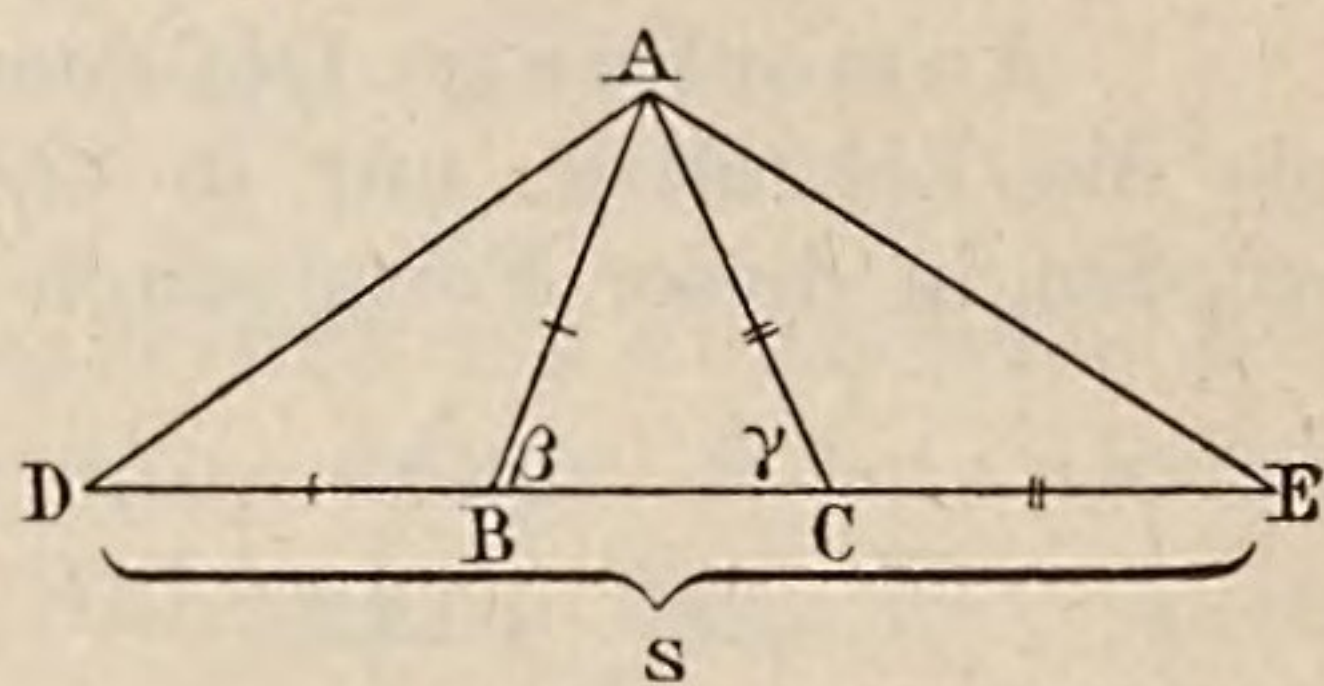
Anal. Angenommen ABC sei das gesuchte Dreieck, in welchem gegeben sind $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle ACB = \gamma$ und $AB + BC + AC = s$. Diese Summe stelle ich her, indem ich BC über B und C hinaus um AB und AC verlängere $= BD$ und CE , so dass $DE = s$ wird. Verbinde ich nun D und E mit A , so ist das $\triangle ADE$ konstruierbar nach Fundamentaldreieckskonstruktion 2^a aus $DE = s$ und den Winkeln $D = \frac{1}{2}\beta$ und $E = \frac{1}{2}\gamma$ (§ 26, Folg. 6). Die Punkte B und C liegen dann erstens auf DE und zweitens auf den Mittelloten von AD u. AE .

Geg. s , $\sphericalangle \beta$, $\sphericalangle \gamma$.

Ges. $\triangle$

Kon. An $s = XY$ trage ich in X $\sphericalangle \frac{\beta}{2}$ und in Y $\sphericalangle \frac{\gamma}{2}$ an, deren freie Schenkel

sich in Z treffen. Ziehe ich dann die Mittellote von XZ und YZ , die XY in T und V treffen, so ist, nachdem ich Z mit T und V verbunden habe, ZTV das gesuchte $\triangle$.



Bew. $\left. \begin{array}{l} TX = TZ \\ VY = VZ \end{array} \right\} \text{ (Satz vom Mittellot).}$

$$\text{I. } TZ + TV + VZ = XT + TV + VY \text{ (Gr. II)} = \\ = XY = s \text{ (K.)}$$

$$\sphericalangle ZTV = 2 \cdot \sphericalangle X; \quad \sphericalangle ZVT = 2 \cdot \sphericalangle Y \text{ (§ 26, Folg. 6)}$$

$$\sphericalangle X = \frac{\beta}{2}; \quad \sphericalangle Y = \frac{\gamma}{2} \text{ (K.)}$$

$$\text{II. } \sphericalangle ZTV = \beta \quad \text{III. } \sphericalangle ZVT = \gamma \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{II.} \\ \text{III.} \end{array}} \right\} \text{ (Gr. II)}$$

Aus I bis III folgt, dass ZTV das gesuchte Dreieck ist. W.z.b.w.

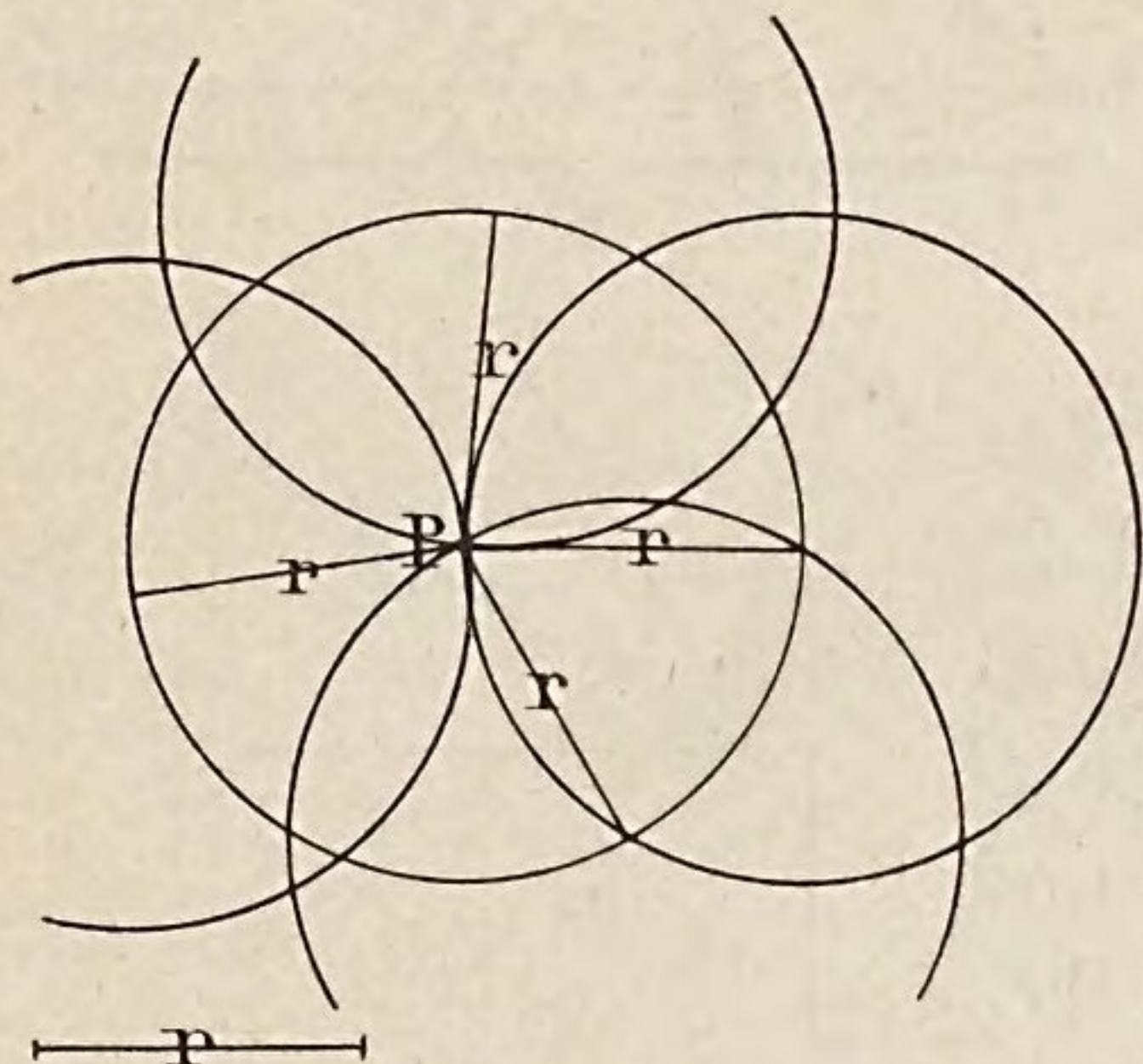
Det. $\sphericalangle \beta + \gamma < 180^\circ$.

XI. Anhang B.

§ 80. Vom geometrischen Ort. (g. O.)

Erklärung: Unter dem geometrischen Ort eines Punktes versteht man in der Planimetrie gerade oder krumme Linien, deren Punkte sämtlich mit Ausschluss aller übrigen gewissen gestellten Bedingungen genügen.

Anmerkung. Die geometrischen Örter enthalten nichts anderes als die Lehrsätze, nur in einer eigentümlichen Ausdrucksform. Sie wurden in dieser Form schon von den alten Griechen angewandt.

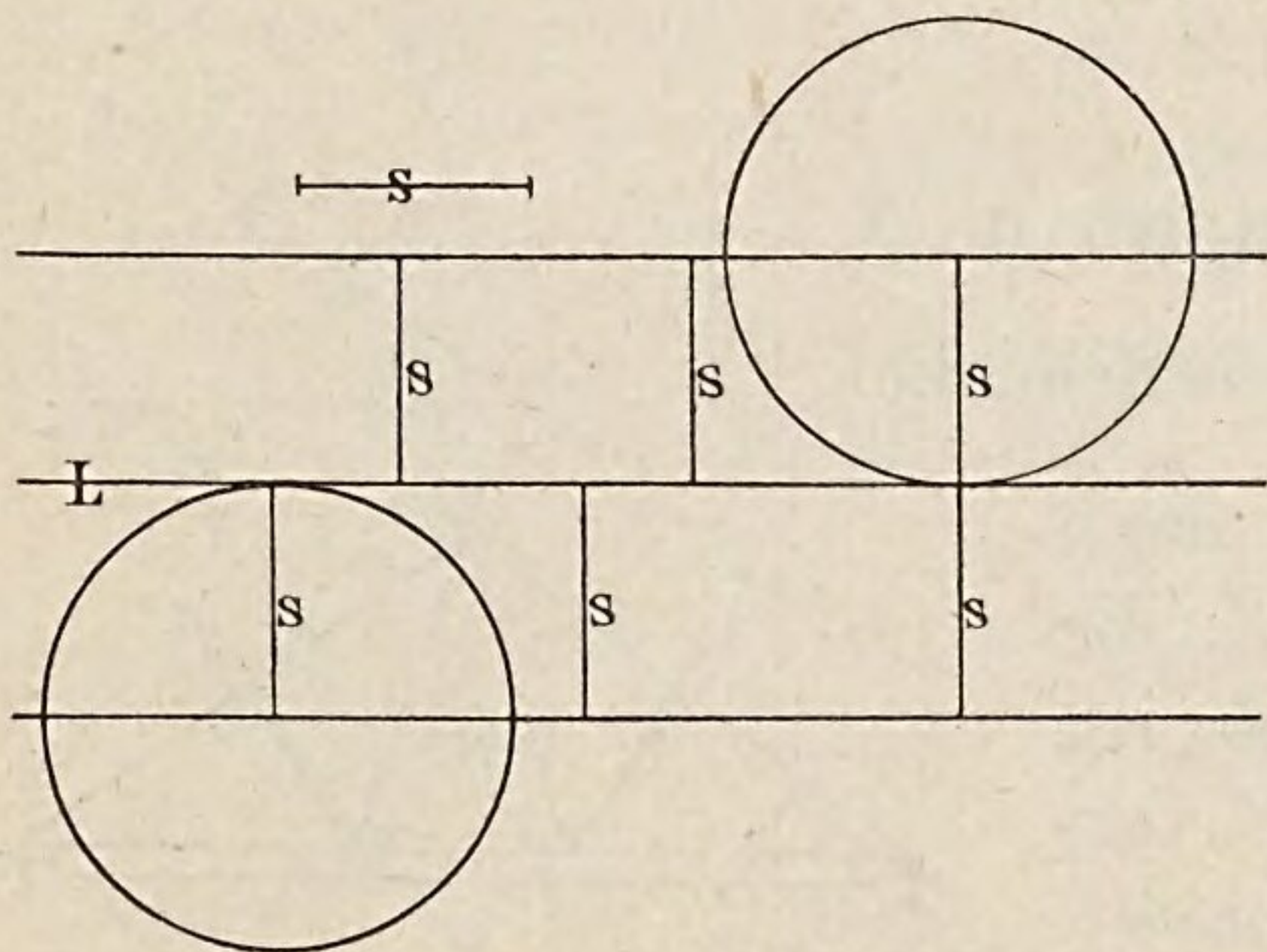


Die wichtigsten geometrischen Örter der Planimetrie sind:

I. Der g. O. eines Punktes, der von einem festliegenden Punkte P eine bestimmte Entfernung r hat, ist die Peripherie des um P mit r geschlagenen Kreises. Diese Peripherie ist gleichzeitig der g. O. für die Centren aller Kreise mit dem

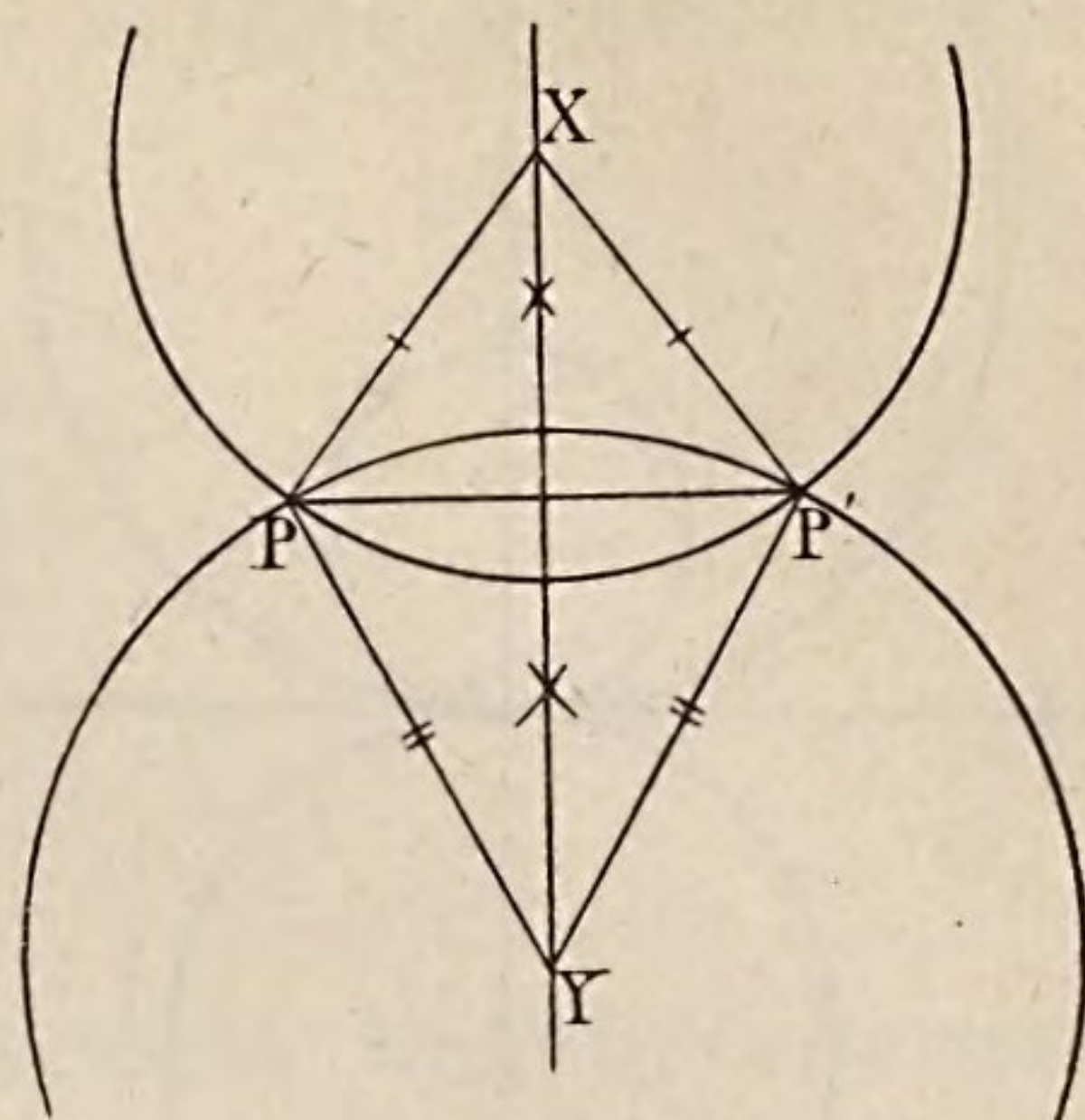
Radius r , deren Peripherien durch P gehen.

II. Der g. O. eines Punktes, der von einer Geraden L eine bestimmte Entfernung s hat, sind die beiden im Abstände s zu L gezogenen Parallelen. Diese Parallelen sind

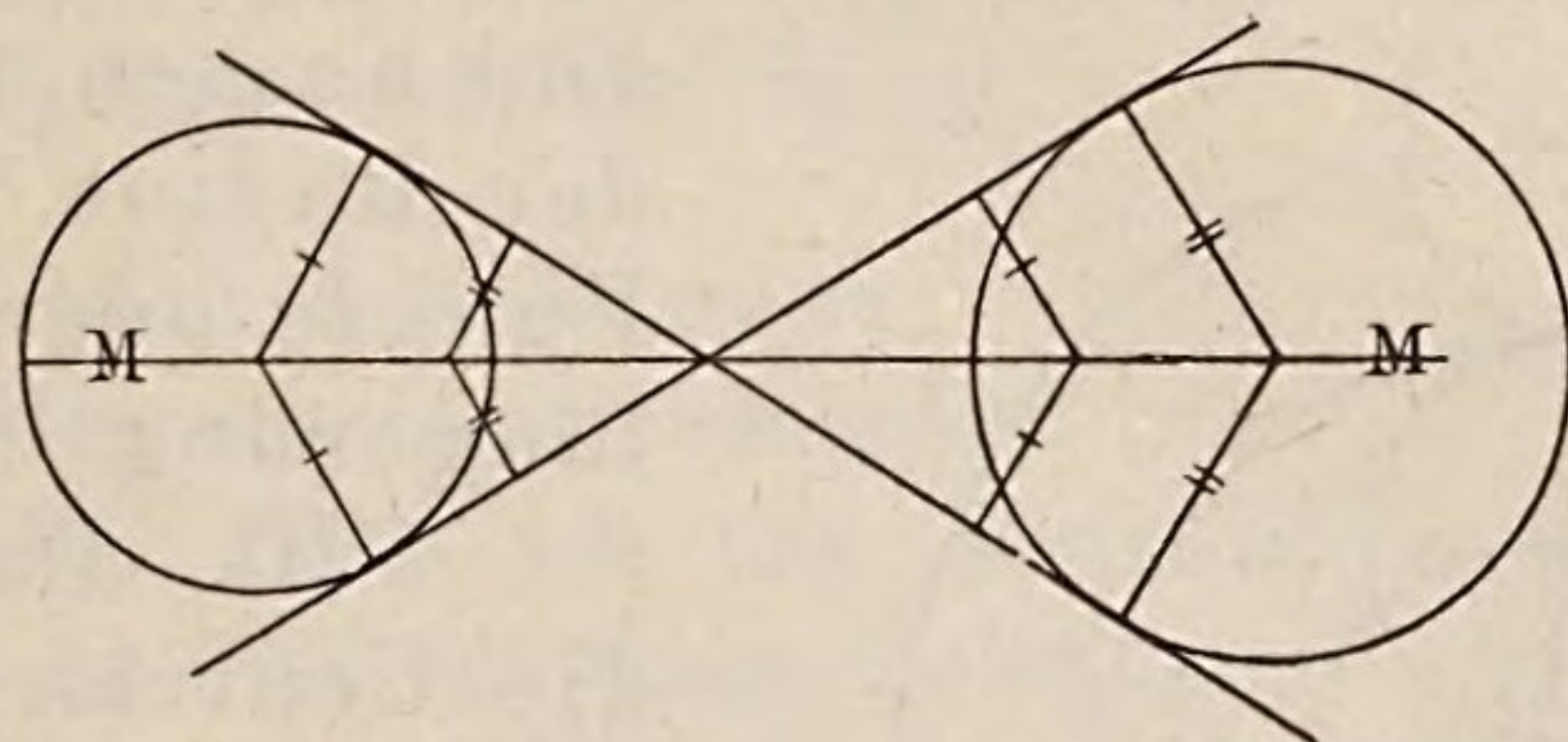


gleichzeitig der g. O. für die Centren aller Kreise mit s als Radius, deren Peripherien L berühren.

III. Der g. O. eines Punktes, der von zwei festliegenden Punkten P und P' gleiche Entfernung hat, ist das Mittellot der Verbindungsstrecke PP' . Daher ist dieses Mittellot auch der g. O. für die Centren aller Kreise, welche PP' als Sehne haben.

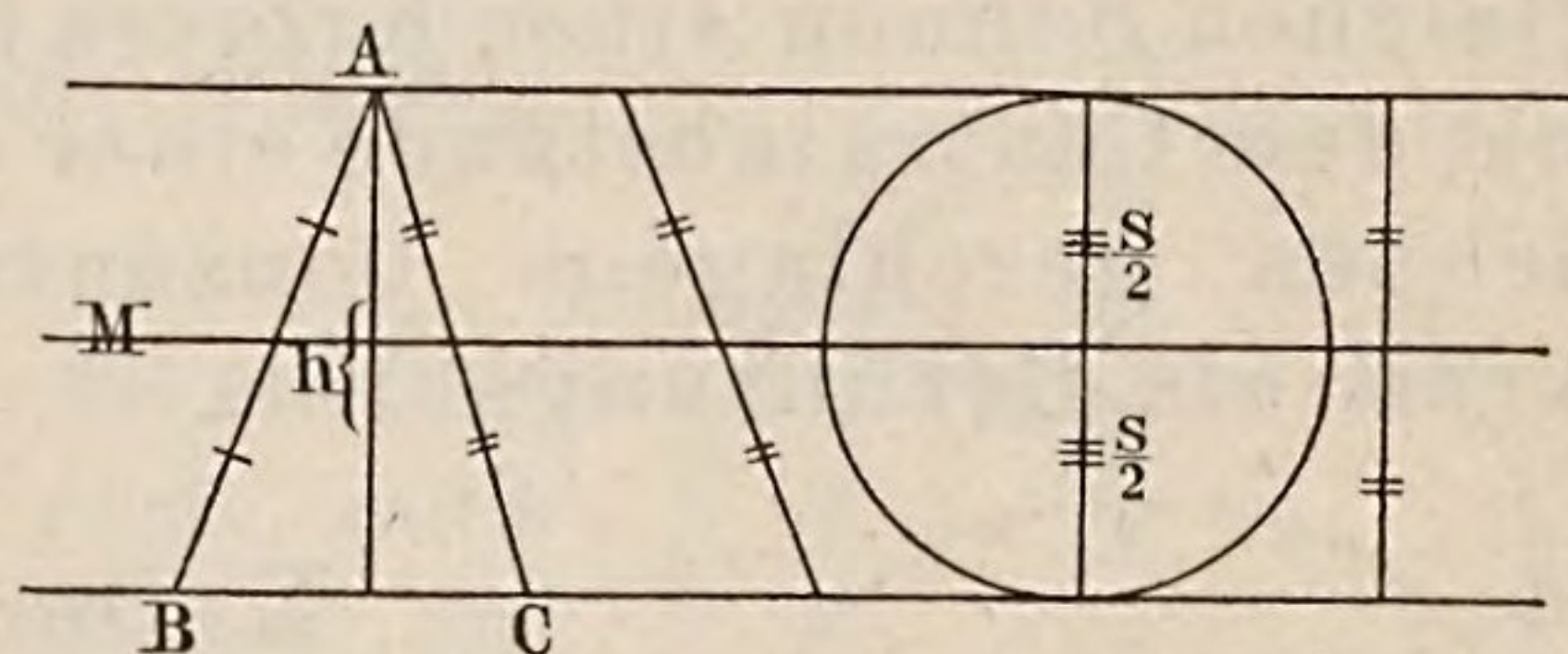


IV. Der g. O. eines Punktes, der von zwei sich schneidenden Geraden (oder von den Schenkeln eines Winkels) gleichen Abstand hat, ist die Halbierungslinie

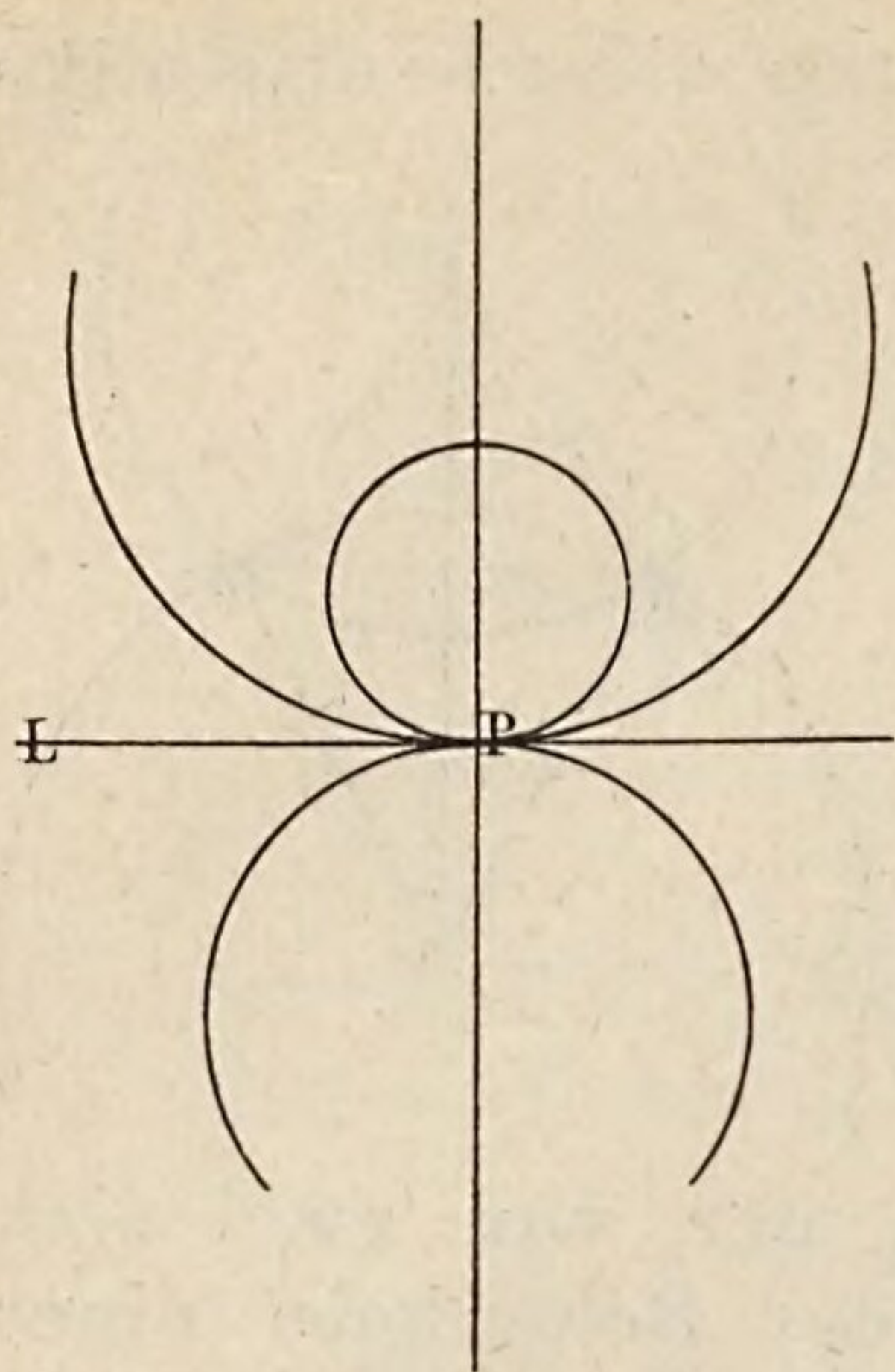


des Winkels. Diese Halbierungslinie ist ebenfalls der g. O. für die Centren aller Kreise, deren Peripherien die beiden Geraden (oder die Schenkel des Winkels) berühren.

V. Der g. O. eines Punktes, der von zwei Parallelen gleichen Abstand hat, ist die Parallele in der mittleren Entfernung. Diese Gerade ist auch der g. O. für die Mitten aller von den beiden Parallelen begrenzten Strecken. Ebenso ist

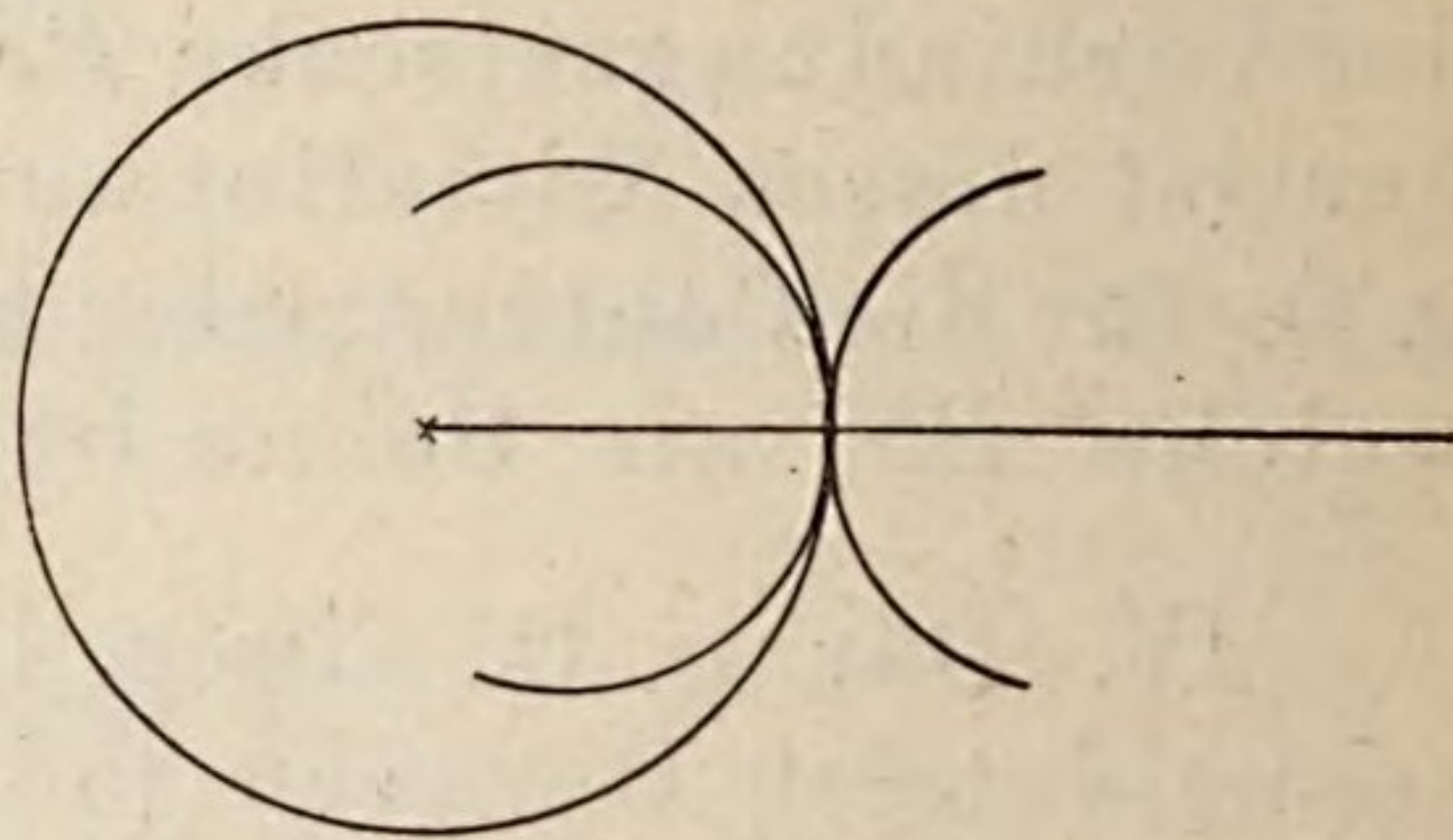


im Dreieck die durch die Mitte einer Höhe zu der zugehörigen Seite gezogene Parallele der g. O. für die Mitten aller von der Spitze nach der Grundlinie oder deren Verlängerung gezogenen Strecken. Die Parallele in der mittleren Entfernung ist ebenfalls der g. O. für die Centren aller Kreise, welche die Parallelen berühren (Radius = $\frac{s}{2}$).



VI. Der g. O. für die Centren aller Kreise, welche eine Gerade L in einem Punkte P berühren, ist das in P auf L errichtete Lot.

VII. Der g. O. für die Centren aller Kreise, welche einen gegebenen Kreis in einem gegebenen

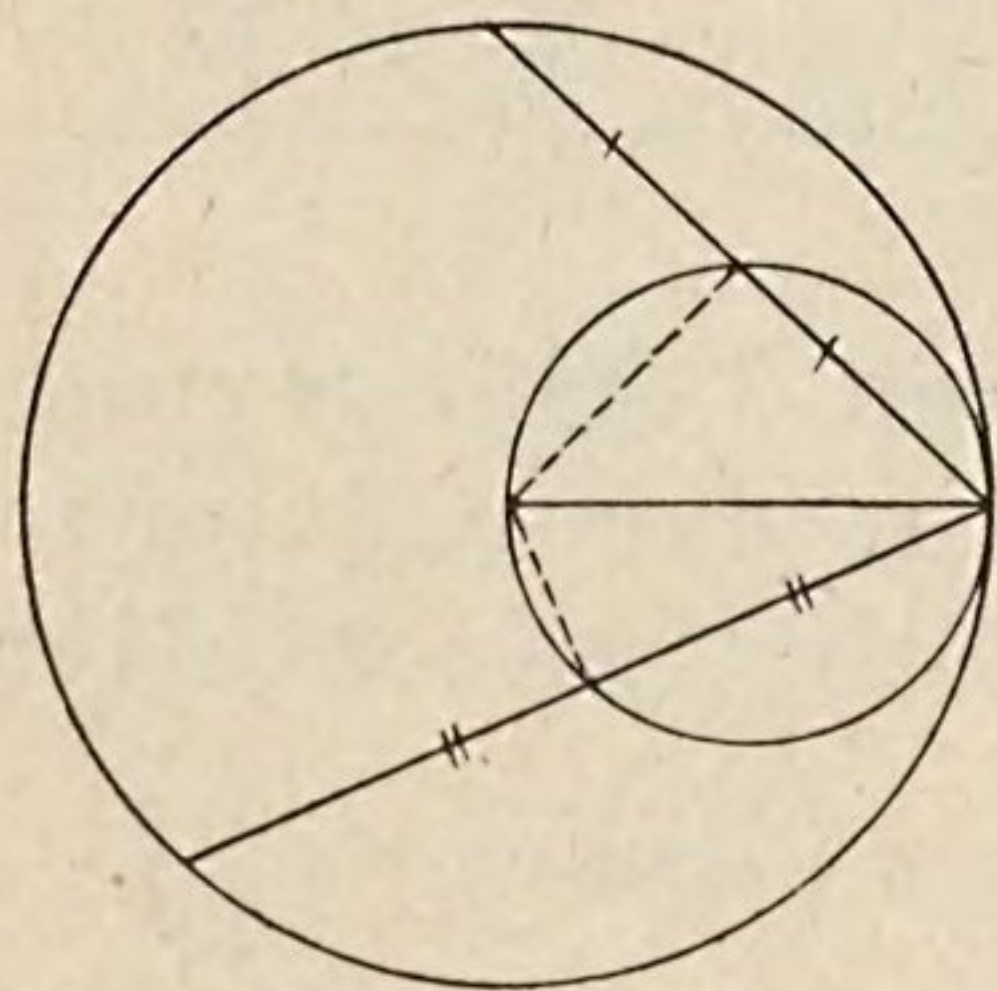
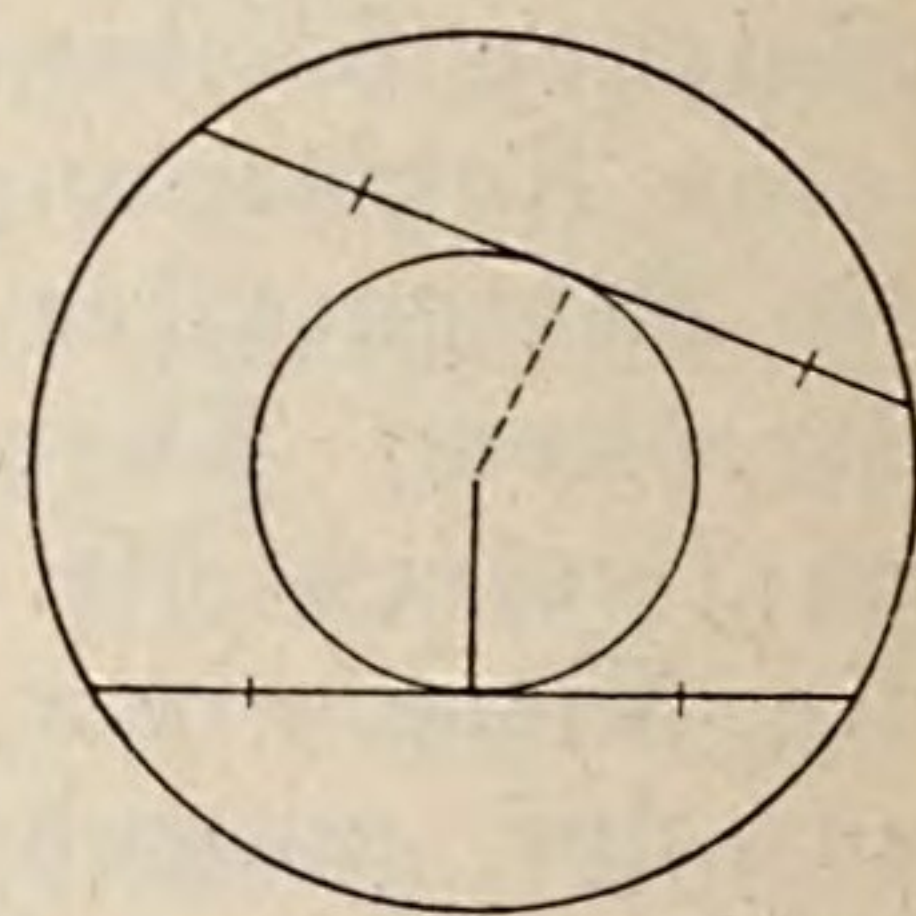


Punkte von innen oder von aussen berühren, ist der Radius nach diesem Punkte oder dessen Verlängerung.

VIII. Der g. O. für die Centren aller Kreise von gegebenem Radius ϱ , welche einen gegebenen Kreis vom Radius r von innen oder aussen berühren, ist die Peripherie des mit $r - \varrho$ (oder $\varrho - r$,

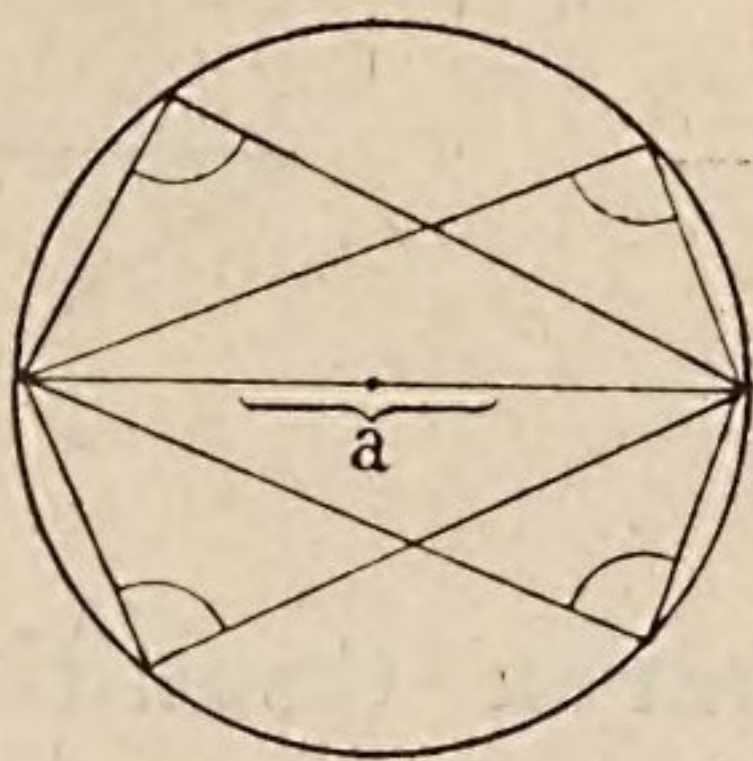
wenn $\varrho > r$) oder $r + \varrho$ geschlagenen konzentrischen Kreises.

IX. Der g. O. für die Mitten aller gleichen Sehnen eines Kreises ist der mit dem Centralabstande einer dieser Sehnen geschlagene konzentrische Kreis als Berührungskreis.



X. Der g. O. für die Mitten aller von einem Punkte der Peripherie eines Kreises aus gezogenen Sehnen ist die Peripherie des über dem Radius nach diesem Punkte hin als Durchmesser geschlagenen Kreises.

XI. Der g. O. für die Spitzen aller rechtwinkligen Dreiecke über einer Strecke a als Hypotenuse ist die



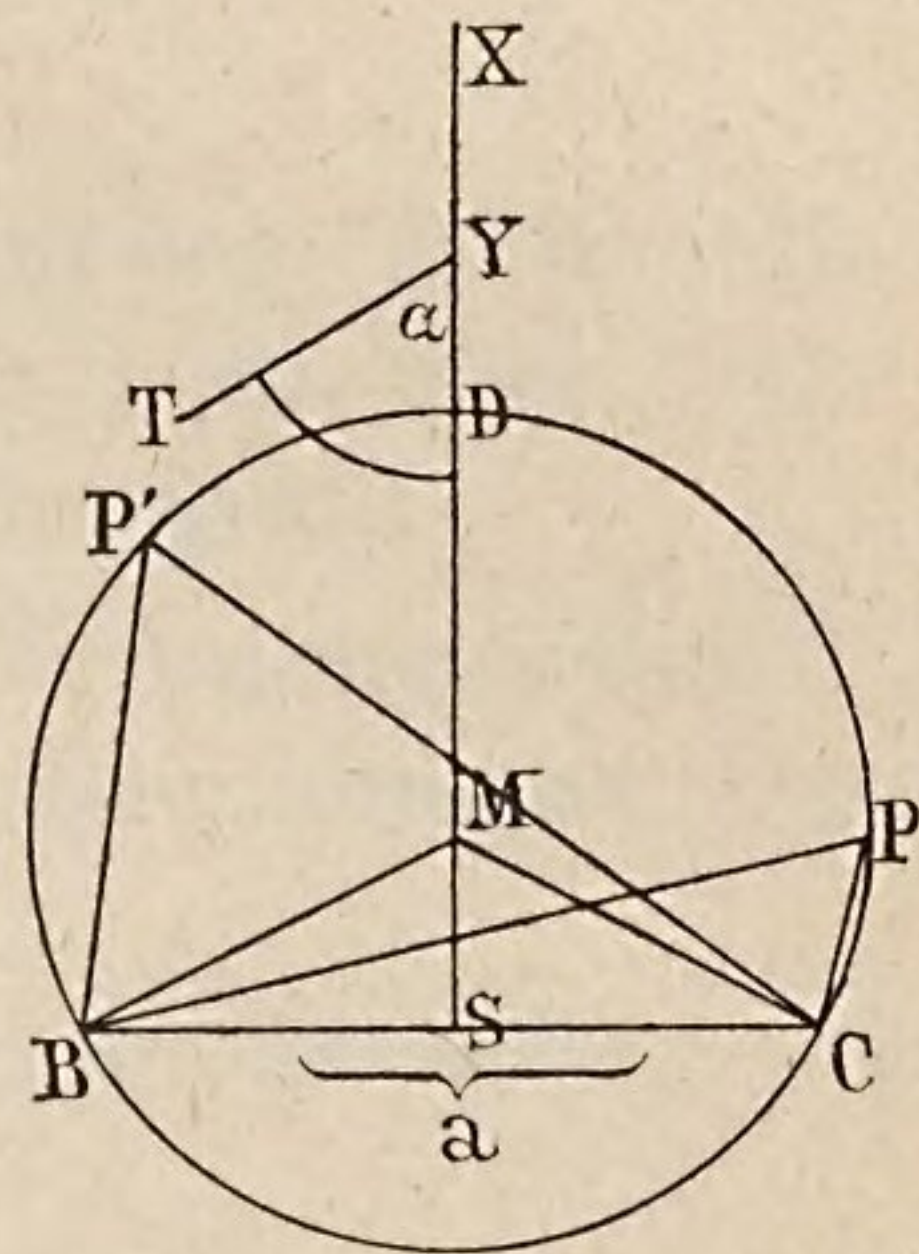
Peripherie des über a als Durchmesser beschriebenen Kreises.

XII. Der g. O. für die Spitzen aller Dreiecke über einer Strecke a , welche an der Spitze einen gegebenen $\sphericalangle \alpha$ haben, ist der Kreisbogen, der a als Sehne und $\sphericalangle \alpha$ als Peripheriewinkel fasst.

Konstruktion des Bogens:

1. (Mit Hilfe des Centriwinkels.)

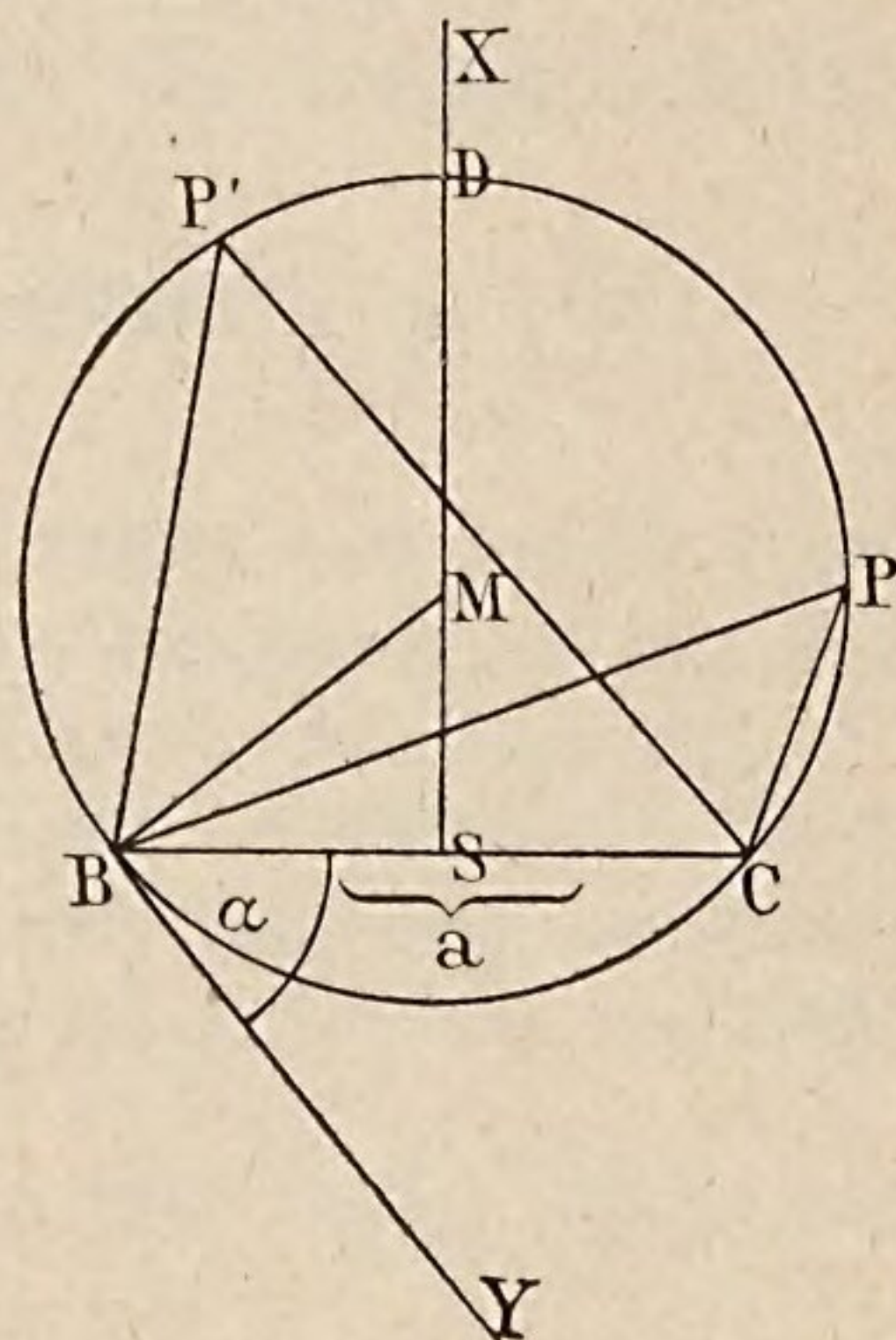
Zu $a = BC$ ziehe ich das Mittellot SX und trage an SX in einem beliebigen Punkte Y den $\sphericalangle \alpha$ an $= SYT$. Sodann ziehe ich von B zu TY die Parallele, welche SX in M trifft. Schlage ich endlich um M mit MB als Radius den Kreis, so ist der Bogen BDC der gesuchte.



Bew. $\sphericalangle BMS = \alpha$ (G. $\sphericalangle$ an $\parallel$)
 $\sphericalangle BMC = 2\alpha$ (Satz vom Mittellot)
 $\sphericalangle P, P' \text{ u. s. w.} = \alpha$ (P. $\sphericalangle = \frac{1}{2}$ C. $\sphericalangle$).

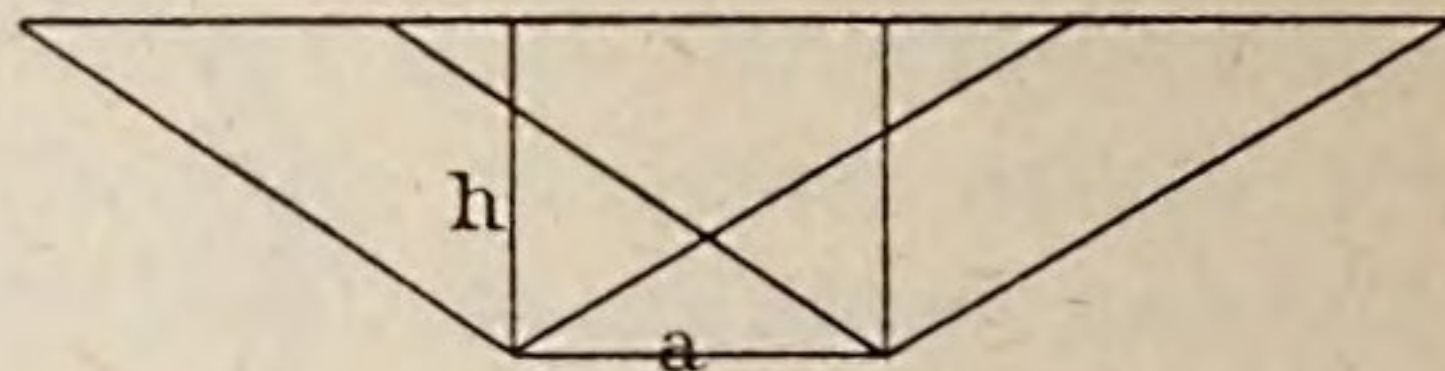
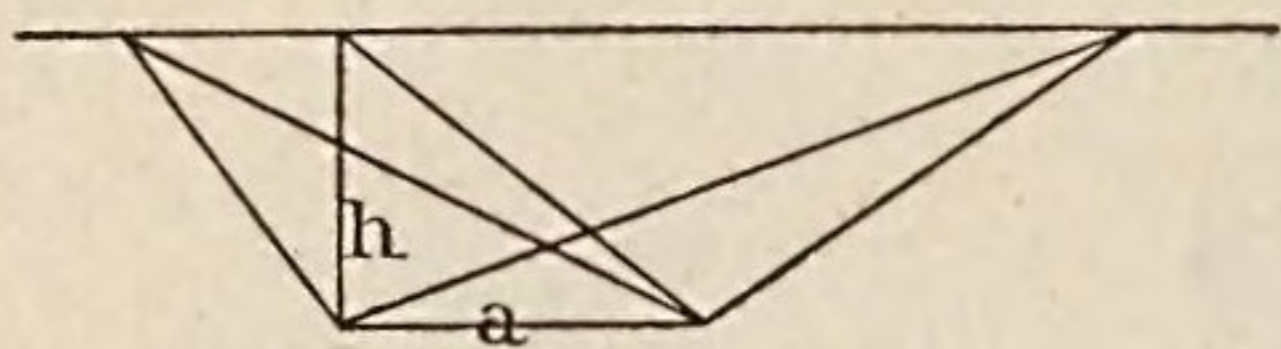
2. (Mit Hilfe des Winkels zwischen Tangente und Sehne.)

Zu $a = BC$ ziehe ich das Mittellot SX und trage an BC nach unten $\sphericalangle \alpha$ an $= CBY$. Errichte ich nun auf BY in B das Lot, welches das Mittellot in M trifft, und schlage um M mit MB den Kreis, so ist der obere Bogen BDC der gesuchte.



Bew. $\sphericalangle P, P' \dots = \alpha$ (§ 48₃).

XIII. Der g. O. für die Spitzen aller gleichen Dreiecke über a als Grundlinie ist die im Höhenabstand h zu a gezogene Parallele. Ebenso ist diese Parallele



der g. O. für die oberen Grundlinien aller gleichen Parallelogramme, die über a konstruiert werden können.

Anmerkung. Dieser Ort ist die hauptsächlichste Grundlage der Verwandlungsaufgaben. Eine Grösse verwandeln bedeutet in der Mathematik, ihr eine andere Form geben, ohne den Inhalt zu ändern.

B. Arithmetik.

I. Einleitendes.

§ 81.

Die Arithmetik, oder die Lehre von den Zahlengrößen (vgl. § 2), zerfällt in 2 Abteilungen:

1. Gemeine Arithmetik oder Rechnen,
2. Allgemeine Arithmetik.

(Die allgemeine Arithmetik oder schlechtweg Arithmetik wird wohl auch „Algebra“ genannt. Algebra*) ist aber richtiger die Lehre von der Auflösung der Gleichungen.)

In der Arithmetik unterscheiden wir 7 Rechnungsarten:

1. Addieren**) oder Zusammenzählen (Rechnungszeichen $+$, plus).
2. Subtrahieren**) oder Abziehen (Rechnungszeichen $-$, minus).
3. Multiplizieren**) oder Malnehmen (Rechnungszeichen $\cdot$, mal).
4. Dividieren**) oder Teilen (Rechnungszeichen $:$, dividiert durch).
5. Potenzieren**) (Rechnungszeichen s. § 126).
6. Radizieren**) oder Wurzelausziehen (Rechnungszeichen s. § 136).
7. Logarithmieren***) (Rechnungszeichen s. § 153).

*) Das Wort Algebra stammt aus dem Arabischen und heisst etwa „Verbindung getrennter Teile“. Das älteste Werk hierüber ist das des Arabers Mohamed ben Mufa Alkhwarizmi aus dem 4. Jahrhundert.

**) Die Worte stammen aus dem Lateinischen. Potenzieren lässt sich schlecht übersetzen; es heisst etwa soviel wie „mächtig machen“ oder „erhöhen“. Die jetzt üblichen Rechnungszeichen kamen um 1600 in Gebrauch.

***) Das Wort stammt aus dem Griechischen und heisst etwa soviel wie „die Verhältniszahl suchen“.

§ 82.

Das Rechnen beschäftigt sich nur mit der natürlichen, die allgemeine Arithmetik ausserdem auch mit der algebraischen Zahlenreihe.

Die natürliche Zahlenreihe geht von Null*) (0) bis ins Unendliche (∞); sie lautet:

$$0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 \dots \infty$$

Die ersten 10 Zeichen heissen Ziffern. Das jetzt bei allen Kulturvölkern übliche ausserordentlich sinnreiche Zahlensystem stammt aus Indien und kam durch die Araber zu uns; man nennt es deshalb meistens das arabische Zahlensystem. Besteht bei demselben eine mehrziffrige Zahl z. B. aus den Ziffern a, b, c, d, e, f, g , so ist die betreffende Zahl:

$$1000000a + 100000b + 10000c + 1000d + 100e + 10f + g.$$

Die algebraische Zahlenreihe wird durch das Vorsetzen sogenannter Vorzeichen $+$ (plus) und $-$ (minus) gebildet; sie lautet:

$$-\infty \dots -5; -4; \overset{\leftarrow}{-3}; -2; -1; 0; \overset{+}{+1}; +2; +3; +4; +5; \dots +\infty.$$

Die mit $+$ versehenen Zahlen nennt man positive**), die mit $-$ versehenen negative**); die Seite rechts von der 0 heisst die positive, die links von der 0 die negative Seite der Zahlenreihe; ebenso heisst die Richtung nach rechts die positive, die nach links die negative.

Die Zahlen ohne Vorzeichen nennt man absolute***), die mit Vorzeichen versehenen relative***) oder algebraische Zahlen.

Die allgemeine Arithmetik unterscheidet sich auch noch durch die Einführung allgemeiner Zeichen ($a, b, c, d \dots x, y, z$) vom Rechnen. Die Gesetze werden an diesen allgemeinen Zeichen, unter denen man sich dann ganz beliebige Grössen vorstellen kann, entwickelt.

Bei einer algebraischen Grösse, z. B. $+7x$, unterscheidet man

$+$ das Vorzeichen,

7 den Koeffizienten†),

x die Hauptgrösse,

$(+7)$ den algebraischen Koeffizienten.

*) Aus dem Lateinischen; bedeutet „keine“ (Zahl). Die Hohlziffer 0 bezeichnet die Abwesenheit einer Ziffer.

**) Aus dem Lateinischen; bedeutet soviel wie „festgesetzt oder bejahend“ bez. „aufgehoben oder verneint“.

***) Aus dem Lateinischen; die Worte bedeuten soviel wie „losgelöst“ (von jeder Beziehung) bez. „bezüglich“.

†) Aus dem Lateinischen; bedeutet soviel wie „mit bewirkende“ (die mit bewirkende Zahl).

Will man in der Arithmetik andeuten, dass mehrere Grössen zusammen betrachtet werden, so setzt man sie in eine Klammer, z. B. $(6a + 7b - 5c)$.

Den Koeffizienten 1 lässt man meistens fort, ebenso das Vorzeichen $+$ am Anfang. Somit bedeutet x eigentlich $+1x$.

Grössen, welche dieselbe Hauptgrösse haben, heissen gleichartig, z. B. $3x$ und $7x$, solche mit verschiedenen Hauptgrössen ungleichartig, z. B. $3x$ und $7y$.

Anmerkung. Auf die negativen Zahlen wurde man z. B. durch die Aufgabe 3 weniger 4 geführt. Dieselbe ist im Rechnen nicht lösbar, in der allgemeinen Arithmetik erhält man -1 . Auch im gewöhnlichen Leben kommt man auf derartige Verhältnisse, z. B. Vermögen $+$, Schulden $-$, beim Thermometer, Bezeichnung der Wärmegrade mit $+$ (über 0°), der Kältegrade mit $-$ (unter 0°) u. s. w. In die Mathematik wurden die positiven und negativen Grössen hauptsächlich durch den Philosophen Descartes (1596—1650) eingeführt. Die Vorzeichen stimmen mit den Rechnungszeichen der Addition und Subtraktion überein. Die Einführung der Buchstabenrechnung in die Mathematik verdanken wir besonders dem französischen Mathematiker Viète (1550—1603). Die Klammern kamen im 17. Jahrhundert in Gebrauch, die jetzt üblichen Rechnungszeichen um 1600, ebenso die Dezimalzahlen.

II. Addieren. (Zusammenzählen. Hinzuzählen. Hinzufügen.)

§ 83.

Erklärung: Addieren heisst: Von einer gegebenen Zahl in der Zahlenreihe in gegebener Richtung um so viele Stellen fortschreiten, wie eine zweite gegebene Zahl anzeigt.

Die Zahlen, welche zusammengezählt werden sollen, heissen die **Summanden***), das Ergebnis die **Summe**.

$$\text{Z. B. } (+3) + (-5) = -2$$

$$\text{und } \left. \begin{array}{r} +3 \\ -5 \end{array} \right\} \text{ Summanden; } -2 \text{ Summe.}$$

Der erste Summand $+3$ ist in der Zahlenreihe aufzusuchen. Das Vorzeichen des zweiten Summanden giebt die Richtung an, in der man fortschreiten soll. Das $+$ Zeichen zwischen den Summanden ist das Rechnungszeichen der Addition.

Um demnach $(+3) + (-5)$ zu addieren, suche man in der algebraischen Zahlenreihe

$$\begin{array}{c} \leftarrow - \quad | \quad + \rightarrow \\ -\infty \dots; -4; -3; -2; -1; 0; +1; +2; +3; +4; \dots +\infty. \end{array}$$

*) Aus dem Lateinischen; bedeutet „die Zahlen, die zusammengezählt werden sollen“.

die Zahl $+3$ auf, und schreite, da man -5 addieren soll, in negativer Richtung um 5 Stellen weiter. Man kommt dann nach -2 . Also ist:

$$\begin{aligned} (+3) + (-5) &= -2; \text{ ebenso erhält man} \\ (+4) + (-3) &= +1; \\ (-3) + (+5) &= +2 \text{ und} \\ (-4) + (+3) &= -1. \end{aligned}$$

Anmerkung. Es kommt dem Anfänger seltsam vor, dass durch Addition eine Verkleinerung hervorgebracht wird. Z. B.

$$(+4) + (-3) = +1.$$

Man denke daran, dass durch Hinzufügen (Addieren) einer Schuld ein Vermögen kleiner wird, ebenso durch Hinzugießen von kaltem Wasser warmes weniger warm wird und ähnliches mehr.

§ 84.

Aus der Erklärung der Addition ergibt sich das Gesetz:
Die Reihenfolge der Summanden ist gleichgiltig.

$$\begin{aligned} \text{Z. B. } (+3) + (-5) &= -2 \\ (-5) + (+3) &= -2 \end{aligned}$$

$$(+3) + (-5) = (-5) + (+3) \text{ (Gr. III).}$$

Der allgemeine Ausdruck dieses Gesetzes lautet in mathematischer Formel:

$$a + b = b + a.$$

Eine Formel ist ein in Zeichen ausgedrücktes mathematisches Gesetz.

§ 85.

Aus der Erklärung der Addition ergibt sich folgende praktische Regel:

Gleichartige Grössen von gleichem Vorzeichen addiert man, indem man die Zahlwerte zusammenzählt und dem Ergebnis die gemeinsame Hauptgrösse und das gemeinsame Vorzeichen giebt. Gleichartige Grössen von verschiedenen Vorzeichen addiert man, indem man den kleineren Zahlwert von dem grösseren abzieht und dem Ergebnis die gemeinsame Hauptgrösse und das Vorzeichen des grösseren giebt.

$\begin{array}{r} \text{Z. B. } +3x \\ +5x \\ \hline +8x; \end{array}$	$\begin{array}{r} -3x \\ -5x \\ \hline -8x; \end{array}$	$\begin{array}{r} +3x \\ -5x \\ \hline -2x; \end{array}$	$\begin{array}{r} -3x \\ +5x \\ \hline +2x; \end{array}$
$\begin{array}{r} x \\ x \\ \hline 2x; \end{array}$	$\begin{array}{r} -x \\ -x \\ \hline -2x; \end{array}$	$\begin{array}{r} 3x \\ 5y \\ \hline 3x + 5y; \end{array}$	$\begin{array}{r} x \\ -y \\ \hline x - y. \end{array}$

Zusatz 1. Gleichartige Grössen von denselben Zahlwerten, aber ungleichen Vorzeichen geben als Summe 0.

$$\begin{array}{rcl} \text{Z. B.} & \begin{array}{r} - 5x \\ + 5x \\ \hline 0 \end{array} & \text{aber} \quad \begin{array}{r} - 5x \\ + 5y \\ \hline 5y - 5x \end{array} \end{array}$$

Zusatz 2. Mehrgliedrige Grössen werden addiert, indem man die einzelnen Glieder addiert.

$$\begin{array}{rcl} \text{Z. B.} & x + (2y - 3z) + (-2y + 2z) + \\ & + (7x - 3y + z) = \\ \hline & x + 2y - 3z \\ & - 2y + 2z \\ & 7x - 3y + z \\ \hline & 8x - 3y. \end{array}$$

III. Subtrahieren. (Abziehen. Vermindern.)

§ 86.

Das Subtrahieren ist die Umkehrung des Addierens.

Beim Addieren waren die beiden Summanden gegeben und die Summe wurde gesucht. Beim Subtrahieren sind die Summe und der eine Summand gegeben; gesucht wird der andere Summand. Die Summe heisst dann Minuendus*) der gegebene Summand Subtrahendus*) und der gesuchte Summand Differenz*).

$$\begin{array}{l} \text{Addition: } (+3) + (-5) = -2, \\ \text{daraus Subtraktion: } (-2) - (+3) = -5. \\ \quad -2 = \text{Minuendus,} \\ \quad +3 = \text{Subtrahendus} \\ \quad -5 = \text{Differenz.} \end{array}$$

Beim Subtrahieren handelt es sich um die Frage:

Welche Grösse muss man zum Subtrahendus addieren, damit der Minuendus sich ergibt?

Im Beispiel muss man zu $+3$ die Zahl -5 addieren, um -2 zu erhalten.

Erklärung: Subtrahieren heisst: Eine Grösse suchen, welche zum Subtrahendus addiert den Minuendus hervorbringt. Diese Grösse heisst Differenz.

Also ist die Differenz die Grösse, welche zum Subtrahendus addiert den Minuendus ergibt.

*) Minuendus heisst zu deutsch: „die Zahl, die verringert werden soll“, Subtrahendus: „die Zahl, die abgezogen werden soll“, Differenz: „Unterschied“. Die Worte stammen aus dem Lateinischen.

Z. B. ist $a - b$ die Grösse, welche zu b addiert a hervorbringt
 $a - b + b = a$.

Das Hauptgesetz und der Beweis jeder Subtraktion ist:
Differenz plus Subtrahendus muss gleich dem Minuendus sein.
 Man merke: Ist $m - s = d$, so ist $d + s = m$. Z. B.:

$$\begin{array}{ll} (+100) - (+20) = +80. & \text{Bew. } (+80) + (+20) = +100. \\ (+70) - (-30) = +100. & \text{„ } (+100) + (-30) = +70. \\ (-10) - (+3) = -13. & \text{„ } (-13) + (+3) = -10. \\ (-9) - (-5) = -4. & \text{„ } (-4) + (-5) = -9. \end{array}$$

Anmerkung. Dass unter Umständen durch Subtrahieren eine Vergrösserung hervorgebracht wird, dass z. B. $+1 - (-3) = +4$ ist, ist dem Anfänger oft schwer verständlich. Man macht sich am besten diese Thatsache an der Zahlenreihe klar, indem man sich überzeugt, dass man, um von -3 nach $+1$ zu gelangen, 4 Stellen in positiver Richtung weiter gehen muss. Auch möge man bedenken, dass ein Vermögensbestand vergrössert wird, wenn Schulden subtrahiert werden.

Zusatz. Die Reihenfolge von Minuendus und Subtrahendus ist nicht gleichgiltig. Z. B. $5 - 4$ nicht $= 4 - 5$.

§ 87.

Praktische Regel für die algebraische Subtraktion:

Man subtrahiert, indem man dem Subtrahendus das entgegengesetzte Vorzeichen giebt und addiert.

$$\text{Z. B. } (+20x) - (+15x) = 20x - 15x = 5x.$$

$$\text{Beweis: } 5x + 15x = +20x.$$

$$(+20x) - (-15x) = 20x + 15x = 35x.$$

$$\text{Beweis: } 35x - 15x = +20x.$$

$$(-20x) - (+15x) = -20x - 15x = -35x.$$

$$\text{Beweis: } -35x + 15x = -20x.$$

$$(-20x) - (-15x) = -20x + 15x = -5x.$$

$$\text{Beweis: } -5x - 15x = -20x.$$

$$\text{Beachte: } (+20x) - (+15y) = 20x - 15y.$$

Zusatz. Eine mehrgliedrige Grösse wird subtrahiert, indem man die einzelnen Glieder subtrahiert.

$$\text{Z. B. } 10x - (5y + 6z - 7q) = 10x - 5y - 6z + 7q.$$

§ 88.

Praktische Regel für die Auflösung von Klammern.

(Folgt aus § 85 Zusatz 2 und § 87 Zusatz.)

Klammern, vor denen $+$ steht, werden aufgelöst, indem man die Klammern fortlässt und nichts ändert; Klammern,

vor denen — steht, löst man auf, indem man sie fortlässt und jedem Gliede das entgegengesetzte Vorzeichen giebt.

(Hierbei ist zu beachten, dass, wenn das erste Glied einer Klammer kein Vorzeichen hat, es eine positive Grösse ist.)

$$\begin{array}{r} \text{Z. B.} \quad -(10x - 5y + 3z) + (-3x - 10y - z) \\ \quad - (-7x - 5y - 2z) = \\ \hline \quad -10x + 5y - 3z \\ \quad - 3x - 10y - z \\ \quad \quad 7x + 5y + 2z \\ \hline \quad -6x \qquad \qquad -2z. \end{array}$$

§ 89.

Sollen umgekehrt mehrere Glieder in eine Klammer zusammengefasst werden, so lässt man, wenn man + vor die Klammer setzt, alles ungeändert; setzt man aber — vor die Klammer, so muss man in der Klammer jedem Gliede das entgegengesetzte Vorzeichen geben.

$$\begin{array}{l} \text{Z. B.} \quad 5x + 6y - 3z = 5x + (6y - 3z) \\ \qquad \qquad \text{oder} \quad = 5x - (3z - 6y). \end{array}$$

§ 90.

Die Differenz zweier gleicher Grössen ist 0.

$$\text{Z. B.} \quad +5x - (+5x) = 5x - 5x = 0.$$

Erklärung: Null ist die Differenz zweier gleicher Grössen.

$$\text{Z. B.} \quad 0 = a - a = 5x - 5x = 3y - 3y \text{ u. s. w.}$$

Merke: Eine Grösse bleibt ungeändert, wenn man 0 zu ihr addiert oder von ihr subtrahiert.

$$\text{Z. B.} \quad 5 + 0 = 5; \quad 5 - 0 = 5.$$

Aber auch $a + x - x = a$; in Worten:

Eine Grösse bleibt ungeändert, wenn man eine andere Grösse zu ihr addiert und von ihr subtrahiert (denn man addiert in Wirklichkeit 0), oder: Addition und Subtraktion sind entgegengesetzte Rechnungsarten und heben sich gegenseitig auf.

Zusatz. Wird eine positive Zahl von 0 subtrahiert, so erhält man dieselbe Zahl mit negativem Vorzeichen.

$$0 - (+5) = -5.$$

Erklärung: Eine negative Zahl ist eine Differenz mit dem Minuendus 0 und demselben positiven Zahlwert als Subtrahendus.

IV. Multiplizieren. (Malnehmen. Vervielfachen.)

§ 91.

Multiplizieren heisst: Eine Zahl (Multiplikandus) so oft als Summand setzen, wie eine zweite Zahl (Multiplikator) anzeigt.

Während man im Rechnen als Multiplikationszeichen häufig das $\times$ anwendet, gebraucht man in der Mathematik nur den Punkt, der in der Verbindung von Zahlen mit Buchstaben oder von Buchstaben untereinander fortgelassen wird, z. B. $4a$ (statt $4 \cdot a$), $3abc$ (statt $3 \cdot a \cdot b \cdot c$). Multiplikandus*) und Multiplikator*) führen den gemeinsamen Namen: Faktor*). Das Ergebnis heisst das Produkt. Ein Produkt*) ist eine Summe gleicher Summanden.

Beispiel: $5 \cdot 3 = 5 + 5 + 5 = 15$.

Anmerkung. Der eine der Faktoren (der Multiplikator) muss, wie aus der Erklärung des Multiplizierens hervorgeht, eine unbenannte Zahl sein.

Z. B. $10 \mathcal{M} \cdot 10 \mathcal{M}$ kann nicht berechnet werden.

Viele Schüler werden auf die Frage, wieviel $10 \mathcal{M} \cdot 10 \mathcal{M}$ sei, unbedenklich antworten „100 $\mathcal{M}$ “. Um die Schüler von der Unrichtigkeit zu überzeugen, lasse man sie nehmen

$$\begin{array}{r} 10 \mathcal{M} = 1000 \mathcal{P} \\ 10 \mathcal{M} = 1000 \mathcal{P} \\ \hline 10 \mathcal{M} \cdot 10 \mathcal{M} = 1000000 \mathcal{P} = 10000 \mathcal{M} ? \end{array}$$

Was ist nun richtig? 100 $\mathcal{M}$ oder 10000 $\mathcal{M}$? Antwort: beides ist grundfalsch. Der eine Faktor muss eine unbenannte Zahl sein, z. B. $10 \mathcal{M} \cdot 10 = 100 \mathcal{M}$; ebenso $1000 \mathcal{P} \cdot 10 = 10000 \mathcal{P} = 100 \mathcal{M}$. (Jedoch haben $10 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} = 100 \text{ qm}$ und $10 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} = 1000 \text{ cbm}$ eine planimetrische bez. stereometrische Bedeutung.)

§ 92.

Aus der Erklärung der Multiplikation ergeben sich folgende Gesetze:

1. Die Reihenfolge der Faktoren ist gleichgiltig.

$$\begin{array}{r} \text{Z. B.} \quad 5 \cdot 3 = 5 + 5 + 5 = 15. \\ \quad \quad 3 \cdot 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15 \\ \hline \quad \quad 5 \cdot 3 = 3 \cdot 5 \text{ (Gr. III).} \end{array}$$

Allgemein: $a \cdot b = b \cdot a$.

*) Multiplikandus heisst zu deutsch: „die Zahl, die malgenommen werden soll“, Multiplikator (Vervielfältiger): „eine Zahl, die angiebt, wie vielmal etwas genommen werden soll“, Faktor: „eine Zahl, die etwas ausmacht“, Produkt: das „Hervorgebrachte“. Die Worte stammen aus dem Lateinischen.

2. Jede Grösse mit 1 multipliziert bleibt unverändert.

Z. B. $5 \cdot 1 = 5.$

Allgemein: $x \cdot 1 = x.$

3. Jede Grösse mit 0 multipliziert giebt 0.

Z. B. $5 \cdot 0 = 0.$

Allgemein: $x \cdot 0 = 0.$

4. Ein Produkt multipliziert man, indem man nur einen Faktor multipliziert.

Z. B. $5x \cdot 3 = 15x$, nicht etwa $15 \cdot 3x$.

Allgemein: $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b$ oder $= a \cdot (b \cdot c).$

Anmerkung. Ein Produkt gleicher Faktoren schreibt man abgekürzt, indem man die Anzahl der Faktoren oben rechts an den Faktor schreibt,

z. B. $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$ (lies: a hoch 5).

Insbesondere liest man wegen der planimetrischen Bedeutung a^2 a Quadrat.

Näheres s. in dem Abschnitt Potenzen.

§ 93.

Regel für die algebraische Multiplikation: Plus mal Plus giebt Plus, Minus mal Minus giebt Plus, Plus mal Minus giebt Minus, Minus mal Plus giebt Minus, oder

Zwei Grössen mit gleichen Vorzeichen geben ein positives, zwei Grössen mit ungleichen Vorzeichen ein negatives Produkt.

Z. B.

- 1) $(+ 5) \cdot (+ 3) = + 15$
- 2) $(- 5) \cdot (- 3) = + 15$
- 3) $(+ 5) \cdot (- 3) = - 15$
- 4) $(- 5) \cdot (+ 3) = - 15$

Begründung. Die Multiplikation mit $+$ oder $- 3$ kann nach der Erklärung der Multiplikation nur bedeuten, dass man den Multiplikandus in positiver oder in negativer Richtung 3 mal addieren soll; demnach würde sein:

- 1) $(+ 5) \cdot (+ 3) = + (+ 5) + (+ 5) + (+ 5) = + 5 + 5 + 5 = + 15$
- 2) $(- 5) \cdot (- 3) = - (- 5) - (- 5) - (- 5) = + 5 + 5 + 5 = + 15$
- 3) $(+ 5) \cdot (- 3) = - (+ 5) - (+ 5) - (+ 5) = - 5 - 5 - 5 = - 15$
- 4) $(- 5) \cdot (+ 3) = + (- 5) + (- 5) + (- 5) = - 5 - 5 - 5 = - 15.$

Allgemein:

$$\begin{aligned} (+ a) \cdot (+ b) &= + a b \\ (- a) \cdot (- b) &= + a b \\ (+ a) \cdot (- b) &= - a b \\ (- a) \cdot (+ b) &= - a b. \end{aligned}$$

§ 94.

Eine mehrgliedrige Grösse wird multipliziert, indem man jedes Glied multipliziert.

$$\text{Z. B. } (5x - 3y - 4z) \cdot 6a = 30ax - 18ay - 24az.$$

§ 95.

Zwei mehrgliedrige Grössen werden miteinander multipliziert, indem man jedes Glied der einen mit jedem Gliede der andern multipliziert und die Teilprodukte addiert.

$$\begin{array}{r} (x + 2y - 3z) \cdot (5x - y - 2z) = \\ \hline 5x^2 + 10xy - 15xz \\ \quad - \quad xy \qquad \qquad - 2y^2 + 3yz \\ \qquad \qquad \qquad - 2xz \qquad \qquad - 4yz + 6z^2 \\ \hline 5x^2 + 9xy - 17xz - 2y^2 - yz + 6z^2. \end{array}$$

§ 96.

Folgende 7 Multiplikationsformeln sind zu entwickeln und zu merken:

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
4. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6. $(a^2 - ab + b^2)(a + b) = a^3 + b^3$
7. $(a^2 + ab + b^2)(a - b) = a^3 - b^3.$

Es ist vorteilhaft, sich von den Formeln 1. bis 3. den Wortlaut zu merken:

1. Das Quadrat der Summe zweier Grössen ist gleich der Summe ihrer Quadrate vermehrt um ihr doppeltes Produkt.

2. Das Quadrat der Differenz zweier Grössen ist gleich der Summe ihrer Quadrate vermindert um ihr doppeltes Produkt.

3. Das Produkt aus Summe und Differenz zweier Grössen ist gleich der Differenz ihrer Quadrate.

Ferner ist zu entwickeln und zu merken:

$$\begin{aligned} (a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad \\ + 2bc + 2bd + 2cd. \end{aligned}$$

In Worten: Das Quadrat einer mehrgliedrigen Grösse ist gleich der Summe der Quadrate der einzelnen Glieder vermehrt um die doppelten Produkte von je zwei Gliedern.

V. Dividieren (Teilen).

§ 97.

Das Dividieren ist die Umkehrung des Multiplizieren.

Beim Multiplizieren waren die beiden Faktoren gegeben und das Produkt wurde gesucht. Beim Dividieren sind das Produkt und der eine Faktor gegeben; gesucht wird der andere Faktor. Das Produkt heisst dann Dividendus*) der gegebene Faktor Divisor*) und der gesuchte Quotient*).

Während man im Rechnen oft den Divisor vor den Dividend setzt, z. B. $15 \mid 45 = 3$ (lies: 15 in 45 = 3), setzt man in der Mathematik den Divisor stets hinter den Dividend, z. B. $45 : 15 = 3$ (lies: 45 dividiert durch 15 = 3).

Multiplikation $6 \cdot 5 = 30$,

daraus Division $30 : 6 = 5$.

$30 = \text{Dividendus}$

$6 = \text{Divisor}$

$5 = \text{Quotient.}$

Beim Dividieren handelt es sich um die Frage:

Mit welcher Grösse muss man den Divisor multiplizieren, damit sich der Dividendus ergibt?

Im Beispiel muss man 6 mit 5 multiplizieren, um 30 zu erhalten.

Erklärung: Dividieren heisst: Eine Grösse suchen, mit welcher der Divisor multipliziert den Dividendus hervorbringt. Diese Grösse heisst Quotient. Demnach ist der Quotient die Grösse, welche mit dem Divisor multipliziert den Dividendus ergibt.

Z. B. ist $\frac{a}{b}$ die Grösse, welche mit b multipliziert a hervorbringt; $\frac{a}{b} \cdot b = a$.

Das Hauptgesetz und der Beweis jeder Division ist:

Quotient mal Divisor muss gleich dem Dividendus sein.

Z. B. $100x^2y : 50xy = 2x$.

Beweis: $2x \cdot 50xy = 100x^2y$.

Man merke: Ist $D : d = Q$, so ist $Q \cdot d = D$.

Zusatz. Die Reihenfolge von Dividendus und Divisor ist nicht gleichgiltig. Z. B. $20 : 4$ nicht $= 4 : 20$.

*) Dividendus heisst zu deutsch: „die Zahl, die geteilt werden soll“, Divisor: „Teiler“, Quotient: „wie vielmal“, das heisst: „die Zahl, welche angiebt, wie vielmal der Divisor im Dividendus enthalten ist“.

§ 98.

Aus der Erklärung der Division ergeben sich folgende Gesetze:

1. Regel für die algebraische Division:

Plus durch Plus giebt Plus, Minus durch Minus giebt Plus, Plus durch Minus giebt Minus, Minus durch Plus giebt Minus, oder

Zwei Grössen mit gleichen Vorzeichen geben einen positiven, zwei Grössen mit ungleichen Vorzeichen einen negativen Quotienten.

$$\begin{array}{ll} \text{Z. B.} & 1. (+15) : (+5) = +3 \\ & 2. (-15) : (-5) = +3 \\ & 3. (+15) : (-5) = -3 \\ & 4. (-15) : (+5) = -3. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Bew.} & \left. \begin{array}{l} 1. (+3) \cdot (+5) = +15 \\ 2. (+3) \cdot (-5) = -15 \\ 3. (-3) \cdot (-5) = +15 \\ 4. (-3) \cdot (+5) = -15 \end{array} \right\} (\S 93) \end{array}$$

$$\text{Allgemein: } (+a) : (+b) = +\frac{a}{b}$$

$$(-a) : (-b) = +\frac{a}{b}$$

$$(+a) : (-b) = -\frac{a}{b}$$

$$(-a) : (+b) = -\frac{a}{b}.$$

2. Jede Grösse durch sich selbst dividiert giebt 1.

$$\text{Z. B.} \quad 5 : 5 = 1.$$

$$\text{Allgemein: } x : x = 1.$$

$$\text{Bew.} \quad 1 \cdot 5 = 5$$

$$1 \cdot x = x.$$

3. 0 dividiert durch jede Zahl giebt 0.

$$\text{Z. B.} \quad 0 : 5 = 0.$$

$$\text{Allgemein: } 0 : x = 0.$$

$$\text{Bew.} \quad 0 \cdot 5 = 0$$

$$0 \cdot x = 0.$$

4. Eine Zahl, durch 0 dividiert, kann nicht durch eine endliche Grösse ausgedrückt werden.

Man bezeichnet in der Mathematik das Ergebnis mit ∞ und sagt: Jede Zahl, durch 0 dividiert, giebt unendlich.

$$\text{Z. B.} \quad 1 : 0 = \infty.$$

$$\text{Allgemein: } x : 0 = \infty.$$

Begründung. Dividiert man eine Zahl durch eine immer kleinere Grösse, so wird der Quotient immer grösser.

Z. B. $1 : 0,1 = 10$

$1 : 0,000\,001 = 1\,000\,000$ u. s. w.

Schliesst man in dieser Weise weiter, so kann man sich denken, dass 1 durch eine unendlich kleine Grösse dividiert etwas unendlich Grosses ergiebt. Denkt man sich nun an Stelle der unendlich kleinen Grösse 0, so erhält man $1 : 0 = \infty$.

§ 99.

Ein Produkt dividiert man, indem man nur einen Faktor dividiert.

Z. B. $\frac{15 \cdot 20}{5} = 3 \cdot 20$ oder $= 15 \cdot 4$,

nicht etwa $= 3 \cdot 4$.

Allgemein $\frac{a \cdot b}{c} = \frac{a}{c} \cdot b$ oder $= a \cdot \frac{b}{c}$.

§ 100.

Eine mehrgliedrige Grösse dividiert man, indem man jedes Glied dividiert.

Z. B. $(20xy - 30xz - 10x) : 10x = 2y - 3z - 1$.

Beweis: $(2y - 3z - 1) \cdot 10x = 20xy - 30xz - 10x$.

§ 101.

Zwei mehrgliedrige Grössen dividiert man durcheinander, indem man sie in demselben Sinne ordnet, dann das erste Glied des Dividendus durch das erste Glied des Divisors teilt, mit dem erhaltenen Quotienten den ganzen Divisor multipliziert, das Produkt vom Dividendus subtrahiert, dann den Rest wieder in demselben Sinne ordnet und das erste Glied wieder durch das erste Glied des Divisors teilt und in dieser Weise so lange fortfährt, bis die Division aufgeht oder eine unendliche Reihe entsteht.

Z. B.

1. $(4xy + 90x^2 - 5xz + 49yz - 20z^2 - 30y^2) : (9x - 5y + 4z)$.

Geordnet: $= 10x + 6y - 5z$

$(90x^2 + 4xy - 5xz - 30y^2 + 49yz - 20z^2) : (9x - 5y + 4z) =$
 $+ 90x^2 + 50xy + 40xz + 30y^2 + 24yz + 20z^2$

$54xy - 45xz + 25yz$
 $+ 54xy + 45xz + 25yz.$

$$2. (256x^4 - 81y^4) : (3y + 4x).$$

Geordnet:

$$(256x^4 - 81y^4) : (4x + 3y) = 64x^3 - 48x^2y + 36xy^2 - 27y^3 \\ + 256x^4 - 81y^4$$

$$\begin{array}{r} +192x^3y + 144x^2y^2 + 108xy^3 \\ +192x^3y + 144x^2y^2 + 108xy^3 \end{array}$$

Unendliche Reihe.

$$3. \quad 1 : (1 - x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \infty \\ \begin{array}{r} +1 \\ +x + x^2 + x^3 - x^4 \\ +x + x^2 + x^3 \end{array}$$

Anmerkung. Man mache sich klar, dass ähnliche Divisionen auch schon beim Zahlenrechnen vorkommen,

$$\text{z. B. } 1 : 6 = 0,1666 \dots \infty.$$

Beweis. Durch Multiplikation von Quotient und Divisor.

VI. Teilbarkeit der Zahlen und Zerlegen in Faktoren. Von den Brüchen. Verhältnisse und Proportionen.

Teilbarkeit der Zahlen.

§ 102.

Eine Zahl heisst durch eine andere teilbar, wenn sie sich ohne Rest durch dieselbe teilen lässt. Die durch 2 teilbaren Zahlen heissen gerade, die übrigen ungerade Zahlen.

Jede Zahl ist durch sich selbst und durch 1 teilbar.

$$x : 1 = x, \text{ denn } x \cdot 1 = x.$$

$$x : x = 1. \quad „ \quad 1 \cdot x = x.$$

Zahlen, die durch keine Zahl ausser 1 und sich selbst ohne Rest teilbar sind, heissen Primzahlen*).

Die Primzahlen bis 100 sind

1	2	3	5	7	—
11	—	13	—	17	19
—	—	23	—	—	29
31	—	—	—	37	—
41	—	43	—	47	—
—	—	53	—	—	59
61	—	—	—	67	—
71	—	73	—	—	79
—	—	83	—	—	89
—	—	—	—	97	—

*) Aus dem Lateinischen; bedeutet „erste Zahlen“.

§ 103.

Die wichtigsten Regeln über die Teilbarkeit der Zahlen sind:

1. Durch 2 ist jede gerade Zahl teilbar. Z. B. 26.

2. Durch 3 ist eine Zahl teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

Unter Quersumme einer Zahl versteht man die Summe der einzelnen Ziffern.

Z. B. 93471; Quersumme $9 + 3 + 4 + 7 + 1 = 24$; 24 teilbar durch 3; folglich auch 93471 durch 3 teilbar.

3. Durch 4 ist eine Zahl teilbar, wenn die von den beiden letzten Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist.

Z. B. 97824; 24 teilbar durch 4; folglich auch 97824 durch 4 teilbar.

4. Durch 5 ist eine Zahl teilbar, wenn die letzte Ziffer eine 0 oder 5 ist.

5. Durch 6 ist jede gerade Zahl teilbar, deren Quersumme durch 3 aufgeht.

6. Durch 8 ist eine Zahl teilbar, wenn die von den drei letzten Ziffern gebildete Zahl durch 8 teilbar ist.

Z. B. 55416; 416 durch 8 teilbar; folglich auch 55416 durch 8 teilbar.

7. Durch 9 ist eine Zahl teilbar, wenn die Quersumme durch 9 teilbar ist.

Z. B. 876114; Quersumme 27; 27 durch 9 teilbar, folglich auch 876114 durch 9 teilbar.

8. Durch 11 ist eine Zahl teilbar, wenn die Summen der in den geraden und ungeraden Stellen stehenden Ziffern entweder einander gleich sind oder wenn die Differenz dieser Summen durch 11 teilbar ist.

Z. B. 1069574; $1 + 6 + 5 + 4 = 16$; $0 + 9 + 7 = 16$; folglich auch 1069574 durch 11 teilbar. Oder 928173928; $9 + 8 + 7 + 9 + 8 = 41$; $2 + 1 + 3 + 2 = 8$; $41 - 8 = 33$; 33 durch 11 teilbar; folglich auch 928173928 durch 11 teilbar.

9. Durch 25 ist eine Zahl teilbar, wenn am Ende 00, 25, 50 oder 75 steht.

Zerlegen in Faktoren.

§ 104.

Um zu erkennen, wodurch ein Buchstabenausdruck teilbar ist, zerlegt man denselben meistens zunächst in Faktoren.

Hierzu hat man mit Umsicht in mannigfacher Weise zu verfahren. Schwierige Fälle erfordern ein scharfes Nachdenken.

Haben alle Glieder des zu zerlegenden Ausdruckes einen gemeinsamen Faktor, so sondert man diesen ab, indem man ihn vor eine Klammer setzt. Das, was in die Klammer kommt, findet man, indem man die ursprüngliche Grösse durch den abgesonderten Faktor dividiert.

Den Beweis jeder richtigen Zerlegung macht man durch Auflösen der Klammer. War die Zerlegung richtig, so muss die ursprüngliche Grösse wieder herauskommen.

$$\text{Z. B.} \quad ax + bx = x \cdot (a + b)$$

$$ax + bx - x = x \cdot (a + b - 1)$$

$$12x^2 - 6x - 36xy - 6xz = 6x \cdot (2x - 1 - 6y - z)$$

$$\text{oder auch} \quad = -6x \cdot (1 + 6y + z - 2x).$$

Oft ist es vorteilhaft, den zu zerlegenden Ausdruck in Gruppen zu teilen und in diesen geeignete Faktoren so abzusondern, dass die entstehenden Klammern gleich werden. Dann sondert man nachher diese Klammern wieder ab.

$$\text{Z. B.} \quad dx - dy + ax - ay =$$

$$= d(x - y) + a(x - y) = (x - y)(d + a)$$

$$ax - ay - bx + by =$$

$$= a(x - y) - b(x - y) = (x - y)(a - b)$$

$$ax - ay - x + y = a(x - y) - (x - y) =$$

$$= (x - y) \cdot (a - 1).$$

§ 105.

Für die Zerlegung in Faktoren merke man sich als besonders wichtig die umgekehrten Multiplikationsformeln des § 96.

$$1. \quad a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$2. \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$3. \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$4. \quad a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

$$5. \quad a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

$$6. \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$7. \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Z. B.

$$1. \quad 25x^2 + 40xy + 16y^2 = (5x + 4y)^2$$

$$2. \quad 4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)^2$$

$$3. \quad 121x^2 - 81y^2 = (11x + 9y)(11x - 9y)$$

$$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$$

$$4. \quad 64x^3 + 96x^2y + 48xy^2 + 8y^3 = (4x + 2y)^3$$

$$5. \quad 8x^3 - 60x^2y + 150xy^2 - 125y^3 = (2x - 5y)^3$$

$$6. 125x^3 + 216y^3 = (5x + 6y)(25x^2 - 30xy + 36y^2)$$

$$7. 125x^3 - 8y^3 = (5x - 2y)(25x^2 + 10xy + 4y^2).$$

§ 106.

Eine dreigliedrige Grösse von der Form $x^2 + ax + b$ lässt sich in Faktoren zerlegen, wenn sich der algebraische Koeffizient von x ($+a$) in 2 Summanden zerlegen lässt, deren Produkt gleich $+b$ ist (oder: wenn sich das dritte Glied ($+b$) in 2 Faktoren zerlegen lässt, deren Summe gleich $+a$ ist).

Z. B. $x^2 + 5x + 6.$

$$5 = 3 + 2; \quad 3 \cdot 2 = 6$$

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6 &= x^2 + 3x + 2x + 6 = x(x + 3) + 2(x + 3) = \\ &= (x + 3)(x + 2). \end{aligned}$$

Oder $x^2 - 7x + 12.$

$$-7 = -4 - 3; \quad -4 \cdot -3 = +12$$

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 12 &= x^2 - 4x - 3x + 12 = \\ &= x(x - 4) - 3(x - 4) = (x - 4)(x - 3). \end{aligned}$$

Oder $x^2 + 3x - 28.$

$$-28 = +7 \cdot -4; \quad +7 - 4 = +3$$

$$\begin{aligned} x^2 + 3x - 28 &= x^2 + 7x - 4x - 28 = \\ &= x(x + 7) - 4(x + 7) = (x + 7)(x - 4). \end{aligned}$$

Oder $x^2 - x - 72.$

$$-72 = -9 \cdot +8; \quad -9 + 8 = -1$$

$$\begin{aligned} x^2 - x - 72 &= x^2 - 9x + 8x - 72 = x(x - 9) + \\ &+ 8(x - 9) = (x - 9)(x + 8). \end{aligned}$$

§ 107.

Für die Zerlegung in Faktoren ist es zuweilen angebracht, zu dem Ausdruck, welcher zerlegt werden soll, dieselbe Grösse zu addieren und von ihm zu subtrahieren. (Der Wert des Ausdrucks bleibt dadurch ungeändert, weil man thatsächlich 0 hinzufügt).

Z. B. $x^4 + x^2y^2 + y^4.$

Man addiere und subtrahiere x^2y^2 . Dann ist

$$\begin{aligned} x^4 + x^2y^2 + y^4 &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = \\ &= (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = (x^2 + y^2 + xy) \cdot (x^2 + y^2 - xy). \end{aligned}$$

Von den Brüchen.

§ 108.

Jeder Teil der Einheit heisst ein Bruch*), ebenso jedes Vielfache eines solchen Teiles. Man kann überhaupt jeden nicht aus-

*) Der Bruchstrich kam im elften Jahrhundert in Gebrauch. Jedoch haben auch schon die Alten mit Brüchen gerechnet.

gerechneten Quotienten zweier Grössen als einen Bruch auffassen. Die Division wird dann nicht weiter ausgeführt. Statt des Divisionszeichens nimmt man einen wagerechten Strich (Bruchstrich) und setzt den Dividendus, welcher dann Zähler heisst, darüber und den Divisor als Nenner darunter.

$$\text{Z. B. } 10 : 3 = \frac{10}{3}.$$

$$\text{Allgemein } x : y = \frac{x \text{ Dividend} = \text{Zähler}}{y \text{ Divisor} = \text{Nenner.}}$$

(Lies: x durch y .)

Ein Bruch heisst ein echter, wenn der Nenner grösser als der Zähler ist, z. B. $\frac{3}{5}$, ein unechter, wenn der Nenner gleich dem Zähler oder kleiner als der Zähler ist, z. B. $\frac{5}{5}$, $\frac{5}{3}$.

Einen unechten Bruch kann man als ganze oder gemischte Zahl schreiben, z. B.

$$\frac{5}{5} = 1; \quad \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}.$$

Eine gemischte Zahl in einen Bruch verwandeln heisst den Bruch einrichten, z. B. $5\frac{1}{6} = \frac{31}{6}$.

§ 109. Hauptgesetz.

Der Wert eines Bruches (Quotienten) bleibt ungeändert, wenn man Zähler und Nenner (Dividend und Divisor) mit einer und derselben Zahl multipliziert (den Bruch oder Quotienten erweitert) oder durch eine und dieselbe Zahl dividiert (den Bruch oder Quotienten kürzt).

$$\text{Z. B. } \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{10}{12} \quad (\text{Der Bruch ist erweitert mit } 2).$$

$$\frac{20}{25} = \frac{20 : 5}{25 : 5} = \frac{4}{5} \quad (\text{Der Bruch ist gekürzt durch } 5).$$

$$\text{Allgemein } \frac{x}{y} = \frac{ax}{ay} \quad (\text{Der Bruch ist erweitert mit } a).$$

$$\frac{cx}{cy} = \frac{x}{y} \quad (\text{Der Bruch ist gekürzt durch } c).$$

Zusatz. Der Wert eines Bruches wird grösser, wenn der Zähler grösser oder der Nenner kleiner wird.

$$\text{Z. B. } \frac{7}{8} > \frac{5}{8}; \quad \frac{2}{3} > \frac{2}{5}.$$

Der Wert eines Bruches wird kleiner, wenn der Zähler kleiner oder der Nenner grösser wird.

$$\text{Z. B. } \frac{3}{7} < \frac{6}{7}; \quad \frac{3}{7} < \frac{3}{4}.$$

§ 110.

Bei Zahlenbrüchen, die gekürzt werden sollen, wendet man zunächst die Gesetze über die Teilbarkeit der Zahlen an (§ 103).

Kann man einem Bruche nicht ansehen, wodurch er sich kürzen lässt, so dividiert man den Zähler in den Nenner, dann den jedesmaligen Rest in den letzten Divisor, bis die Division aufgeht oder 1 als Rest bleibt. Im ersten Falle ist der letzte Divisor die grösste Zahl, durch die sich der Bruch kürzen lässt; bleibt aber 1 als Rest, so lässt sich der Bruch nicht kürzen.

Beispiel 1. $\frac{1815}{6171}$.

$$\begin{array}{r} 1815 \overline{) 6171} = 3 \\ \quad 726 \overline{) 1815} = 2 \\ \quad \quad 363 \overline{) 1815} = 5 \\ \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

Folglich ist 363 die grösste Zahl, durch welche sich der Bruch kürzen lässt.

$$\frac{1815}{6171} \overset{363}{\left| \begin{array}{l} 5 \\ 17 \end{array} \right.}.$$

Beispiel 2. $\frac{257}{563}$.

$$\begin{array}{r} 257 \overline{) 563} = 2 \\ \quad 49 \overline{) 257} = 5 \\ \quad \quad 12 \overline{) 49} = 4 \\ \quad \quad \quad 1 \end{array}$$

Der Bruch $\frac{257}{563}$ lässt sich nicht kürzen.

§ 111.

Bei Buchstabenbrüchen, die gekürzt werden sollen, zerlege man zunächst Zähler und Nenner, wenn sie mehrgliedrige Grössen sind, möglichst in Faktoren. Beim Kürzen beachte man, dass

$$\frac{a-b}{b-a} = -1 \text{ ist, Ausdrücke aber, wie } \frac{a+b}{a-b}, \frac{a^2+b^2}{a+b} \text{ und}$$

ähnliche sich nicht kürzen lassen.

§ 112.

Brüche mit gleichem Nenner addiert oder subtrahiert man, indem man die Zähler addiert oder subtrahiert*).

$$\begin{aligned} \text{Z. B.} \quad & \frac{6}{11} + \frac{1}{11} = \frac{7}{11} \\ & \frac{6}{11} - \frac{1}{11} = \frac{5}{11}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Allgemein:} \quad & \frac{x}{n} + \frac{y}{n} = \frac{x + y}{n} \\ & \frac{x}{n} - \frac{y}{n} = \frac{x - y}{n}. \end{aligned}$$

Brüche mit ungleichem Nenner addiert oder subtrahiert man, indem man sie durch Erweitern auf einen gemeinsamen Nenner, den Hauptnenner, bringt. Unter Hauptnenner (Generalnenner) versteht man die kleinste Zahl, in welcher alle Nenner aufgehen.

$$\begin{aligned} \text{Z. B.} \quad & \frac{5}{6} + \frac{3}{8} = \frac{20 + 9}{24} = 1\frac{5}{4} \\ & \frac{2}{7} - \frac{1}{9} = \frac{18 - 7}{63} = \frac{11}{63}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Allgemein:} \quad & \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = \frac{nx + my}{mn} \\ & \frac{x}{m} - \frac{y}{n} = \frac{nx - my}{mn}. \end{aligned}$$

Sind die Nenner zusammengesetzte Grössen, so zerlege man, um den Hauptnenner zu finden, soviel wie möglich in Faktoren. Auch beachte man, dass zwischen den Nennern n^5, n^4, n^3, n^2, n der Hauptnenner n^5 ist. Der Hauptnenner wird auch das kleinste gemeinschaftliche Vielfache (Dividuus)**) der Nenner genannt.

$$\begin{aligned} \text{Z. B.} \quad & \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^2(x-1)} + \\ & \quad + \frac{2}{x(x-1)} + \frac{3}{x^4(x^2-1)} \\ & x+1; x-1; x^4; x^2-1; x^3; x^2(x-1); x(x-1); x^4(x^2-1). \end{aligned}$$

*) Als selbstverständlich ist hier fortgelassen: „und den Nenner beibehält“. Ähnlich ist bei manchen der folgenden Regeln verfahren. Man beachte immer, dass derjenige Teil eines Ausdrucks, von welchem die Regel nichts aussagt, beibehalten wird.

**) Aus dem Lateinischen; bedeutet „die teilbare Zahl“.

Hauptnenner: $x^4(x^2 - 1)$

$$[x^4(x - 1) - 2x^4(x + 1) + 3(x^2 - 1) + 2x^4 + x(x^2 - 1) - 3x^2(x + 1) + 2x^3(x + 1) + 3] : x^4(x^2 - 1)$$

$$\left. \begin{array}{r} x^5 - x^4 + 3x^2 - 3 + x^3 - x \\ - 2x^5 - 2x^4 - 3x^2 + 3 - 3x^3 \\ \quad + 2x^4 \qquad \qquad + 2x^3 \\ \quad + 2x^4 \\ \hline - x^5 + x^4 \qquad \qquad - x \end{array} \right\} : x^4(x^2 - 1).$$

$$\frac{x^4 - x^5 - x}{x^4(x^2 - 1)}; \text{ gekürzt durch } x: \text{ Antwort: } \frac{x^3 - x^4 - 1}{x^3(x^2 - 1)}.$$

§ 113.

Einen Bruch multipliziert man mit einer ganzen Zahl, indem man den Zähler multipliziert. (Vorher kürze man soviel wie möglich.)

Z. B. $\frac{5}{28} \cdot 63 = \frac{5}{4} \cdot 9 = \frac{45}{4} = 11 \frac{1}{4}.$

Allgemein: $\frac{x}{n} \cdot a = \frac{ax}{n}.$

Jeder Bruch mit seinem Nenner multipliziert giebt den Zähler. Z. B. $\frac{a}{b} \cdot b = a.$

§ 114.

Brüche multipliziert man miteinander, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert. (Vorher kürze man soviel wie möglich.)

Z. B. $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{21}.$

Allgemein: $\frac{x}{n} \cdot \frac{y}{m} = \frac{x \cdot y}{m \cdot n}.$

§ 115.

Einen Bruch dividiert man durch eine ganze Zahl, indem man den Nenner multipliziert. (Vorher kürze man soviel wie möglich.)

Z. B. $\frac{2}{5} : 7 = \frac{2}{35}.$

Allgemein: $\frac{x}{n} : m = \frac{x}{m \cdot n}.$

Bew. $\frac{2}{35} \cdot 7 = \frac{2}{5}$

$$\frac{x}{m \cdot n} \cdot m = \frac{x}{n}.$$

§ 116.

Durch einen Bruch dividiert man, indem man ihn umkehrt und multipliziert. (Einen Bruch umkehren heisst, den Zähler zum Nenner und den Nenner zum Zähler machen.)

Z. B. $5 : \frac{2}{7} = 5 \cdot \frac{7}{2} = \frac{35}{2} = 17 \frac{1}{2}$

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}.$$

Allgemein: $x : \frac{y}{n} = x \cdot \frac{n}{y} = \frac{nx}{y}$

$$\frac{x}{n} : \frac{y}{m} = \frac{x}{n} \cdot \frac{m}{y} = \frac{mx}{ny}.$$

Bew. $\frac{35}{2} \cdot \frac{2}{7} = 5$

$$\frac{14}{15} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{nx}{y} \cdot \frac{y}{n} = x$$

$$\frac{mx}{ny} \cdot \frac{y}{m} = \frac{x}{n}.$$

Zusatz 1: Unter dem reziproken*) Wert einer Grösse versteht man eine zweite, deren Produkt mit der ersten 1 ergibt.

Z. B. Von 3 ist der reziproke Wert $\frac{1}{3}$. Denn $\frac{1}{3} \cdot 3 = 1$

„ $\frac{2}{3}$ „ „ „ „ $\frac{3}{2}$ „ „ $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$

Allgemein: „ x „ „ „ „ $\frac{1}{x}$ „ „ $\frac{1}{x} \cdot x = 1.$

„ $\frac{x}{y}$ „ „ „ „ $\frac{y}{x}$ „ „ $\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} = 1.$

Hiernach lässt sich die Regel dieses Paragraphen auch ausdrücken:

Durch einen Bruch dividiert man, indem man mit seinem reziproken Werte multipliziert.

*) Aus dem Lateinischen; bedeutet „wechselseitig“.

Zusatz 2. Ein Bruchsbruch oder Doppelbruch ist ein Bruch, dessen Zähler oder Nenner wieder Brüche sind.

$$\begin{array}{l} \text{Z. B. } \frac{\frac{a}{b}}{c}; \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}; \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}. \quad \text{Die Werte sind nach § 115} \\ \text{und 116 } \frac{a}{bc}; \quad \frac{ac}{b}; \quad \frac{ad}{bc}. \end{array}$$

§ 117.

Dezimalbrüche*) multipliziert man, indem man zunächst ohne Rücksicht auf das Komma multipliziert und dann im Produkt soviel Stellen von rechts nach links abstreicht, wie die Faktoren zusammen Dezimalstellen haben.

$$\text{Z. B. } 0,006 \cdot 218,3 = 1,3098.$$

Zusatz: Einen Dezimalbruch multipliziert man mit 10, 100, 1000 u. s. w., indem man das Komma 1, 2, 3 u. s. w. Stellen nach rechts rückt.

$$\begin{array}{l} \text{Z. B. } 0,003 \cdot 100 = 0,3 \\ \quad \quad 0,003 \cdot 100\,000 = 300. \end{array}$$

§ 118.

Durch einen Dezimalbruch dividiert man, indem man ihn durch Erweitern mit 10, 100, 1000 u. s. w. zu einer ganzen Zahl macht.

$$\begin{array}{l} \text{Z. B. } \quad 0,625 : 1,25 = 62,5 : 125 = 0,5 \\ \quad \quad 0,625 : 0,125 = 625 : 125 = 5 \\ \quad \quad 0,625 : 0,00125 = 62\,500 : 125 = 500 \\ \quad \quad 625 : 0,125 = 625\,000 : 125 = 5000. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Bew.} \quad \quad \quad 0,5 \cdot 1,25 = 0,625 \\ \quad \quad \quad 5 \cdot 0,125 = 0,625 \\ \quad \quad \quad 500 \cdot 0,00125 = 0,625 \\ \quad \quad \quad 5000 \cdot 0,125 = 625. \end{array}$$

Zusatz: Einen Dezimalbruch dividiert man durch 10, 100, 1000 u. s. w., indem man das Komma 1, 2, 3 Stellen u. s. w. nach links rückt.

$$\begin{array}{l} \text{Z. B.} \quad \quad \quad 233,4 : 100 = 2,334 \\ \quad \quad \quad 2 : 1000 = 0,002. \end{array}$$

*) Dezimalbrüche sind Brüche mit den Nennern 10, 100, 1000 u. s. w.; sie kamen ums Jahr 1600 allgemeiner in Gebrauch. Zuerst kommen sie bei Regiomontanus (eigentlicher Name Johannes Müller), einem 1436 in Königsberg in Franken geborenen Mathematiker, vor.

Verhältnisse und Proportionen.

§ 119.

Den nicht ausgerechneten Quotienten zweier Grössen (oder einen Bruch) nennt man auch ein Verhältniss, weil durch die Division zwei Zahlen miteinander verglichen werden oder ihr Grössenverhältniss bestimmt wird.

Z. B. $15 : 3 = 5$ (lies: 15 zu 3)

$$a : b = x \text{ („ } a \text{ zu } b)$$

a und b heissen die Glieder, a das Vorderglied und b das Hinterglied, x der Quotient oder auch der Wert des Verhältnisses. Der Wert eines Verhältnisses ist immer eine unbenannte Zahl, z. B.

$$20m : 5m = 4$$

$$30 \mathcal{M} : 6 \mathcal{M} = 5.$$

Ein Verhältniss ist ein steigendes, wenn das Hinterglied grösser als das Vorderglied, ein fallendes, wenn das Hinterglied kleiner als das Vorderglied ist.

Z. B. $4 : 5$ ein steigendes Verhältniss

$5 : 4$ „ fallendes „

Der Quotient eines steigenden Verhältnisses ist ein echter Bruch, der eines fallenden ein unechter. Ein steigendes Verhältniss kann nie gleich einem fallenden sein.

§ 120. Hauptgesetz über die Verhältnisse.

Der Wert eines Verhältnisses bleibt ungeändert, wenn man Vorderglied und Hinterglied mit einer und derselben Zahl multipliziert (das Verhältniss erweitert) oder durch eine und dieselbe Zahl dividiert (das Verhältniss kürzt).

Z. B. Erweitern: $\begin{cases} 3 : 11 = 3 \cdot 8 : 11 \cdot 8 = 24 : 88 \\ x : y = ax : ay. \end{cases}$

Kürzen: $\begin{cases} 56 : 63 = \frac{56}{7} : \frac{63}{7} = 8 : 9 \\ x : y = \frac{x}{a} : \frac{y}{a}. \end{cases}$

§ 121.

Zwei Verhältnisse sind gleich, wenn ihre Quotienten gleich sind.

Z. B. $8 : 2 = 4$

$$64 : 16 = 4$$

$$8 : 2 = 64 : 16 \text{ (Gr. III; lies: 8 zu 2 wie 64 zu 16).}$$

Allgemein:

$$a : b = q$$

$$c : d = q$$

$$a : b = c : d \text{ (Gr. III).}$$

Zwei durch das Gleichheitszeichen verbundene Verhältnisse nennt man **Proportion**.*)

$$\text{Z. B.} \quad 8 : 2 = 64 : 16.$$

$$\text{Allgemein:} \quad a : b = c : d.$$

Hierin heissen a und d äussere, b und c innere Glieder, a und c , ebenso b und d homologe (gleichstehende) Glieder; ausserdem heissen nach der Reihenfolge a , b , c und d das erste, zweite, dritte und vierte Glied.

§ 122. Hauptgesetz über die Proportionen.

In jeder Proportion ist das Produkt der äusseren Glieder gleich dem Produkt der inneren.

$$\begin{array}{l} \text{Z. B.} \quad 8 : 2 = 64 : 16 \\ \quad \quad \quad \frac{8 \cdot 16 = 2 \cdot 64}{} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Allgemein:} \quad a : b = c : d \\ \quad \quad \quad \frac{a \cdot d = b \cdot c}{} \end{array}$$

Der Beweis beruht auf Gr. V₃ (vgl. § 167).

Dieses Gesetz dient als Probe der Richtigkeit einer Proportion.

Z. B. $8 : 2 = 64 : 15$ falsch, weil $8 \cdot 15$ nicht $= 2 \cdot 64$ ist.

Zusatz: Aus dem obigen Gesetz folgt: Jedes äussere Glied einer Proportion ist gleich dem Produkte der beiden inneren dividiert durch das andere äussere, und jedes innere Glied ist gleich dem Produkte der beiden äusseren dividiert durch das andere innere.

$$\begin{array}{l} \text{Z. B.} \quad \frac{a : b = c : d}{} \\ \quad \quad \quad a = \frac{b \cdot c}{d} \\ \quad \quad \quad d = \frac{b \cdot c}{a} \\ \quad \quad \quad b = \frac{a \cdot d}{c} \\ \quad \quad \quad c = \frac{a \cdot d}{b} \end{array}$$

§ 123.

Aus der Gleichung zweier Produkte von je 2 Faktoren kann man 8 verschiedene Proportionen bilden.

$$\text{Z. B.} \quad 7 \cdot 4 = 14 \cdot 2; \quad a \cdot d = b \cdot c.$$

*) Aus dem Lateinischen; bedeutet „Ebenmass, Verhältnis“. Mit den Proportionen beschäftigten sich schon die alten Griechen, insbesondere mit ihrer Anwendung in der Geometrie.

- 1) $7:14 = 2:4$; $a:b = c:d$
- 2) $7:2 = 14:4$; $a:c = b:d$
- 3) $4:14 = 2:7$; $d:b = c:a$
- 4) $4:2 = 14:7$; $d:c = b:a$
- 5) $14:7 = 4:2$; $b:a = d:c$
- 6) $14:4 = 7:2$; $b:d = a:c$
- 7) $2:7 = 4:14$; $c:a = d:b$
- 8) $2:4 = 7:14$; $c:d = a:b$.

Beweis durch das Hauptgesetz.

Zusatz. Man merke hieraus:

1. Man darf die inneren Glieder einer Proportion mit einander vertauschen. (S. 1 und 2.)

2. Man darf die äusseren Glieder einer Proportion mit einander vertauschen. (S. 1 und 3.)

3. Man darf die inneren Glieder einer Proportion zu äusseren und die äusseren zu inneren machen. (S. 1 und 5).

Ferner merke man:

4. Sind zwei Verhältnisse einem dritten gleich, so sind sie unter sich gleich.

Z. B.

$$\begin{array}{l} a:b = x:y \\ c:d = x:y \\ \hline a:b = c:d \text{ (Gr. III).} \end{array}$$

5. Sind in einer Proportion ein inneres und ein äusseres Glied einander gleich, so sind es auch die beiden andern:

$$\begin{array}{l} a:b = c:d \\ b = d \\ \hline a = c. \end{array}$$

Bew.

$$\begin{array}{l} a \cdot d = b \cdot c \text{ (Hauptgesetz)} \\ d = b \text{ (wie angenommen)} \\ \hline a = c \text{ (Gr. V}_4\text{).} \end{array}$$

6. Sind in zwei Proportionen je drei entsprechende Glieder bezüglich gleich, so sind es auch die vierten.

$$\begin{array}{l} a:b = c:x \\ a:b = c:y \\ \hline x = y. \end{array}$$

Bew.

$$\begin{array}{l} x = \frac{b \cdot c}{a} \\ y = \frac{b \cdot c}{a} \\ \hline x = y \text{ (Gr. III).} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} x = \frac{b \cdot c}{a} \\ y = \frac{b \cdot c}{a} \end{array}} \right\} (\S 122)$$

7. Man kann in einer Proportion zwei homologe Glieder mit einer und derselben Zahl multiplizieren oder durch eine und dieselbe Zahl dividieren, ohne dass die Richtigkeit der Proportion sich ändert.

Z. B.

$$\begin{aligned} a:b &= c:d \\ \hline a \cdot x:b &= c \cdot x:d \\ a:bx &= c:dx \\ \frac{a}{x}:b &= \frac{c}{x}:d \\ a:\frac{b}{x} &= c:\frac{d}{x} \end{aligned}$$

Beweis durch das Hauptgesetz.

§ 124.

In einer Proportion von der Form

$$a:b = c:x$$

heisst x die vierte Proportionale zu a , b und c ; es ist

$$x = \frac{b \cdot c}{a}.$$

Eine Proportion heisst eine stetige, wenn die beiden inneren Glieder gleich sind.

Z. B.

$$a:x = x:b.$$

x heisst dann die mittlere geometrische Proportionale zu a und b , oder auch das geometrische Mittel. b heisst dann die dritte Proportinale zu a und x .

§ 125. Satz von der korrespondierenden*) Addition und Subtraktion. (K. A.)

Die Summe oder die Differenz des ersten und zweiten Gliedes einer Proportion verhält sich zum ersten oder zweiten Gliede wie die Summe oder die Differenz des dritten und vierten Gliedes zum dritten oder vierten Gliede.

Z. B.

$$42:15 = 28:10.$$

Allgemein:

$$a:b = c:d.$$

*) Aus dem Lateinischen; bedeutet „entsprechend“.

- 1) $57:42 = 38:28; (a + b):a = (c + d):c$
 2) $57:15 = 38:10; (a + b):b = (c + d):d$
 3a) $27:42 = 18:28; (a - b):a = (c - d):c$
 3b) $-27:42 = -18:28; (b - a):a = (d - c):c$
 4a) $27:15 = 18:10; (a - b):b = (c - d):d$
 4b) $-27:15 = -18:10; (b - a):b = (d - c):d.$

Beweis durch das Hauptgesetz.

Aus 1 und 3 kann man noch eine andere Form des Satzes von der korrespondierenden Addition und Subtraktion ableiten, welche man öfters anwenden muss.

Aus 1 folgt: $(a + b):(c + d) = a:c$

„ 3 „ $(a - b):(c - d) = a:c$

$$(a + b):(c + d) = (a - b):(c - d),$$

$$\text{Oder: } (a + b):(a - b) = (c + d):(c - d),$$

$$\text{ebenso: } (b + a):(b - a) = (d + c):(d - c).$$

In Worten: Die Summe und Differenz des ersten und zweiten Gliedes einer Proportion verhalten sich zu einander, wie die Summe und Differenz des dritten und vierten Gliedes.

VII. Potenzieren.

§ 126.

Potenzieren heisst: Eine Zahl (Basis*) oder Grundzahl) so oft als Faktor setzen, wie eine zweite Zahl (Exponent**) anzeigt.

Z. B. 2^5 (lies: 2 hoch 5) $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32.$

Allgemein: $b^e = P.$

b = Grundzahl, e = Exponent, P = Potenz.***)

Eine Potenz ist ein Produkt gleicher Faktoren.

Z. B. $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \dots n \text{ mal.}$

Die zweiten Potenzen heissen auch Quadrate der Zahlen und die dritten Potenzen die Kuben†), weil, wie in der Planimetrie und Stereometrie gezeigt wird, der Inhalt eines Quadrats gleich der zweiten Potenz seiner Seite und der Inhalt eines Würfels (Kubus) gleich der dritten Potenz seiner Kante ist.

Man merke sich im Kopf die Quadrate der ersten 20 und die Kuben der ersten 10 Zahlen.

*) Aus dem Griechischen; bedeutet „Fuss, Grundlage“.

**) Aus dem Lateinischen; bedeutet „die heraussetzende Zahl“.

***) Die Potenzen sind zuerst von Michael Stifel (um 1544) eingeführt worden. Die Schreibweise des Exponenten rührt von dem schon erwähnten Philosophen Descartes her.

†) Aus dem Griechischen; bedeutet „Würfel“.

$1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$; $5^2 = 25$; $6^2 = 36$;
 $7^2 = 49$; $8^2 = 64$; $9^2 = 81$; $10^2 = 100$; $11^2 = 121$;
 $12^2 = 144$; $13^2 = 169$; $14^2 = 196$; $15^2 = 225$; $16^2 = 256$;
 $17^2 = 289$; $18^2 = 324$; $19^2 = 361$; $20^2 = 400$.

$1^3 = 1$; $2^3 = 8$; $3^3 = 27$; $4^3 = 64$; $5^3 = 125$; $6^3 = 216$;
 $7^3 = 343$; $8^3 = 512$; $9^3 = 729$; $10^3 = 1000$.

Ausserdem merke man: $0^n = 0$; $1^n = 1$; $a^1 = a$.

Zusatz: Die Reihenfolge von Basis und Exponent ist nicht gleichgültig.

Z. B. $2^3 = 8$; $3^2 = 9$. (Ausnahme: $2^4 = 4^2$).

§ 127.

Ein Produkt potenziert man, indem man jeden Faktor potenziert.

Z. B. $(2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 125 = 1000$.

Allgemein: $(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$.

Beweis: $(a \cdot b \cdot c)^n = abc \cdot abc \cdot abc \dots n\text{mal} = aaa \dots n\text{mal} \cdot bbb \dots n\text{mal} \cdot ccc \dots n\text{mal}$ (§ 92) $= a^n \cdot b^n \cdot c^n$.

Umgekehrt ist $a^n \cdot b^n \cdot c^n = (abc)^n$.

In Worten: Potenzen von gleichen Exponenten multipliziert man, indem man das Produkt der Grundzahlen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.

Z. B. $4^2 \cdot 25^2 = (4 \cdot 25)^2 = 100^2 = 10000$.

§ 128.

Einen Bruch potenziert man, indem man Zähler und Nenner potenziert.

(Ebenso potenziert man bei einem Quotienten Dividendus und Divisor und bei einem Verhältnis Vorderglied und Hinterglied.)

Z. B. $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$

Allgemein: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Bew. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \dots n\text{mal} =$
 $= \frac{a \cdot a \cdot a \dots n\text{mal}}{b \cdot b \cdot b \dots n\text{mal}} \text{ (§ 114) } = \frac{a^n}{b^n}.$

Umgekehrt ist $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

In Worten: Potenzen mit gleichem Exponenten dividiert man, indem man den Quotienten der Grundzahlen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.

$$\text{Z. B.} \quad \frac{729^3}{81^3} = \left(\frac{729}{81}\right)^3 = 9^3 = 729.$$

§ 129.

Alle geraden Potenzen einer negativen Zahl sind positiv, alle ungeraden negativ.

$$\begin{aligned} \text{Z. B.} \quad & (-5)^2 = +25 \\ & (-5)^3 = -125. \end{aligned}$$

Um diesen Satz allgemein ausdrücken zu können, merke man, dass der allgemeine mathematische Ausdruck für eine gerade Zahl $2n$, für eine ungerade $2n+1$ oder $2n-1$ ist, indem man unter n eine beliebige ganze Zahl versteht. (Z. B. $n=9$; $2n=18$; $2n+1=19$; $2n-1=17$.) Danach ist der allgemeine Ausdruck obigen Gesetzes

$$\begin{aligned} (-a)^{2n} &= +a^{2n} \\ (-a)^{2n+1} &= -a^{2n+1}. \end{aligned}$$

Beweis nach § 93.

Insbesondere merke man:

$$\begin{aligned} (-1)^{2n} &= +1 \\ (-1)^{2n+1} &= -1. \end{aligned}$$

Zusatz. In einer geraden Potenz einer Differenz kann man Minuendus und Subtrahendus vertauschen, ohne den Wert zu ändern; bei ungeraden Potenzen einer Differenz muss man das Vorzeichen der Differenz umkehren, wenn man Minuendus und Subtrahendus miteinander vertauschen will.

$$\begin{aligned} \text{Z. B.} \quad & (a-b)^2 = (b-a)^2 \\ & (a-b)^3 = -(b-a)^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Allgemein: } 1) \quad & (a-b)^{2n} = (b-a)^{2n} \\ 2) \quad & (a-b)^{2n+1} = -(b-a)^{2n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Bew. } 1) \quad & (a-b)^{2n} = [-1(b-a)]^{2n} = (-1)^{2n} \cdot (b-a)^{2n} (\S 127) = \\ & = +1 \cdot (b-a)^{2n} = (b-a)^{2n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & (a-b)^{2n+1} = [-1 \cdot (b-a)]^{2n+1} = \\ & = (-1)^{2n+1} \cdot (b-a)^{2n+1} (\S 127) = -1 \cdot (b-a)^{2n+1} = \\ & = -(b-a)^{2n+1}. \end{aligned}$$

§ 130.

Potenzen mit gleicher Grundzahl multipliziert man, indem man die Grundzahl mit der Summe der Exponenten potenziert.

Z. B. $a^3 \cdot a^4 = a^7.$

Allgemein: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$

Bew. $a^3 = a \cdot a \cdot a$

$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$

$$a^3 \cdot a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \text{ (Gr. V}_3\text{)} = a^7.$$

Umgekehrt ist: $a^{x+y+z} = a^x \cdot a^y \cdot a^z.$

In Worten: Mit einer Summe potenziert man, indem man die Grundzahl mit den einzelnen Summanden potenziert und diese Potenzen in beliebiger Reihenfolge miteinander multipliziert.

§ 131.

Potenzen mit gleicher Grundzahl dividiert man, indem man die Grundzahl mit der Differenz der Exponenten potenziert.

Z. B. $\frac{a^7}{a^4} = a^3.$

Allgemein: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$

Bew. $a^7 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$

$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$

$$\frac{a^7}{a^4} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a} \text{ (Gr. V}_4\text{)} = a \cdot a \cdot a = a^3.$$

(Weiteres s. § 133.)

Umgekehrt ist: $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}.$

In Worten: Mit einer Differenz potenziert man, indem man die Grundzahl mit Minuendus und Subtrahendus einzeln potenziert und die erste Potenz durch die zweite dividiert.

§ 132.

Eine Potenz potenziert man, indem man die Grundzahl mit dem Produkte der Exponenten potenziert.

Z. B. $(2^3)^2 = 2^6 = 64.$

Allgemein: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$

Bew. $(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^6 \text{ (§ 130).}$

Umgekehrt ist:

$$a^{m \cdot n} = (a^m)^n \text{ oder } = (a^n)^m.$$

In Worten: Mit einem Produkt potenziert man, indem man mit den einzelnen Faktoren nacheinander potenziert, wobei die Reihenfolge gleichgiltig ist.

§ 133. Potenzen mit negativen Exponenten.

Ist bei der Division von Potenzen mit gleicher Grundzahl (§ 131) der Exponent des Zählers kleiner als der des Nenners, so wird man, wenn man Potenzen mit negativen Exponenten vermeiden will, den Exponenten des Zählers von dem des Nenners abziehen, wobei man dann 1 als Zähler und die so gebildete Potenz als Nenner zu nehmen hat.

$$\text{Z. B. } \frac{a^3}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^2}.$$

Man rechnet also $\frac{a^m}{a^n}$, wenn $m > n$, $= a^{m-n}$, wenn $m < n$ ist, $= \frac{1}{a^{n-m}}$. Da man aber auch $\frac{a^3}{a^5} = a^{-2}$ nehmen kann, so kann man immer setzen $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, oder $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

In Worten: Eine Potenz mit negativem Exponenten ist gleich ihrem reziproken Wert mit positivem Exponenten.

Daher ist auch

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^{+n} \text{ und } \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{b^{+n}}{a^{+n}}.$$

Es folgt hieraus die Regel:

Man kann jede Potenz aus dem Nenner in den Zähler oder aus dem Zähler in den Nenner schaffen, wenn man das Vorzeichen des Exponenten ändert.

Man merke:

$$0,1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$$

$$0,01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

$$0,001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3} \text{ u. s. w.}$$

§ 134.

Die nullte Potenz jeder Grösse ist $= 1$.

Z. B. $a^0 = 1$.

Wird in $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (§ 131) $n = m$, so erhält man $\frac{a^m}{a^m} = a^0$.

Da aber $\frac{a^m}{a^m} = 1$ ist (§ 98₂), so kann a^0 nur die Bedeutung 1 haben; man kann also immer $a^0 = 1$ setzen.

§ 135.

Zusammenfassung der für das Potenzieren wichtigen Formeln:

- I. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- II. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- III. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- IV. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- V. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- VI. $a^0 = 1$
- VII. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

VIII. Radizieren.

1. Erklärungen.

§ 136.

Das Potenzieren hat zwei Umkehrungen, Radizieren und Logarithmieren (s. § 153).

Dass das Potenzieren zwei Umkehrungen hat, während Addieren und Multiplizieren nur je eine haben, hat seinen Grund darin, dass die Reihenfolge von Basis und Exponent nicht gleichgiltig ist, was bei Summanden und Faktoren der Fall ist.

Beim Potenzieren waren Basis und Exponent gegeben und die Potenz wurde gesucht.

Beim Radizieren sind die Potenz und der Exponent gegeben und gesucht wird die Basis. Die Potenz heisst dann der Radikandus*) der Exponent Wurzelexponent und die

*) Aus dem Lateinischen; zu deutsch: „die Zahl, aus der die Wurzel gezogen werden soll“.

Basis Radix oder Wurzel. Das Zeichen des Wurzelausziehens $\sqrt[n]{}$ ist aus r (radix) entstanden.*)

Z. B. Potenzieren: $4^3 = 64$.

Daraus Radizieren: $\sqrt[3]{64} = 4$ (lies: dritte Wurzel aus 64).
64 Radikandus, 3 Wurzelexponent, 4 Radix oder Wurzel.

Beim Radizieren handelt es sich um die Frage: Welche Grösse muss man mit dem Wurzelexponenten potenzieren, um den Radikandus zu erhalten?

Demnach heisst **Radizieren**: Eine Grösse suchen, welche mit dem Wurzelexponenten potenziert den Radikandus hervorbringt. Diese Grösse heisst Radix oder Wurzel. Demnach ist Radix oder Wurzel die Grösse, welche mit dem Wurzelexponenten potenziert den Radikandus hervorbringt.

Z. B. ist die n te Wurzel aus a die Grösse, welche mit n potenziert a hervorbringt. $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Das Hauptgesetz und der Beweis des Radizierens ist:

Wurzel hoch Wurzelexponent muss gleich dem Radikandus sein.

Z. B. $\sqrt[3]{1000} = 10$.

Bew. $10^3 = 1000$.

Allgemein: Wenn $\sqrt[n]{a} = r$, so ist $r^n = a$.

Anmerkung. Die zweite Wurzel liest man meist Quadratwurzel, die dritte Wurzel Kubikwurzel. Bei der Quadratwurzel lässt man den Exponenten 2 fort.

Z. B. $\sqrt{100} = 10$ (lies: Quadratwurzel aus 100).

Man merke die Formeln:

$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b$. Denn $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

und $\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b$. Denn $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

2. Das Quadratwurzelziehen.

§ 137.

Das Quadratwurzelziehen geschieht nach der Formel:

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b.$$

*) Es ist von dem schon erwähnten Philosophen Descartes in die Mathematik eingeführt worden.

a. Die Quadratwurzel von Zahlen.

§ 138. Regeln.

1. Man teilt die Zahl von rechts aus in Abteilungen zu zwei ab.

(Grund: Die Quadrate aller einstelligen Zahlen sind ein- und zweistellig, die der zweistelligen Zahlen sind drei- und vierstellig u. s. w. Jeder Abteilung im Radikandus entspricht dann eine Ziffer der Wurzel.)

Bei Dezimalbrüchen teilt man vom Komma aus in Abteilungen zu zwei nach rechts und links ab. (Grund: z. B. $\sqrt{1,44} = 1,2$. Denn $1,2^2 = 1,44$.)

Beispiel 1. $\sqrt{15\overline{21}} = \overset{a}{3}\overset{b}{9}$

$$\begin{array}{r} a^2 = 9 \qquad 2a = 6 \\ \underline{62} \\ 2ab = 54 \\ \underline{81} \\ b^2 = 81. \end{array}$$

2. Aus der vordersten Abteilung zieht man die höchst mögliche Quadratwurzel. Im Beispiel höchste Quadratwurzel aus 15 ist 3.

Diese 3 entspricht dem a der Formel.

3. Man subtrahiert a^2 von der ersten Abteilung und zieht die nächste Ziffer herunter. Im Beispiel $a^2 = 9$, Rest 6, herunter die 2, kommt 62.

4. Die so entstehende Zahl teilt man durch $2a$ und erhält so das b der Formel. Im Beispiel erhält man aus $62:6$ für das b der Formel den höchst möglichen Quotienten 9. (Man darf hierbei für b nicht immer den höchsten Quotienten nehmen, weil man ausser $2ab$ auch noch b^2 abziehen muss, s. Beispiel 2.)

5. Man subtrahiert $2ab$ und zieht die nächste Ziffer herunter. Im Beispiel $2ab = 54$, Rest 8, herunter die 1, kommt 81.

6. Man subtrahiert b^2 . Im Beispiel $b^2 = 81$. Rest 0, also $\sqrt{1521} = 39$. Beweis: $39^2 = 1521$.

Man beachte, dass in obigem Beispiel a dem Zahlwerte nach nicht 3, sondern 30 bedeutet, demnach a^2 nicht 9, sondern 900, und $2a$ nicht 6, sondern 60. Entsprechendes ist beim Wurzelziehen überall zu beachten.

Beispiel 2.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{7,84} = \overset{a \ b}{2,8} \\
 a^2 = 4 \qquad \qquad 2a = 4 \\
 \hline
 38 \\
 2ab = 32 \\
 \hline
 64 \\
 b^2 = 64.
 \end{array}$$

7. Das erste $a + b$ bezeichnet man, wenn die Rechnung noch nicht zu Ende ist, mit a_1 und fährt in derselben Weise fort; geht die Wurzelziehung nicht auf, so fügt man im Radikandus als Dezimalstellen beliebig viele Nullen hinzu, setzt in der Wurzel hinter die erhaltenen Ziffern das Dezimalkomma, verfährt nun wie vorhin und berechnet soviel Stellen, wie verlangt werden. Wird $b = 0$, so wird $2ab = 0$ und $b^2 = 0$; man zieht dann sogleich weiter die nächsten beiden Ziffern herunter.

Beispiel 3.

$$\begin{array}{r}
 \overset{a_3}{} \\
 \hline
 \overset{a_2}{} \\
 \hline
 \overset{a_1}{} \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 \sqrt{9 \mid 30,67 \mid 70 \mid 49} = 3 \ 0,5 \ 0 \ 7 \\
 a^2 = 9 \qquad \qquad \qquad a \ b \ b_1 \ b_2 \ b_3 \\
 \hline
 306 \\
 2a_1 b_1 = 300 \\
 \hline
 67 \\
 b_1^2 = 25 \\
 \hline
 42704 \\
 2a_3 b_3 = 42700 \\
 \hline
 49 \\
 b_3^2 = 49.
 \end{array}
 \end{array}$$

Es fällt dem nachdenkenden Schüler vielleicht auf, dass man nicht von neuem mit a_1^2 beginnt, sondern mit $2a_1 b_1$ u. s. w. Man bedenke, dass a_1^2 , a_2^2 u. s. w. in $a_1^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ u. s. w. schon abgezogen sind.

Abkürzung.

8. Eine zweckmässige Abkürzung tritt durch Zusammenfassung der beiden letzten Glieder der Formel in ein Glied ein. Man rechnet dann nach: $a^2 + (2a + b) \cdot b$. Nachdem man a^2 subtrahiert hat, zieht man zwei Ziffern herunter, hakt für die Division eine Stelle von rechts ab, bildet dann $2a + b$ und multipliziert diese Summe mit b .

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \overline{a_3} \\
 \overline{a_2} \\
 \overline{a_1} \\
 a \ b \ b_1 \ b_2 \ b_3
 \end{array} \\
 \text{Beispiel 4.} \quad \sqrt{97 \mid 42,08 \mid 48 \mid 04} = 98,702 \\
 a^2 = 81 \\
 \begin{array}{r}
 2a + b = 188 \quad \overline{164 \mid 2} \\
 (2a + b) \cdot b = 1504 \\
 2a_1 + b_1 = 1967 \quad \overline{1380 \mid 8} \\
 (2a_1 + b_1) \cdot b_1 = 13769 \\
 \quad \quad \quad \overline{394 \mid 80 \mid 4} \\
 2a_3 + b_3 = 197402 \\
 (2a_3 + b_3) \cdot b_3 = 394804.
 \end{array}
 \end{array}$$

Es ist hierbei die Zusammensetzung der arabischen Ziffern zu Zahlen zu beachten. Man muss (s. Beispiel) bedenken, dass 98 eigentlich heisst $90 + 8$; demnach ist $2a + b$ nicht etwa $18 + 8 = 26$, sondern $180 + 8 = 188$; dasselbe muss man bei den folgenden Stellen beachten.

Die Buchstaben a, b, a_1, b_1 u. s. w. sind in den Beispielen nur beige-setzt, um dem Anfänger die Theorie klar zu machen. Beim Rechnen lässt man sie ebenso wie die jedesmaligen Produkte fort.

$$\begin{array}{r}
 \text{Beispiel 5.} \quad \sqrt{6} = 2,449 \dots \\
 \begin{array}{r}
 44 \mid 20 \mid 0 \\
 \hline
 484 \mid 240 \mid 0 \\
 \hline
 4889 \mid 4640 \mid 0 \\
 \hline
 2399
 \end{array}
 \end{array}$$

b. Die Quadratwurzel von Buchstabenausdrücken.

§ 139.

Den zu radizierenden Ausdruck ordnet man zunächst. Ein vollständiges Quadrat (aus dem man also ohne Rest die Wurzel ziehen kann) muss voranstehen. Man wird meistens die höchste vorkommende Potenz eines Buchstabenausdrucks voransetzen und dann nach fallenden Potenzen dieser Grösse weiter ordnen. Die im vorigen Paragraphen angegebene Abkürzung tritt hierbei nicht ein.

$$\text{Z. B. } \sqrt[3]{24ac + 9a^2 + 25b^2 + 16c^2 - 40bc - 30ab}.$$

Geordnet:

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{9a^2 - 30ab + 25b^2 + 24ac - 40bc + 16c^2} \\ + 9a^2 + 30ab + 25b^2 + 24ac + 40bc + 16c^2 = \end{array} \begin{array}{r} a_1 \\ a \quad b \quad b_1 \\ 3a - 5b + 4c \\ 6a \end{array}$$

$$2a_1 = 6a - 10b.$$

3. Das Kubikwurzelziehen.

§ 140.

Das Kubikwurzelziehen geschieht nach der Formel:

$$\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b.$$

a. Die Kubikwurzel von Zahlen.

§ 141. Regeln.

1. Man teilt die Zahl von rechts aus in Abteilungen zu drei ab.

(Grund: Die Kuben der einstelligen Zahlen sind ein-, zwei- oder dreistellig, die der zweistelligen vier- bis sechsstellig u. s. w. Jeder Abteilung im Radikandus entspricht dann eine Ziffer der Wurzel.)

Bei Dezimalbrüchen teilt man vom Komma aus in Abteilungen zu drei nach rechts und links ab.

(Grund: z. B. $\sqrt[3]{0,216} = 0,6$. Denn $0,6^3 = 0,216$.)

$$\begin{array}{r} \text{Beispiel 1. } \sqrt[3]{15|625} = \overset{a}{2} \overset{b}{5} \\ a^3 = 8 \qquad 3a^2 = 12 \\ \quad \quad \quad 76 \\ 3a^2b = 60 \\ \quad \quad \quad 162 \\ 3ab^2 = 150 \\ \quad \quad \quad 125 \\ b^3 = 125. \end{array}$$

2. Aus der vordersten Abteilung zieht man die höchst mögliche Kubikwurzel. Im Beispiel höchste Kubikwurzel aus 15 ist 2. Diese 2 entspricht dem a der Formel.

3. Man subtrahiert a^3 von der ersten Abteilung und zieht die nächste Ziffer herunter. Im Beispiel $a^3 = 8$, Rest 7, herunter die 6, kommt 76.

4. Die so entstehende Zahl teilt man durch $3a^2$ und erhält so das b der Formel. Im Beispiel erhält man aus $76 : 12$ für

das b der Formel 5. 6 darf man nicht nehmen, da sonst für das nachfolgende $3ab^2 + b^3$ nicht genug übrig bleiben würde.

5. Man subtrahiert $3a^2b$ und zieht die nächste Ziffer herunter. Im Beispiel $3a^2b = 60$, Rest 16, herunter die 2, kommt 162.

6. Man subtrahiert $3ab^2$. Im Beispiel $3ab^2 = 150$, Rest 12, herunter die 5, kommt 125.

7. Man subtrahiert b^3 . Im Beispiel $b^3 = 125$. Rest 0, also $\sqrt[3]{15625} = 25$. Beweis: $25^3 = 15625$.

Man beachte wieder, dass im obigen Beispiel a dem Zahlwerte nach nicht 2, sondern 20 bedeutet, demnach a^3 nicht 8, sondern 8000, $3a^2b$ nicht 60, sondern 6000 und $3ab^2$ nicht 150, sondern 1500.

8. Das erste $a + b$ bezeichnet man, wenn die Rechnung noch nicht zu Ende ist, mit a_1 u. s. w. S. § 138 No. 7 und

Beispiel 2.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l}
 \sqrt[3]{778|865|757|524,343} = 9\ 2\ 0\ 0,7 \\
 a^3 = 729 \\
 \hline
 498 \\
 3a^2b = 486 \\
 \hline
 126 \\
 3ab^2 = 108 \\
 \hline
 185 \\
 b^3 = 8 \\
 \hline
 177\ 757\ 524\ 3 \\
 3a_3^2b_3 = 177\ 744\ 000\ 0 \\
 \hline
 13\ 524\ 34 \\
 3a_3b_3^2 = 13\ 524\ 00 \\
 \hline
 343 \\
 b_3^3 = 343.
 \end{array}
 \end{array}$$

Abkürzung.

9. Eine wesentliche Abkürzung tritt durch Zusammenfassung der drei letzten Glieder der Formel in ein Glied ein. Man rechnet dann nach: $a^3 + (3a^2 + 3ab + b^2) \cdot b$. Nachdem man a^3 subtrahiert hat, zieht man drei Ziffern herunter, hakt für die Division 2 Stellen von rechts ab, bildet dann $3a^2 + 3ab + b^2$, wobei man den Stellenwert der Ziffern zu

beachten hat (s. Bemerkung § 138 No. 8) und multipliziert diese Summe mit b .

Beispiel 3.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt[3]{241|804|367} = \overset{a_1}{a} \overset{b}{b} \overset{b_1}{b_1} \\
 a^3 = 216 \\
 \begin{array}{r}
 3a^2 = 108 \\
 3ab = 36 \\
 b^2 = 4 \\
 \hline
 3a^2 + 3ab + b^2 = 11164 \\
 (3a^2 + 3ab + b^2) \cdot b = 22328 \\
 \hline
 34763|67
 \end{array} \\
 \begin{array}{r}
 3a_1^2 = 11532 \\
 3a_1b_1 = 558 \\
 b_1^2 = 9 \\
 \hline
 3a_1^2 + 3a_1b_1 + b_1^2 = 1158789 \\
 (3a_1^2 + 3a_1b_1 + b_1^2) \cdot b_1 = 3476367.
 \end{array}
 \end{array}$$

Beim praktischen Rechnen wird man natürlich das a, b u. s. w. fortlassen, soviel wie möglich im Kopf rechnen und insbesondere die Produkte nicht erst hinschreiben, sondern sogleich die Reste.

b. Die Kubikwurzel von Buchstabenausdrücken.

§ 141.

Man beachte das, was beim Quadratwurzelziehen von Buchstabenausdrücken gesagt ist, und verfähre nach der Formel ohne Abkürzung.

Z. B.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt[3]{x^6 - 3x^5y + 6x^4y^2 - 7x^3y^3 + 6x^2y^4 - 3xy^5 + y^6} = \overset{a_1}{a} \overset{b}{b} \overset{b_1}{b_1} \\
 \begin{array}{r}
 \underline{+x^6 + 3x^5y + 3x^4y^2 + x^3y^3 + 3x^2y^4 + 3xy^5 + y^6} \\
 3x^4y^2 - 6x^3y^3 + 3x^2y^4 \\
 \underline{3x^4y^2 + 6x^3y^3 + 3x^2y^4}
 \end{array} \\
 \begin{array}{r}
 \overset{a_1}{a} \overset{b}{b} \overset{b_1}{b_1} \\
 \hline
 x^2 - xy + y^2 \\
 \hline
 3a^2 = 3x^4 \\
 3a_1^2 = 3x^4 - 6x^3y + 3x^2y^2 \\
 3a_1 \cdot b_1^2 = 3x^2y^4 - 3xy^5.
 \end{array}
 \end{array}$$

4. Rechnung mit Wurzelgrößen.

§ 142.

Aus der Erklärung des Radizierens (s. § 136) ergeben sich die beiden Definitionsformeln:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \quad \text{und} \quad \sqrt[n]{a^n} = a.$$

In Worten: Jeder Wurzelausdruck ergibt mit dem Wurzelexponenten potenziert den Radikandus.

Potenzieren und Radizieren heben sich bei gleichen Exponenten auf. (Ebenso wie Addieren und Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren.)

Aus obigem ergibt sich die Regel:

Ist der Radikandus eine Potenz, deren Exponent durch den Wurzelexponenten teilbar ist, so lässt sich die Wurzel ziehen, indem man den Radikandus-exponenten durch den Wurzelexponenten dividiert.

$$\text{Z. B. } \sqrt[5]{a^{20}} = \sqrt[5]{(a^4)^5} = a^4. \quad \text{Bew. } (a^4)^5 = a^{20} \text{ (§ 132).}$$

§ 143.

Wurzeln mit geradem Wurzelexponenten (gerade Wurzeln) sind immer zweideutig, indem sie das Vorzeichen $+$ oder $-$ haben können.

$$\text{Z. B. } \sqrt{25} = +5 \text{ oder } -5.$$

$$\text{Denn } (+5)^2 = 25 \\ \text{und } (-5)^2 = 25.$$

$$\text{Allgemein: } \sqrt[2n]{a^{2n}} = \pm a.$$

Dagegen ist $\sqrt[3]{8}$ nicht etwa auch $+$ oder -2 . Denn $(+2)^3$ nur $= +8$ und $(-2)^3$ nur $= -8$.

Eine gerade Wurzel von einer negativen Zahl ist unmöglich. Z. B. $\sqrt{-25}$ unmöglich, da jede positive oder negative Zahl zur zweiten Potenz eine positive Zahl giebt. Dagegen ist $\sqrt[3]{-125} = -5$, da $(-5)^3 = -125$ ist. Die ungeraden Wurzeln erhalten das Vorzeichen des Radikanden. Z. B.

$$\sqrt[3]{+512} = +8; \quad \sqrt[3]{-512} = -8.$$

Eine gerade Wurzel einer negativen Zahl nennt man eine imaginäre*) Grösse. Die imaginären Wurzelgrössen haben für die niedere Mathematik keine Bedeutung. Man führt dieselben auf $\sqrt{-1}$ zurück und nennt $\sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit. Diese imaginäre Einheit bezeichnet man nach dem schon

*) Aus dem Lateinischen; bedeutet soviel wie „eingebildet, nicht wirklich“.

erwähnten Mathematiker Gauss mit i . Über dieselbe gilt der Satz $i^2 = -1$, denn $(\sqrt{-1})^2 = -1$ (nach Definitionsformel der Wurzel). Demnach erklärt man: Die imaginäre Einheit ist eine Zahl, deren Quadrat -1 ist.

Im Gegensatz zu den imaginären Wurzelgrössen nennt man alle übrigen Wurzeln reelle.*)

Die reellen Wurzeln teilt man ein in rationale**) und irrationale.***)

Unter einer rationalen Wurzelgrösse versteht man eine solche, welche sich genau (in ganzen Zahlen oder Brüchen) ausdrücken lässt.

$$\text{Z. B. } \sqrt[3]{216} = 6; \quad \sqrt{0,0025} = 0,05.$$

Irrationale Wurzelgrössen sind solche, welche sich nicht genau, aber mit beliebiger Genauigkeitsgrenze ausdrücken lassen. Man stellt die irrationalen Wurzelgrössen meistens in der Form unendlicher Dezimalbrüche dar.

$$\text{Z. B. } \sqrt{3} = 1,7320508 \dots\dots\dots$$

$$\sqrt[3]{3} = 1,442249 \dots\dots\dots$$

§ 144.

Ein Produkt radiziert man, indem man jeden Faktor radiziert.

$$\text{Z. B. } \sqrt{25 \cdot 16} = 5 \cdot 4 = 20.$$

$$\text{Allgemein: } \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

$$\begin{aligned} \text{Bew. } (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n &= (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n \quad (\S 127) = \\ &= a \cdot b \quad (\text{Definition des Radizierens}). \end{aligned}$$

Dies ist aber der Radikandus

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad (\text{Hauptgesetz des Radizierens}).$$

$$\text{Umgekehrt ist: } \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}.$$

In Worten: Wurzeln von gleichem Exponenten multipliziert man, indem man das Produkt der Radikanden mit dem gemeinsamen Wurzelexponenten radiziert.

*) Aus dem Lateinischen; bedeutet soviel wie „sachlich, wirklich“. Die Bezeichnungen reelle und imaginäre Grössen kommen zuerst bei Descartes vor.

**) Aus dem Lateinischen; bedeutet soviel wie „im Verhältnis stehend“ bez. „nicht im Verhältnis stehend“.

$$\text{Z. B.} \quad \sqrt[3]{50} \cdot \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{1000} = 10.$$

§ 145.

Einen Bruch radiziert man, indem man Zähler und Nenner radiziert.

$$\text{Z. B.} \quad \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Allgemein:} \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

$$\text{Bew.} \quad \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} \quad (\S 128) = \frac{a}{b}.$$

Dies ist aber der Radikandus

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (\text{Hauptgesetz des Radizierens}).$$

$$\text{Umgekehrt ist:} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

In Worten: Wurzeln von gleichem Exponenten dividiert man, indem man den Quotienten der Radikanden mit dem gemeinsamen Wurzelexponenten radiziert.

$$\text{Z. B.} \quad \frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

§ 146.

Ist der Nenner eines Bruches (Divisor beim Quotienten) irrational, so macht man ihn durch geeignete Erweiterung des Bruches (Quotienten) rational.

$$\text{Z. B.} \quad \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{1}{12}} = \sqrt{\frac{3}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{1}{a}\sqrt{a}$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{\frac{xy}{y^2}} = \frac{1}{y}\sqrt{xy}$$

$$\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \sqrt[3]{\frac{xy^2}{y^3}} = \frac{1}{y} \sqrt[3]{xy^2}$$

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \sqrt[n]{\frac{x \cdot y^{n-1}}{y^n}} = \frac{1}{y} \sqrt[n]{xy^{n-1}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{x(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{x(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}$$

$$\frac{x}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{x(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{x(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}.$$

§ 147.

Eine Wurzel potenziert man, indem man den Radikandus potenziert.

Z. B. $(\sqrt[5]{a})^3 = \sqrt[5]{a^3}.$

Allgemein: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$

Beweis: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \dots m \text{ mal} =$
 $= \sqrt[n]{a \cdot a \cdot a \dots m \text{ mal}} (\S 144) = \sqrt[n]{a^m}.$

Umgekehrt ist: $\sqrt[x]{a^y} = (\sqrt[x]{a})^y.$

In Worten: Ist der Radikandus eine Potenz, so kann man auch erst radizieren und dann potenzieren.

Z. B. $\sqrt[3]{512^2} = (\sqrt[3]{512})^2 = 8^2 = 64.$

§ 148.

Mit einem Produkte radiziert man, indem man nacheinander mit den einzelnen Faktoren in beliebiger Reihenfolge radiziert.

Z. B. $\sqrt[6]{729} = \sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt{9} = 3.$

Allgemein: $\sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$

Beweis: $(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}})^{m \cdot n} = ((\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}})^n)^m (\S 132) =$
 $= (\sqrt[m]{a})^m = a.$

Umgekehrt ist: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$

In Worten: Eine Wurzel radiziert man, indem man mit dem Produkte der Wurzelexponenten radiziert.

§ 149. Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

Jede Wurzel kann man in eine Potenz mit gebrochenem Exponenten verwandeln, indem man den Radikandusexponenten durch den Wurzelexponenten dividiert.

Z. B.
$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$
$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

Begründung: Da a^n nach Erklärung der Potenz bedeutet, a soll soviel mal als Faktor gesetzt werden, wie n anzeigt, so kann $a^{\frac{n}{m}}$ nur bedeuten, a soll soviel mal als Faktor gesetzt werden, wie $\frac{n}{m}$ anzeigt, oder es soll das durch n maliges Setzen von a gebildete Produkt in m gleiche Faktoren zerlegt werden. Wenn ich nun jedes einzelne a in m Faktoren zerlege, was durch Radizieren möglich ist, so werde ich $a^{\frac{n}{m}}$ erhalten, wenn ich n dieser Faktoren nehme.

$$a = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{a} \dots m \text{ mal (Erklärung der Wurzel).}$$

Dann ist
$$a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$$

$$a^{\frac{2}{m}} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{a}$$

und demnach
$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{a} \dots n \text{ mal} =$$
$$= \sqrt[m]{a \cdot a \cdot a \dots n \text{ mal}} (\S 144) = \sqrt[m]{a^n}.$$

Umgekehrt ist:
$$a^{\frac{y}{x}} = \sqrt[x]{a^y}$$
$$a^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{a}.$$

In Worten: Jede Potenz mit gebrochenem Exponenten lässt sich in eine Wurzel verwandeln, indem man den Nenner des Potenzexponenten zum Wurzelexponenten macht.

§ 150.

Der Wert einer Wurzel bleibt ungeändert, wenn man Wurzelexponent und Radikandusexponent mit einer und derselben Zahl multipliziert (die Wurzel erweitert) oder durch eine und dieselbe Zahl dividiert (die Wurzel kürzt).

Z. B. $\sqrt[3]{a^5} = \sqrt[12]{a^{20}}$ (erweitert mit 4)

$\sqrt[30]{a^{25}} = \sqrt[6]{a^5}$ (gekürzt durch 5).

Allgemein: 1. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nx]{a^{mx}}$

2. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{x}]{a^{\frac{m}{x}}}$

Bew. 1. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ (§ 149) $= a^{\frac{mx}{nx}}$ (§ 109) $= \sqrt[nx]{a^{mx}}$

2. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ (§ 149) $= a^{\frac{\frac{m}{x}}{\frac{n}{x}}}$ (§ 109) $= \sqrt[\frac{n}{x}]{a^{\frac{m}{x}}}$

§ 151.

Wurzeln von ungleichem Wurzelexponenten multipliziert oder dividiert man, indem man die Wurzelexponenten durch Erweiterung der Wurzel gleich macht und dann die Radikanden multipliziert oder dividiert.

Z. B. $\sqrt[15]{a} \cdot \sqrt[20]{a} = \sqrt[60]{a^4} \cdot \sqrt[60]{a^3} = \sqrt[60]{a^7}$
 $\frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[16]{a}} = \frac{\sqrt[48]{a^4}}{\sqrt[48]{a^3}} = \sqrt[48]{\frac{a^4}{a^3}} = \sqrt[48]{a}$

Allgemein: $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^n} \cdot \sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$
 $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{\sqrt[mn]{a^n}}{\sqrt[mn]{a^m}} = \sqrt[mn]{a^{n-m}}$

§ 152.

Zusammenfassung der für das Radizieren wichtigsten Formeln:

1. $(\sqrt[n]{a})^n = a$

2. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

4. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

$$6. \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}; \quad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$7. \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nx]{a^{mx}} = \sqrt[\frac{n}{x}]{a^{\frac{m}{x}}}$$

IX. Logarithmieren.

1. Erklärung.

§ 153.

Das Logarithmieren*) ist eine Umkehrung des Potenzierens (vgl. § 136).

Beim Potenzieren waren Basis und Exponent gegeben und die Potenz wurde gesucht. Beim Logarithmieren sind die Potenz und die Basis gegeben und gesucht wird der Exponent. Die Potenz heisst dann der Logarithmandus**), der gesuchte Exponent der Logarithmus (log). Die Basis behält ihren Namen bei.

Z. B. Potenzieren: $10^3 = 1000$. Daraus Logarithmieren $\log_{10} 1000 = 3$ (lies: log 1000 zur Basis 10). $1000 =$ Logarithmandus, $10 =$ Basis, $3 =$ Logarithmus.

Beim Logarithmieren handelt es sich um die Frage: Mit welcher Zahl muss man die Basis potenzieren, um den Logarithmandus zu erhalten?

Demnach heisst **Logarithmieren**: Eine Grösse suchen, mit der man die Basis potenzieren muss, um den Logarithmandus zu erhalten.

Diese Grösse heisst Logarithmus. Demnach ist der Logarithmus die Grösse, mit der die Basis potenziert den Logarithmandus hervorbringt.

Z. B. ist der Logarithmus von a in Bezug auf die Basis b , also $\log_b a$, die Grösse, mit der b potenziert a ergibt.

$$b^{(\log_b a)} = a.$$

Das Hauptgesetz und der Beweis des Logarithmierens ist:

*) Die Logarithmen sind um 1614 von dem schottischen Baron Napier erdacht worden. Logarithmus bedeutet soviel wie Verhältniszahl. Man nannte damals z. B. $a^3 : b^3$ das dritte Verhältniss des Grundverhältnisses $a : b$, oder z. B. $1 : 125$ das dritte Verhältniss von $1 : 5$ und schrieb dann $5 \log 125 = 3$. Die erste Logarithmentafel wurde 1648 gedruckt.

**) Logarithmandus heisst zu deutsch: „eine Zahl, die logarithmiert werden soll.“

Basis hoch Logarithmus muss gleich dem Logarithmandus sein.

Z. B. $\log_5 125 = 3$. Beweis: $5^3 = 125$.

Allgemein: Wenn $\log_b x = y$ ist, so muss $b^y = x$ sein.

Zusatz. Über den Zusammenhang von Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren merke man folgende drei Gleichungen

$$\begin{aligned} b^e &= P \text{ (Potenzieren) z. B. } 10^3 = 1000 \\ \sqrt[e]{P} &= b \text{ (Radizieren) „ „ } \sqrt[3]{1000} = 10 \\ \log_b P &= e \text{ (Logarithmieren) „ } \log_{10} 1000 = 3. \end{aligned}$$

Diese drei überaus wichtigen Fundamentalgleichungen bedingen sich gegenseitig; wenn die eine gilt, so sind auch die beiden andern richtig.

2. Rechnung mit Logarithmen.

§ 154.

Über die Rechnung mit Logarithmen merke man folgende 4 Hauptformeln:

1. $\log a \cdot b = \log a + \log b$
2. $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$
3. $\log a^n = n \cdot \log a$
4. $\log \sqrt[n]{a} = \frac{\log a}{n}$.

In Worten:

1. Ein Produkt logarithmiert man, indem man die Logarithmen der einzelnen Faktoren addiert.

2. Einen Bruch logarithmiert man, indem man den Logarithmus des Nenners von dem des Zählers subtrahiert.

3. Eine Potenz logarithmiert man, indem man den Logarithmus der Basis mit dem Exponenten multipliziert.

4. Eine Wurzel logarithmiert man, indem man den Logarithmus des Radikanden durch den Wurzelexponenten dividiert.

Diese Sätze gelten für jede beliebige Basis. Nehmen wir x als solche an, so lauten die 4 entsprechenden Behauptungen:

1. $\log_x (a \cdot b) = \log_x a + \log_x b$
2. $\log_x \left(\frac{a}{b} \right) = \log_x a - \log_x b$

$$3. \log_x a^n = n \cdot \log_x a$$

$$4. \log_x \sqrt[n]{a} = \frac{\log_x a}{n} \text{ oder } \frac{1}{n} \log_x a.$$

Bew. 1 und 2: Man setze

$$\log_x a = m$$

$$\text{und } \log_x b = n. \text{ Dann ist}$$

$$\text{und } \left. \begin{array}{l} x^m = a \\ x^n = b \end{array} \right\} \text{ (Hauptgesetz)}$$

$$x^{m+n} = a \cdot b \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} x^m = a \\ x^n = b \end{array}} \right\} \text{ (Gr. V}_3 \text{ und § 130)}$$

$$x^{m-n} = \frac{a}{b} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} x^m = a \\ x^n = b \end{array}} \right\} \text{ (Gr. V}_4 \text{ und § 131).}$$

Oder logarithmisch geschrieben:

$$\log_x (a \cdot b) = m + n$$

$$\log_x \left(\frac{a}{b} \right) = m - n.$$

Setzt man nun für m und n die oben angenommenen Werte ein, so erhält man:

$$\left. \begin{array}{l} \log_x (a \cdot b) = \log_x a + \log_x b \\ \log_x \left(\frac{a}{b} \right) = \log_x a - \log_x b \end{array} \right\} \text{ (Gr. II)}$$

W. z. b. w.

Umgekehrt ist:

$$\log a + \log b = \log a \cdot b$$

$$\text{und } \log a - \log b = \log \frac{a}{b}.$$

Man hüte sich, für $\log (a + b)$ oder $\log (a - b)$ etwa $\log a + \log b$ oder $\log a - \log b$ setzen zu wollen; $\log (a + b)$ und $\log (a - b)$ sind für uns nicht weiter ausführbar.

Bew. 3 und 4:

Man setze $\log_x a = m$. Dann ist

$$x^m = a \text{ (Hauptgesetz.)}$$

$$n = n \text{ (Gr. I)}$$

$$x^{n \cdot m} = a^n \text{ (Gr. V}_5 \text{ und § 132)}$$

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a} \text{ (Gr. V}_6 \text{ und § 149).}$$

Oder logarithmisch geschrieben:

$$\log_x a^n = n \cdot m$$

$$\log_x \sqrt[n]{a} = \frac{m}{n}.$$

Setzt man nun für m den oben angenommenen Wert ein, so erhält man:

$$\log_x a^n = n \cdot \log_x a$$

$$\log_x \sqrt[n]{a} = \frac{\log_x a}{n}. \quad \text{W. z. b. w.}$$

Umgekehrt ist:

$$n \cdot \log a = \log a^n$$

$$\text{und} \quad \frac{\log a}{n} = \log \sqrt[n]{a}.$$

Anmerkung: Aus den vier logarithmischen Hauptformeln geht hervor, dass man unter Anwendung von Logarithmen Multiplizieren, Dividieren, Potenzieren und Radizieren in Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren verwandeln kann, wodurch umständliche Rechnungen erheblich vereinfacht werden.

$$\begin{aligned} \text{Z. B.} \quad \log \frac{(20,35)^9 \cdot \sqrt[13]{7}}{(0,7)^{63} \cdot \sqrt[19]{5}} &= 9 \cdot \log 20,35 + \frac{\log 7}{13} - \\ &- 63 \cdot \log 0,7 - \frac{\log 5}{19}. \quad (\text{Näheres s. § 163.}) \end{aligned}$$

§ 155.

Der Logarithmus von 1 ist für jede beliebige Basis = 0.

$$\log_x 1 = 0.$$

$$\text{Bew. } x^0 = 1 \quad (\S 134).$$

3. Das Briggssche Logarithmensystem.

§ 156.

Ein Logarithmensystem ist die Zusammenstellung der Logarithmen aller Zahlen, die zu einer bestimmten Basis gehören. Denkbar sind unendlich viele Logarithmensysteme. Das in der niederen Mathematik allgemein übliche Logarithmensystem ist das der Basis 10. Da dasselbe von Georg Briggs, Professor zu Oxford in England († 1630), zuerst berechnet ist, nennt man es das Briggssche Logarithmensystem. Die Basis 10 lässt man bei Anwendung desselben gewöhnlich als selbstverständlich fort.

§ 157.

Die Logarithmen aller Potenzen von 10 sind ganze Zahlen, die aller übrigen Zahlen Brüche, welche man als Dezimalbrüche darstellt. (Hier wie bei den folgenden Paragraphen wird „im Briggschen Logarithmensystem“ als selbstverständlich fortgelassen.)

$$\begin{array}{lcl} \log 1 = 0. & \text{Denn } 10^0 = 1 & \} \\ \log 10 = 1. & \text{„ } 10^1 = 10 & \} \\ \log 100 = 2. & \text{„ } 10^2 = 100 & \} \\ \log 1000 = 3. & \text{„ } 10^3 = 1000 & \} \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{Die Log. d. Zahl. v. } 1-9 \text{ lieg. zw. } 0 \text{ u. } 1; \text{ man schr. sie } 0, \dots \\ \text{„ } 11-99 \text{ „ } 1 \text{ u. } 2; \text{ „ } 1, \dots \\ \text{„ } 101-999 \text{ „ } 2 \text{ u. } 3; \text{ „ } 2, \dots \end{array} \right\}$$

u. s. w.

Mit Ausnahme der Logarithmen der Potenzen von 10 bestehen demnach die Logarithmen aus zwei Teilen, der Zahl vor dem Komma, der Kennziffer oder Charakteristik*), und einem echten Bruch, der Mantisse**) heisst. Je nachdem die Mantisse auf 4, 5, 7 u. s. w. Stellen berechnet ist, nennt man die Tafeln vierstellige, fünfstellige, siebenstellige u. s. w. In den höheren Schulen werden meistens fünfstellige Tafeln benutzt; vierstelligen genügen den Genauigkeitsanforderungen der Schulen übrigens auch. Bei den folgenden Ausführungen sind Bremikers fünfstellige Tafeln (Berlin, Weidmannsche Buchhandlung) benutzt.

§ 158.

Die Logarithmen der echten Brüche sind negativ.

Grund: Nach log Gesetz II ist $\log \left(\frac{a}{b} \right) = \log a - \log b$; bei einem echten Bruch ist $a < b$, demnach auch $\log a < \log b$ und folglich $\log a - \log b$ negativ.

Wichtig sind:

$$\begin{array}{lcl} \log 0,1 = -1. & \text{Denn } 10^{-1} = \frac{1}{10^{+1}} = 0,1. & \text{Die Log. d. Br. zw. } 1 \text{ u. } \frac{1}{10} \text{ liegen zw. } 0 \text{ u. } -1; \\ & & \text{m. schr. sie } 0, \dots -1. \\ \log 0,01 = -2. & \text{„ } 10^{-2} = \frac{1}{10^{+2}} = 0,01. & \text{„ } \frac{1}{10} \text{ u. } \frac{1}{100} \text{ liegen zw. } -1 \text{ u. } -2; \\ & & \text{m. schr. sie } 0, \dots -2. \\ \log 0,001 = -3. & \text{„ } 10^{-3} = \frac{1}{10^{+3}} = 0,001. & \text{„ } \frac{1}{100} \text{ u. } \frac{1}{1000} \text{ liegen zw. } -2 \text{ u. } -3; \\ & & \text{m. schr. sie } 0, \dots -3. \end{array}$$

u. s. w.

§ 159. Aufschlagen des Logarithmus.

Soll man zu einer ganzen Zahl (in der Logarithmentafel meist mit *N Numerus****)) bezeichnet) den Logarithmus aufschlagen, so bestimmt man zuerst die Kennziffer nach der Regel:

*) Aus dem Griechischen; bedeutet soviel wie die Zahl, welche „kenntlich“ macht.

**) Aus dem Griechischen; bedeutet soviel wie „Zugabe“.

***) Aus dem Lateinischen; heisst „Zahl“.

Die Kennziffer beträgt 1 weniger als die Anzahl der Ziffern der aufzuschlagenden Zahl.

Z. B. ist 0 die Kennziffer von 8
 1 „ „ „ 28
 2 „ „ „ 335 u. s. w.

Hinter die Kennziffer schreibt man dann als Dezimalbruch die Mantisse, welche man aus der Logarithmentafel findet.

Z. B. $\log 256 = 2,40824$.

(Der Beweis der Richtigkeit würde sein $10^{2,40824} = 256$.)

Bei einem unechten Dezimalbruch bestimmt man die Kennziffer nach den vor dem Komma stehenden Ziffern und schlägt dann die Mantisse für alle Ziffern auf ohne Rücksicht auf das Komma.

Z. B. $\log 25,6 = 1,40824$ (denn $\log 25,6 = \log 256$
 $\quad \quad \quad - \log 10 = 2,40824 - 1$)
 $\log 2,56 = 0,40824$ (denn $\log 2,56 = \log 256$
 $\quad \quad \quad - \log 100 = 2,40824 - 2$).

Die Logarithmen echter Dezimalbrüche sind negativ (vgl. § 158); man schreibt sie aus praktischen Gründen als Differenz zwischen der positiven Mantisse und der negativen Kennziffer.

Z. B. $\log 0,3 = 0,47712 - 1$
 $\log 0,03 = 0, \quad \quad - 2$
 $\log 0,00003 = 0, \quad \quad - 5$.

Man kann sich hierbei merken, dass die negative Kennziffer immer so gross ist, wie die Anzahl der Nullen vor der ersten Ziffer, die einen Wert hat. Man bedenke aber, dass $\log 0,3$ eigentlich ist $-1 + 0,47712$, also $-0,52288$.

(Der Beweis der Richtigkeit dieser Schreibweise würde sein

z. B. $\log 0,03 = \log \frac{3}{100} = \log 3 - \log 100 = 0,47712 - 2$.)

Durch die Anhängung von Nullen wird nur die Kennziffer einer Zahl, nicht aber die Mantisse geändert.

Z. B. $\log 3 = 0,47712$
 $\log 30 = 1, \quad \quad \quad$
 $\log 300000 = 5, \quad \quad \quad$.

In den 5stelligen Tafeln findet man die Logarithmen aller 4ziffrigen Zahlen unmittelbar. Z. B. 8267; Kennziffer 3. Dann findet man unter N 826 als erste Ziffer der Mantisse 9, also 3,9. Unter der Abteilung 7 findet man dann die übrigen 4 Ziffern 1735. Also ist

$$\log 8267 = 3,91735.$$

Aus praktischen Gründen (wegen des Druckes) steht die erste Ziffer der Mantisse zuweilen eine Reihe niedriger, als die zugehörige Zahl. Dies wird dann in der Tafel durch einen wagerechten Strich über der zweiten Dezimalstelle (in andern Tafeln durch ein *) angedeutet.

Z. B. 2517 nicht 3, 30088, sondern 3,40088.

Bei mehrziffrigen Zahlen findet man die 5te und 6te Ziffer durch sogenannte Interpolation.*)

Z. B. $\log 63849$; Kennziffer 4.

Man findet $\log 63840 = 4,80509$.

Es ist $\log 63850 = 4,80516$.

Wenn demnach der Numerus um 10 fortschreitet, so schreitet der Logarithmus an letzter Stelle um 7 fort. Diese Zahl nennt man „die Differenz“. Nun schliesst man weiter, wenn der 10 eine 7 entspricht, so entspräche einer 1 eine 0,7 und folglich der 9 eine 6,3. Es würde demnach sein

$$\log 63849 = 4,805153.$$

Ebenso kann man das für die 6te Stelle Hinzukommende finden. Da hierbei der Numerus um 100 fortschreitet, muss man die Differenz auch hierdurch dividieren.

Z. B. $\log 187639$; Kennziffer 5;

man findet zunächst 5,27323

für die 3 6,9

für die 9 2,07

$$\log 187639 = 5,2733197.$$

Meistens rundet man bei Benutzung der 5stelligen Tafeln sowohl im Numerus als auch im Logarithmus nach der bekannten Abrundungsregel (unter $\frac{1}{2}$ gleich 0; $\frac{1}{2}$ und über $\frac{1}{2}$ gleich 1, oder Dezimalstellen 0,1 bis 0,4 = 0; 0,5 bis 0,9 = 1) auf 5 Stellen ab.

Z. B. $\log 98754398 = \log 98754000 = 7,99456$

$\log 1357892 = \log 1357900 = 6,13287$.

Zur Erleichterung sind die für die letzten Stellen hinzukommenden Zahlen unter der Überschrift P. P. (Partes proportionales, Differenztäfelchen) berechnet. Man schlägt in der Praxis die zu den 4 ersten Ziffern gehörende Mantisse auf, bestimmt durch Subtraktion von dem nächstfolgenden Logarithmus das zugehörige Differenztäfelchen, entnimmt aus diesem das für die abgerundete 5te Ziffer noch zu Addierende, wobei man wieder abrundet, zählt dies im Kopfe hinzu und schreibt dann die 5stellige Mantisse hin. Der Schüler soll sich aber immer klar bewusst bleiben, worauf dieses mechanische Rechnen beruht.

*) Aus dem Lateinischen; bedeutet soviel wie „Einschaltung“.

§ 160. Aufschlagen des Numerus.

Beim Aufschlagen der zu einem Logarithmus zugehörigen Zahl, oder wie man meistens sagt, des zugehörigen Numerus, sucht man unter den Logarithmen nach der gegebenen Mantisse. Findet man sie direkt in der Tafel, so erhält man daraus unmittelbar die ersten vier zugehörigen Ziffern. Die Gesamtzahl der Ziffern bestimmt man nach der Kennziffer des Logarithmus. Da nach vorigem Paragraphen die Kennziffer 1 weniger als die Anzahl der ganzen Stellen der aufzuschlagenden Zahl beträgt, so ist umgekehrt die Anzahl der Ziffern der zu einem Logarithmus gehörenden Zahl 1 mehr als die Kennziffer Einheiten hat. Z. B. gehört zur Kennziffer 3 eine 4ziffrige Zahl u. s. w.

$$\begin{aligned} \text{Z. B.} \quad & \text{num log } 1,26741 = 18,51 \\ & \text{num log } 3,60021 = 3983 \\ & \text{num log } 2,47712 = 300 \\ & \text{num log } 6,89537 = 7859000. \end{aligned}$$

Ist die Kennziffer negativ, so hat man vor die gefundenen Ziffern soviel Nullen zu setzen, wie die Kennziffer Einheiten hat und setzt das Dezimalkomma hinter die erste 0.

$$\begin{aligned} \text{Z. B.} \quad & \text{num log } 0,49996 - 1 = 0,3162 \\ & \text{num log } 0,96407 - 4 = 0,0009206. \end{aligned}$$

Steht die gegebene Mantisse nicht genau in der Tafel, so sucht man zunächst die nächst niedere Mantisse unter den Logarithmen auf und findet dadurch die ersten 4 Ziffern der zugehörigen Zahl; die folgenden Stellen findet man dann durch Interpolation in umgekehrter Weise wie beim Aufschlagen des Logarithmus.

$$\begin{aligned} \text{Z. B.} \quad & \text{num log } 4,22180; \\ & \text{man findet zunächst zu } 22167 \text{ die Ziffern } 1666 \end{aligned}$$

Nicht berücksichtigter Unterschied 13.

Indem man nun in der Tafel 22167 von der nächst höheren Mantisse abzieht, findet man die Differenz 27. Man schliesst nun folgendermassen:

Schreitet der Logarithmus um 27 an den beiden letzten Stellen fort, so nimmt die Zahl um 1 an vierter Stelle oder um 10 an fünfter Stelle zu. Also der 27 entspricht 10

$$\begin{array}{rcl} & & 10 \\ 1 & " & \frac{10}{27} \\ 13 & " & \frac{130}{27} = 4,8 \dots \end{array}$$

Folglich ist $\text{num log } 4,22180 = 16664,8 \dots$
oder abgerundet 16665.

Man rundet auch hier meistens auf 5 Stellen ab, indem man die fünfte abgerundete Ziffer mittelst des zugehörigen Differenztafelchens direkt aus der Tafel abliest. Der Schüler vergesse aber auch hier nie den Grund und die Art der Berechnung.

Anmerkung. Der Anfänger thut gut, jedesmal die Probe zu machen, indem er zu dem gefundenen Numerus wiederum den Logarithmus aufschlägt, der natürlich wieder mit dem gegebenen übereinstimmen muss.

§ 161.

Es ist leicht und bei dem häufigen Vorkommen praktisch, sich zu merken:

$$\log 2 = 0,30103$$

$$\log 3 = 0,47712.$$

Dann ist nach den logarithmischen Gesetzen:

$$\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2 = 0,60206$$

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0,30103 = 0,69897$$

$$\log 6 = \log 2 \cdot 3 = \log 2 + \log 3 = 0,77815$$

$$\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2 = 0,90309$$

$$\log 9 = \log 3^2 = 2 \log 3 = 0,95424$$

$$\log 12 = \log 3 \cdot 4 = \log 3 + \log 4 = 1,07918 \text{ u. s. w.}$$

Aus diesen Beispielen erkennt man, dass man aus einigen bekannten Grundlogarithmen manche andere finden kann.

§ 162. Anwendungen der Logarithmen.

Da durch die vier logarithmischen Gesetze Multiplizieren in Addieren, Dividieren in Subtrahieren, Potenzieren in Multiplizieren und Radizieren in Dividieren verwandelt wird, so bieten uns die Logarithmen ein bequemes Mittel dar, um komplizierte Rechnungen leicht auszuführen.

Z. B. I. Multiplizieren:

$$0,0973568 \cdot 1,284632 \cdot 846493.$$

$$\log 0,097357 = 0,98837 - 2$$

$$\log 1,2846 = 0,10877$$

$$\log 846490 = 5,92763$$

$$5,02477$$

$$105870.$$

$$\text{II. Dividieren: } \frac{31,738556}{0,987845}.$$

$$\begin{array}{r} \log 31,739 = 1,50160 \\ \log 0,98785 = 0,99469 - 1 \\ \hline 1,50691 \\ \hline 32,13. \end{array}$$

III. Potenzieren:

$$\begin{array}{r} (0,945683)^{13}. \\ \log 0,94568 = 0,97574 - 1 \\ \hline 12,68462 - 13 \quad | \cdot 13 \\ \hline \text{oder } 0,68462 - 1 \\ \hline 0,48374. \end{array}$$

$$\text{IV. Radizieren: } \sqrt[10]{97588}.$$

$$\begin{array}{r} \log 97588 = 4,98940 \\ \hline 10 | 0,49894 \\ \hline 3,1546. \end{array}$$

Hat der Logarithmus des Radikanden eine negative Kennziffer und geht diese bei Division durch den Wurzelexponenten nicht auf, so ergänze man dieselbe zu dem nächsten Vielfachen des Divisors. Damit der Wert des Logarithmus ungeändert bleibt, muss man vor dem Komma dieselbe Grösse positiv hinzufügen, um die man die negative Kennziffer erhöht hat.

$$\begin{array}{r} \text{Z. B. } \sqrt[19]{0,023459} \\ \log 0,023459 = 0,37031 - 2 \\ \hline 17 \quad \quad \quad - 17 \\ \hline 19 | 17,37031 - 19 \\ \hline 0,91423 - 1 \\ \hline 0,82078. \end{array}$$

X. Lehre von den Gleichungen.

1. Einleitendes.

§ 163.

Eine Gleichung ist der mathematische Ausdruck für die Gleichheit zweier Grössen.

Z. B. $a = b$ drückt mathematisch aus, dass die Grösse a ebenso gross wie die Grösse b ist.

Ebenso:

$$\begin{array}{l} x = x \\ 5 = 5 \\ x - 3 = 5 + 6 \quad \text{u. s. w.} \end{array}$$

Die vorkommenden durch $+$ oder $-$ miteinander verbundenen Grössen nennt man die Glieder der Gleichung. Die Abteilungen links und rechts vom Gleichheitszeichen nennt man die linke und die rechte Seite der Gleichung. Die Seiten der Gleichung kann man beliebig vertauschen.

§ 164.

Man unterscheidet 2 Hauptarten von Gleichungen:

1. identische*) Gleichungen,
2. Bestimmungsgleichungen.

1) Identische Gleichungen sind solche, in denen die eine Seite ohne Einsetzung neuer Werte dasselbe aussagt wie die andere.

Z. B.

$$\begin{aligned} a &= a \\ a + b &= b + a \\ a \cdot b &= b \cdot a. \end{aligned}$$

2) Bestimmungsgleichungen sind solche, in denen unbekannte Grössen durch bekannte bestimmt werden sollen. Die Unbekannten bezeichnet man mit den letzten Buchstaben des Alphabets (x, y, z), die Bekannten ausser durch Zahlen mit den übrigen Buchstaben.

Z. B.

$$\begin{aligned} x - 3 &= 7 \\ x + y + z &= 20. \end{aligned}$$

§ 165.

Eine Gleichung (Bestimmungsgleichung) auflösen heisst: Für die unbekannten Grössen bekannte Werte finden, welche durch ihre Einsetzung die ursprüngliche Gleichung zu einer identischen machen.

Z. B.

$$\begin{aligned} x - 3 &= 7 \\ x &= 10. \end{aligned}$$

Aus der obigen Erklärung folgt:

Eine Gleichung ist richtig gelöst, wenn sie durch Einsetzung der für die Unbekannten gefundenen Werte zu einer identischen wird.

Z. B.

$$\begin{aligned} x - 3 &= 7 \\ x &= 10, \end{aligned}$$

richtig, weil $10 - 3 = 7$ eine identische Gleichung ist. Diesen Satz benutzt man als Probe für die Richtigkeit der Lösung von Gleichungen.

*) Aus dem Lateinischen; bedeutet soviel wie „ganz dasselbe“.

§ 166.

Die Bestimmungsgleichungen teilt man nach der Anzahl der vorkommenden Unbekannten sowie nach dem höchsten vorkommenden Potenzexponenten in Gleichungen mit einer, zwei u. s. w. Unbekannten vom ersten, zweiten u. s. w. Grade ein.

Z. B.

						Abgekürzte Bezeichn.
$x-3=7$	ist eine Gleichg. mit 1	Unbekannten v. ersten Grade,	$G(x)$			
$x+y=6$	}	" " " " 2	" " " "	$G(x,y)$		
$x-y=10$						
$x^2-5x=10$	" " " " 1	" " " "	" " " "	$G(x^2)$		
	u. s. w.					

Eine Gleichung, in welcher x als Exponent vorkommt, nennt man eine Exponentialgleichung. Z. B. $a^x = b$.

2. Gleichungen vom ersten Grade mit einer Unbekannten. $G(x)$.

§ 167. Normalform*) $ax = b$.

Gemäss den 7 Rechnungsarten der Algebra kommen 7 Grundgleichungen in Betracht, deren Lösung dem Schüler immer geläufig sein muss:

1.	$\begin{array}{r} x-3=5 \\ 3=3 \\ \hline x=8 \end{array}$	$\begin{array}{r} x-a=b \\ a=a \\ \hline x=a+b \text{ (Gr. } V_1\text{).} \end{array}$
2.	$\begin{array}{r} x+7=16 \\ 7=7 \\ \hline x=9 \end{array}$	$\begin{array}{r} x+a=b \\ a=a \\ \hline x=b-a \text{ (Gr. } V_2\text{).} \end{array}$

Aus 1. und 2. sieht man:

Man kann jedes Glied einer Gleichung von der einen Seite auf die andere schaffen, wenn man ihm das entgegengesetzte Vorzeichen giebt.

Diese Operation nennt man: Transponieren.**)

3.	$\begin{array}{r} \frac{x}{3}=8 \\ 3=3 \\ \hline x=24 \end{array}$	$\begin{array}{r} \frac{x}{a}=b \\ a=a \\ \hline x=a \cdot b \text{ (Gr. } V_3\text{).} \end{array}$
4.	$\begin{array}{r} 5x=20 \\ 5=5 \\ \hline x=4 \end{array}$	$\begin{array}{r} ax=b \\ a=a \\ \hline x=\frac{b}{a} \text{ (Gr. } V_4\text{).} \end{array}$

*) Aus dem Lateinischen; bedeutet soviel wie „Regelform, Musterform“.

**) Aus dem Lateinischen; heisst „hinübersetzen“.

Aus 3. und 4. sieht man:

Ein Divisor der einen Seite wird auf der andern Faktor und umgekehrt.

$$\begin{array}{rcl}
 5. & \sqrt[3]{x} = 9 & \sqrt[n]{x} = a \\
 & 3 = 3 & n = n \\
 \hline
 & x = 729 & x = a^n \text{ (Gr. V}_5\text{).} \\
 \\
 6. & x^2 = 49 & x^n = a \\
 & 2 = 2 & n = n \\
 \hline
 & x = \pm 7 & x = \sqrt[n]{a} \text{ (Gr. V}_6\text{).}
 \end{array}$$

Aus 5. und 6. sieht man:

Ein Wurzelexponent der einen Seite wird auf der andern Potenzexponent und umgekehrt.

$$\begin{array}{rcl}
 7. & a^x = b & \\
 & x \cdot \log a = \log b \text{ (Gr. V}_7\text{)} & \\
 & x = \frac{\log b}{\log a} &
 \end{array}$$

Anmerkung. Die Normalform stellt man auch oft in der Form $ax \pm b = 0$ dar. Solche Gleichungen, deren eine Seite 0 ist, nennt man auf 0 reduzierte oder auch wohl annullierte Gleichungen.

§ 168. Allgemeine Regeln für die Lösung von $G(x)$.

Die nachstehenden Regeln ergeben sich nach dem vorigen Paragraphen. Der Anfänger wird gut thun, sie der Reihe nach anzuwenden. Später wird man die Regeln nicht immer der Reihe nach gebrauchen, sondern, wie es für den einzelnen Fall am praktischsten erscheint. Im allgemeinen wird es immer darauf ankommen, die Unbekannte auf einer Seite allein zu erhalten, d. h. sie von allen anhaftenden Grössen zu befreien.

1. Klammern, in denen die Unbekannte steht, löst man auf.

2. Gemischte Zahlen richtet man ein.

3. Etwa vorhandene Brüche schafft man fort, indem man die ganze Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert.

4. Man ordnet die Gleichung, d. h. man schafft durch Transposition alle unbekannten Glieder auf die eine und alle bekannten auf die andere Seite.

5. Man vereinigt soviel wie möglich in ein Glied. (Bei Buchstabengleichungen sondert man zu dem Zwecke die Unbekannte ab.)

6. Man dividiert die ganze Gleichung durch den algebraischen Koeffizienten der Unbekannten.

7. Steht die Unbekannte unter einem Wurzelzeichen, so potenziert man die ganze Gleichung mit dem Wurzel-exponenten.

8. Hat die Unbekannte einen Potenzexponenten, so radiziert man die ganze Gleichung mit demselben.

9. Steht die Unbekannte als Exponent, so logarithmiert man die Gleichung zur Basis 10.

10. Man macht die Probe, indem man den für die Unbekannte gefundenen Wert in die ursprüngliche Gleichung einsetzt. Ist die Lösung richtig, so muss sich eine identische Gleichung hierdurch ergeben.

Beispiel:

$$(x-2) \cdot 7\frac{1}{2} - 1\frac{1}{7} (2x-13) = \frac{5}{8} (7x+3) - \frac{3}{4} (x+5) + 6\frac{1}{2}$$

$$\frac{15x}{2} - 15 - \frac{16x}{7} + \frac{104}{7} = \frac{35x}{8} + \frac{15}{8} - \frac{3x}{4} - \frac{15}{4} + \frac{13}{2} \quad (\text{Regel 1 und 2})$$

Hauptnenner 56

$$420x - 840 - 128x + 832 = 245x + 105 - 42x - 210 + 364$$

(Regel 3)

$$420x - 128x - 245x + 42x = 105 - 210 + 364 + 840 - 832$$

(Regel 4)

$$89x = 267 \quad (\text{Regel 5})$$

$$x = 3 \quad (\text{Regel 6})$$

$$\text{Probe: } 7\frac{1}{2} - 1\frac{1}{7} \cdot -7 = \frac{5}{8} \cdot 24 - \frac{3}{4} \cdot 8 + 6\frac{1}{2} \quad (\text{Regel 10})$$

$$7\frac{1}{2} + 8 = 15 - 6 + 6\frac{1}{2}$$

$$15\frac{1}{2} = 15\frac{1}{2}.$$

Dies ist eine identische Gleichung. Folglich ist $x = 3$ richtig.

Beispiel zu Regel 7:

$$\sqrt{9x^2 - 10x + 5} = 2 - 3x$$

$$9x^2 - 10x + 5 = 4 - 12x + 9x^2$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}.$$

Beispiel zu Regel 8:

$$(x-1)^3 = 216$$

$$x-1 = 6$$

$$x = 7.$$

Beispiel zu Regel 9:

$$\begin{aligned} 3^x &= 100 \\ x \log 3 &= 2 \\ x &= \frac{2}{0,47712} \\ x &= 4,1918 \dots \end{aligned}$$

§ 169.

Unter den $G(x)$ kommen in den Aufgabensammlungen zuweilen Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned} x^2 - ax &= 0 \\ x^n - ax^{n-1} &= 0 \text{ vor.} \end{aligned}$$

Man kann dieselbe durch Zerlegung in einfacher Weise lösen, obgleich sie eigentlich Gleichungen höherer Grade sind. Man erhält nämlich durch Absonderung

$$\begin{aligned} x(x - a) &= 0 \\ x^{n-1}(x - a) &= 0 \end{aligned}$$

und durch Zerlegung

$$\begin{aligned} x &= 0 ; & x^{n-1} &= 0 \\ x - a &= 0 ; & x - a &= 0 \end{aligned}$$

und daraus in beiden Fällen

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= a. \end{aligned}$$

Man kann hieraus ersehen, dass, wenn irgend eine Potenz von x gemeinschaftlicher Faktor sämtlicher Glieder einer annullierten Gleichung ist, ein Wert von x immer $= 0$ ist. Die andern Werte findet man dann durch Zerlegung. Auch eine Gleichung von der Form

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) \dots = 0$$

kann man auf einfache $G(x)$ zurückführen und demnach lösen. Denn es muss offenbar sein

$$\begin{array}{ll} x - a = 0, & \text{demnach } x_1 = a \\ x - b = 0 & x_2 = b \\ x - c = 0 & x_3 = c \\ x - d = 0 & x_4 = d \\ \text{u. s. w.} & \text{u. s. w.} \end{array}$$

Die Richtigkeit der Lösung beruht darauf, dass ein Produkt 0 wird, wenn einer seiner Faktoren 0 ist.

Anmerkung. Man merke hierbei, dass der Grundsatz V_4 Gleiches durch Gleiches dividiert giebt Gleiches nicht etwa von 0 gilt. Denkt man hieran nicht, so kann man durch Anwendung richtiger Gesetze

zu ganz falschen Ergebnissen kommen, z. B. beweisen, dass $3 = 2$ ist. Man setze:

$$\begin{array}{rcl}
 a & = & b \\
 2a & = & 2a \text{ (Gr. I)} \\
 \hline
 3a & = & 2a + b \text{ (Gr. V}_1\text{)} \\
 3b & = & 3b \text{ (Gr. I)} \\
 \hline
 3a - 3b & = & 2a - 2b \text{ (Gr. V}_2\text{)} \\
 \text{oder } 3(a - b) & = & 2(a - b) \\
 a - b & = & a - b \text{ (Gr. I)} \\
 \hline
 3 & = & 2 \text{ (Gr. V}_4\text{)}.
 \end{array}$$

Der Fehler beruht in dem letzten Schlusse. Es ist nach der ersten Annahme $a - b = 0$, also ist durch $0 = 0$ dividiert worden, wovor man sich hüten muss. Man darf deshalb eine Gleichung nicht durch x oder $x \pm a$ dividieren.

3. Eingekleidete Gleichungen.

§ 170.

Eingekleidete Gleichungen oder „Textaufgaben“ sind in Worten gestellte Aufgaben*), bei denen man sich die auszurechnende Gleichung erst herstellen muss. Die aufzustellende Gleichung ist also gewissermassen in Worte eingekleidet. Man hat demnach die in dem Wortlaut enthaltenen Angaben in die arithmetische Sprache so zu übersetzen, dass eine Bestimmungsgleichung, der Ansatz, entsteht. Dieser muss oft mit Scharfsinn gesucht werden. Allgemein gültige Regeln lassen sich nicht dafür geben. Gewöhnlich bezeichnet man die Grösse, nach welcher gefragt wird, mit x (bei Gleichungen mit mehreren Unbekannten mit $x, y, z \dots$), und verbindet dann x gemäss den Bedingungen der Aufgabe mit den gegebenen Grössen. Zuweilen ist es besser, nicht die Grösse, nach welcher gefragt wird, sondern eine andere geeignete mit x zu bezeichnen und daraus schliesslich die gesuchte Grösse zu berechnen. Es kommt in den meisten Fällen darauf an, eine geeignete Grösse auf zwei verschiedene Arten auszudrücken und beide durch das Gleichheitszeichen zu verbinden. Deshalb untersuche man von vornherein, welche Grösse sich doppelt ausdrücken lässt.

4. Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren Unbekannten. $G(x, y, z \dots)$

§ 171.

Die Normalform der Gleichung mit 2 Unbekannten vom ersten Grade $G(x, y)$ ist:

*) Derartige Aufgaben durch Gleichungen zu lösen, wurde schon im Altertum, besonders von Diophantos von Alexandria (ca. 360 n. Chr.) gelehrt.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f. \end{cases}$$

Beide Gleichungen gehören zusammen zu einer Aufgabe, was durch das { Zeichen angedeutet wird. Eine Gleichung mit 2 Unbekannten giebt keine bestimmte Lösung.

$$\begin{array}{lcl} \text{Z. B.} & x - y & = 10 \\ & x = 13, & 40 \dots\dots \\ & y = 3, & 30 \dots\dots \end{array}$$

Man nennt solche Aufgaben unbestimmt. Die beiden zu einer bestimmten Lösung notwendigen Gleichungen müssen voneinander unabhängig sein, die eine darf nicht etwa durch Multiplikation oder Division u. s. w. aus der andern hervorgehen.

$$\text{Z. B.} \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

würde keine bestimmte Lösung geben.

Anmerkung: Aufgaben, welche weniger Gleichungen ergeben als Unbekannte, nennt man, wenn nur absolute ganze Zahlen als Lösung vorkommen können, diophantische Gleichungen, da sich der schon erwähnte griechische Mathematiker Diophantos zuerst mit ihrer Lösung beschäftigt hat.

$$G(x, y).$$

§ 172.

Gleichungen mit 2 Unbekannten löst man dadurch, dass man eine der Unbekannten eliminiert*), wodurch dann eine Gleichung mit einer Unbekannten entsteht.

$$\begin{array}{lcl} \text{Z. B.} & \begin{cases} \text{I. } 5x - y = 3 \\ \text{II. } 7x + y = 21 \end{cases} & \\ & \hline & 12x \quad = 24 \quad (\text{Gr. } V_1) \\ & & x \quad = 2. \end{array}$$

Die zweite Unbekannte findet man dann meistens dadurch, dass man den für die erste gefundenen Wert in eine der gegebenen Gleichungen einsetzt.

Z. B. in I. giebt

$$\begin{array}{l} 10 - y = 3 \\ y = 7. \end{array}$$

Bei der Probe muss man die Unbekannten in beide gegebenen Gleichungen einsetzen.

$$\begin{array}{lcl} \text{Z. B.} & \text{I. } 10 - 7 & = 3 \\ & \text{II. } 14 + 7 & = 21. \end{array}$$

*) Aus dem Lateinischen; heisst „entfernen“.

§ 173.

Für die Elimination der einen Unbekannten kommen drei Methoden in Betracht:

- 1) die Einsetzungsmethode (Substitutionsmethode),
- 2) die Gleichsetzungsmethode (Kombinationsmethode),
- 3) die Additions- und Subtraktionsmethode, welche am häufigsten angewendet wird.

1. Die Einsetzungsmethode besteht darin, dass man den Wert für eine Unbekannte aus der einen Gleichung bestimmt, indem man vorläufig die andere Unbekannte als bekannt ansieht, und diesen Wert in die andere Gleichung einsetzt.

Man wird hierbei praktischerweise meistens zuerst diejenige Unbekannte wählen, welche die kleineren Koeffizienten hat.

$$\begin{array}{l} \text{Z. B.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I. } 33x - 5y = 74 \\ \text{II. } 7x + 2y = 31 \end{array} \right. \\ \hline \text{Aus II. } y = \frac{31 - 7x}{2} \\ \text{In I. } 33x - \frac{5(31 - 7x)}{2} = 74 \\ \quad 66x - 155 + 35x = 148 \\ \quad 101x = 303 \\ \quad x = 3 \\ \quad y = \frac{31 - 21}{2} = 5. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Allgemein: } \left\{ \begin{array}{l} \text{I. } ax + by = c \\ \text{II. } dx + ey = f \end{array} \right. \\ \hline \text{Aus I. } x = \frac{c - by}{a} \\ \text{In II. } \frac{cd - bdy}{a} + ey = f \end{array}$$

u. s. w.

2. Die Gleichsetzungsmethode besteht darin, dass man dieselbe Unbekannte aus beiden Gleichungen bestimmt, indem man vorläufig die andere Unbekannte als bekannt ansieht, und die erhaltenen Werte einander gleich setzt.

$$\begin{array}{l} \text{Z. B.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I. } 2x + 5y = 20 \\ \text{II. } 3x - 2y = 11 \end{array} \right. \\ \hline \text{Aus I. } x = \frac{20 - 5y}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Aus II. } x & = & \frac{11 + 2y}{3} \\
 \hline
 \frac{20 - 5y}{2} & = & \frac{11 + 2y}{3} \\
 60 - 15y & = & 22 + 4y \\
 38 & = & 19y \\
 y & = & 2 \\
 x & = & \frac{20 - 10}{2} = 5.
 \end{array}$$

Allgemein: I. $ax + by = c$
 II. $dx + ey = f$

$$\text{Aus I. } y = \frac{c - ax}{b}$$

$$\text{Aus II. } y = \frac{f - dx}{e}$$

$$\frac{c - ax}{b} = \frac{f - dx}{e}$$

u. s. w.

3. Die Additions- und Subtraktionsmethode besteht darin, dass man durch Multiplikation einer oder beider Gleichungen mit möglichst kleinen geeigneten Faktoren die Koeffizienten einer und derselben Unbekannten in beiden Gleichungen gleich macht und dann die Gleichungen entweder addiert oder subtrahiert, so dass die eine Unbekannte fortfällt.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Z. B.} & \left\{ \begin{array}{l} \text{I. } 3x + 7y = 33 \\ \text{II. } 2x - 5y = -7 \end{array} \right. \\
 \hline
 \text{I. 2 giebt} & 6x + 14y = 66 \\
 \text{II. 3 giebt} & 6x - 15y = -21 \\
 \hline
 & 29y = 87 \\
 & y = 3.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{In I. } 3x + 21 & = & 33 \\
 3x & = & 12 \\
 x & = & 4.
 \end{array}$$

Allgemein: I. $ax + by = c$
 II. $dx + ey = f$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{I. } d \text{ giebt} & adx + bdy = cd \\
 \text{II. } a \text{ giebt} & adx + aey = af \\
 \hline
 & bdy - aey = cd - af \text{ u. s. w.}
 \end{array}$$

Man merke aus

$$\begin{array}{r} x + y = a \\ x - y = b \\ \hline x = \frac{a + b}{2} \\ y = \frac{a - b}{2}. \end{array}$$

Z. B.

$$\begin{array}{r} x + y = 20 \\ x - y = 4 \\ \hline x = 12 \\ y = 8. \end{array}$$

Im allgemeinen wird man verwickelte Gleichungen zuerst auf die Normalform bringen. Zuweilen muss man aber anders verfahren.

Z. B.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{I. } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = c \\ \text{II. } \frac{d}{x} + \frac{e}{y} = f. \end{array} \right.$$

Hier sieht man nicht x und y , sondern $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$ zunächst als Unbekannte an.

$$\begin{array}{r} \text{I. } d \text{ giebt } \frac{ad}{x} + \frac{bd}{y} = cd \\ \text{II. } a \text{ giebt } \frac{ad}{x} + \frac{ae}{y} = af \\ \hline \frac{bd - ae}{y} = cd - af \text{ u. s. w.} \end{array}$$

§ 174. Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten.

Sind 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten gegeben, so stellt man zunächst durch Eliminieren einer und derselben Unbekannten 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten her, wobei man wieder praktischerweise mit denjenigen Unbekannten beginnt, welche die kleinsten Koeffizienten haben. Ebenso bildet man aus n Gleichungen mit n Unbekannten zunächst $n - 1$ Gleichungen mit $n - 1$ Unbekannten, dann $n - 2$ Gleichungen mit $n - 2$ Unbekannten u. s. w.

5. Gleichungen vom zweiten Grade. (Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.) $G(x^2)$.

§ 175.

Eine Gleichung vom zweiten Grade oder eine quadratische Gleichung ist eine solche, in welcher die höchste Potenz der Unbekannten das Quadrat ist.

Z. B. $x^2 = 25$
oder $x^2 + 2x = 15$.

Die quadratischen Gleichungen teilt man ein in rein quadratische, in denen nur das Quadrat der Unbekannten vorkommt, Normalform: $x^2 = a$, und vollständige oder gemischt quadratische, in denen das Quadrat und die erste Potenz der Unbekannten vorkommen, Normalform:

$$x^2 + ax = b.$$

§ 176.

Rein quadratische Gleichungen löst man nach Gr. V₆, indem man aus beiden Seiten die Quadratwurzel zieht.

Man muss hierbei beachten, dass man zwei Lösungen erhält, die man die beiden Wurzeln der Gleichung nennt. Von diesen ist die eine positiv und die andere negativ. Grund: das Quadrat auch von negativen Grössen ist positiv.

Z. B. $x^2 = 49$
 $x_1 = + 7$
 $x_2 = - 7$

oder abgekürzt geschrieben

$$x = \pm 7.$$

Probe: $(+ 7)^2 = 49$
 $(- 7)^2 = 49.$

Allgemein: 1. $x^2 = a^2$
 $x = \pm a$
2. $x^2 = a$
 $x_1 = + \sqrt{a}$
 $x_2 = - \sqrt{a}$

oder abgekürzt geschrieben

$$x = \sqrt{a}.$$

Man lässt vor dem Quadratwurzelzeichen am Anfang das $\pm$ fort, weil man immer beachten muss, dass Wurzeln mit geradem Wurzelexponenten das Vorzeichen $+$ oder $-$ haben können (vgl. § 143).

§ 177. Gemischt quadratische Gleichungen.

Normalform: $x^2 + ax = b$.

Die auf die Normalform gebrachte gemischt quadratische Gleichung löst man durch die Ergänzung der linken Seite zum Quadrat, indem man auf beiden Seiten das Quadrat des halben Koeffizienten von x addiert. Das Quadrat des halben Koeffizienten von x nennt man die quadratische Ergänzung.

Es kommen hierbei folgende vier Fälle hauptsächlich in Betracht:

1. Der Koeffizient von x ist durch 2 teilbar:

$$\begin{aligned} \text{Z. B.} \quad & x^2 + 10x = 96 \\ & 5^2 = 25 \text{ (Gr. I)} \\ & \hline & x^2 + 10x + 25 = 121 \text{ (Gr. V}_1\text{)} \\ & x + 5 = \pm 11 \text{ (Gr. V}_6\text{)} \\ & x = -5 \pm 11 \\ & x_1 = 6 \\ & x_2 = -16. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Allgemein:} \quad & x^2 + 2ax = b \\ & a^2 = a^2 \\ & \hline & x^2 + 2ax + a^2 = a^2 + b \\ & x + a = \sqrt{a^2 + b} \\ & x = -a \pm \sqrt{a^2 + b}. \end{aligned}$$

2. Der Koeffizient von x ist nicht durch 2 teilbar.

$$\begin{aligned} \text{Z. B.} \quad & x^2 + 11x = -30 \\ & \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \frac{121}{4} \\ & \hline & x^2 + 11x + \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \\ & \hline & x + \frac{11}{2} = \pm \frac{1}{2} \\ & x = -\frac{11}{2} \pm \frac{1}{2} \\ & x_1 = -5 \\ & x_2 = -6. \end{aligned}$$

$$\text{Allgemein: } x^2 + ax = b$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + b$$

$$x + \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}.$$

In Worten: In der quadratischen Gleichung von der Form $x^2 + ax = b$ ist die Unbekannte gleich dem halben Koeffizienten von x mit entgegengesetztem Vorzeichen vermehrt oder vermindert um die Quadratwurzel aus dem Quadrate dieses halben Koeffizienten vermehrt um das bekannte Glied.

Die Lösung $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$ zieht man oft noch zusammen in $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$.

3. Der Koeffizient von x ist ein Bruch mit geradem Zähler.

Z. B.

$$x^2 + \frac{4}{15}x = \frac{3}{15}$$

$$\left(\frac{2}{15}\right)^2 = \frac{4}{225}$$

$$x^2 + \frac{4}{15}x + \left(\frac{2}{15}\right)^2 = \frac{49}{225}$$

$$x + \frac{2}{15} = \pm \frac{7}{15}$$

$$x = -\frac{2}{15} \pm \frac{7}{15}$$

$$x_1 = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = -\frac{3}{5}.$$

Allgemein:

$$x^2 + \frac{2a}{n}x = \frac{b}{n}$$

$$\left(\frac{a}{n}\right)^2 = \frac{a^2}{n^2}$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 + \frac{2a}{n}x + \left(\frac{a}{n}\right)^2 = \frac{a^2 + nb}{n^2} \\
 \hline
 x + \frac{a}{n} = \frac{\sqrt{a^2 + nb}}{n} \\
 x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + nb}}{n}.
 \end{array}$$

4. Der Koeffizient von x ist ein Bruch mit ungeradem Zähler.

Z. B.

$$\begin{array}{r}
 x^2 + \frac{11}{35}x = \frac{6}{35} \\
 \left(\frac{11}{70}\right)^2 = \frac{121}{4900} \\
 \hline
 x^2 + \frac{11}{35}x + \left(\frac{11}{70}\right)^2 = \frac{961}{4900} \\
 \hline
 x + \frac{11}{70} = \pm \frac{31}{70} \\
 x = \frac{-11 \pm 31}{70} \\
 x_1 = \frac{2}{7} \\
 x_2 = -\frac{3}{5}.
 \end{array}$$

Allgemein:

$$\begin{array}{r}
 x^2 + \frac{a}{n}x = \frac{b}{n} \\
 \left(\frac{a}{2n}\right)^2 = \frac{a^2}{4n^2} \\
 \hline
 x^2 + \frac{a}{n}x + \left(\frac{a}{2n}\right)^2 = \frac{a^2 + 4nb}{4n^2} \\
 \hline
 x + \frac{a}{2n} = \frac{\sqrt{a^2 + 4nb}}{2n} \\
 x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4nb}}{2n}.
 \end{array}$$

Man thut gut, wenn man viele Aufgaben zu rechnen hat, die 4 oben entwickelten Fälle sich zu merken. Also:

1. Für $x^2 + 2ax = b$ ist $x = -a \pm \sqrt{a^2 + b}$.

2. Für $x^2 + ax = b$ ist $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$

oder $= \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$

$$3. \text{ Für } x^2 + \frac{2a}{n}x = \frac{b}{n} \text{ ist } x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + nb}}{n}.$$

$$4. \text{ Für } x^2 + \frac{a}{n}x = \frac{b}{n} \text{ ist } x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4nb}}{2n}.$$

Man kann aber in allen Fällen durch die quadratische Ergänzung ohne jede Formel die $G(x^2)$ lösen.

§ 178.

In jeder auf 0 gebrachten quadratischen Gleichung mit einer Unbekannten von der Form $x^2 \pm ax \pm b = 0$ ist die Summe der beiden Wurzeln gleich dem Koeffizienten des zweiten Gliedes mit entgegengesetztem Vorzeichen und ihr Produkt gleich dem bekannten Gliede.

Es ist demnach in der allgemeinsten Normalform $x^2 + ax = b$ oder

$$x^2 + ax - b = 0.$$

$$x_1 + x_2 = -a$$

$$x_1 \cdot x_2 = -b.$$

Beweis: Nach vorigem Paragraphen Formel 2 sind die beiden Wurzeln:

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$$

$$x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$$

$$x_1 + x_2 = -a \text{ (Gr. V}_1\text{)}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} + b\right) \text{ (Gr. V}_3\text{)} = -b.$$

Z. B.

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$x = -1 \pm 4$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -5$$

$$x_1 + x_2 = -2$$

$$x_1 \cdot x_2 = -15.$$

Anmerkung. Dieser Satz wird benutzt, um sich in leichter Weise ohne Einsetzung der Wurzeln von der Richtigkeit der Lösung der $G(x^2)$ von der Normalform an zu überzeugen. Auch kann man durch ihn leicht $G(x^2)$ bilden. Denkt man sich z. B. als Wurzeln einer $G(x^2) + 9$ und -3 , so lautet die zugehörige Gleichung:

$$x^2 - 6x - 27 = 0.$$

Allgemein: Sind die Wurzeln einer $G(x^2)$ m und n , so lautet die zugehörige Gleichung:

$$x^2 - (m + n)x + mn = 0.$$

§ 179.

Die linke Seite der auf 0 gebrachten $G(x^2)$ lässt sich als das Produkt zweier Faktoren darstellen, von denen jeder die Differenz ist zwischen der Unbekannten und einer Wurzel.

$$\begin{aligned} \text{Z. B.} \quad x^2 - (a + b)x + ab &= 0 \\ x^2 - ax - bx + ab &= 0 \\ (x - a)(x - b) &= 0. \end{aligned}$$

Die Wurzeln sind a und b .

Es lässt sich demnach jede $G(x^2)$ in 2 $G(x)$ zerlegen.

$$\begin{aligned} \text{Z. B.} \quad x^2 - 17x + 72 &= 0 \\ (x - 9)(x - 8) &= 0 \\ x - 9 &= 0 \\ x - 8 &= 0 \\ x_1 &= 9 \\ x_2 &= 8. \end{aligned}$$

Kann man, wie im obigen Beispiele, leicht erkennen, dass sich die linke Seite der annullierten $G(x^2)$ in 2 Faktoren von der Form $x \pm a$ zerlegen lässt (vgl. § 106), so erhält man direkt die Lösungen. Ist nämlich $(x \pm a) \cdot (x \mp b) = 0$, so sind die Wurzeln

$$\begin{aligned} x_1 &= \mp a \\ x_2 &= \pm b. \end{aligned}$$

Ist z. B.

$$x^2 + 15x - 100 = 0,$$

so sieht man leicht

$$\begin{aligned} (x - 5)(x + 20) &= 0 \\ x_1 &= 5 \\ x_2 &= -20. \end{aligned}$$

Aus obigem erkennt man: Ist die eine Wurzel einer $G(x^2) = a$, so ist die Gleichung durch $x - a$ teilbar.

Zuweilen kann man die eine Wurzel einer $G(x^2)$ ohne weitere Berechnung erkennen. Dann findet man leicht die andere, indem man die linke Seite der annullierten Gleichung durch x minus dieser Wurzel teilt.

§ 181.

Bei manchen Gleichungen ist es zweckmässig, nicht die Unbekannte unmittelbar zu suchen, sondern zunächst einen zusammengesetzten Ausdruck, in dem dieselbe vorkommt.

$$\text{Z. B.} \quad (9x + 2)^2 - 3(9x + 2) = 754.$$

Man setzt hier $9x + 2 = t$ und löst zunächst

$$t^2 - 3t = 754$$

$$t = \frac{3 \pm 55}{2}$$

$$t_1 = 29$$

$$t_2 = -26.$$

Daraus erhält man

$$9x_1 + 2 = 29$$

$$9x_2 + 2 = -26$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -3\frac{1}{9}.$$

Zusatz. Durch Einführung einer neuen Unbekannten gelingt es auch oft, Gleichungen höheren Grades auf $G(x^2)$ oder $G(x)$ zurückzuführen.

Die Gleichungen zweiten Grades mit mehreren Unbekannten löst man meistens durch die Einsetzungsmethode.

XI. Progressionen oder Reihen.

§ 181.

Unter Progression*) oder Reihe versteht man in der Algebra jede gesetzmässige Aufeinanderfolge von Grössen.

Z. B. ist unsere Zahlenreihe 1, 2, 3, 4 . . u. s. w. eine solche, da jede Grösse um 1 grösser ist als die vorhergehende. Ebenso ist 1, 2, 4, 8 eine Reihe, da jede Grösse zweimal so gross ist, wie die vorhergehende.

Die einzelnen Grössen heissen die Glieder der Reihe.

§ 182.

Wir unterscheiden 2 Hauptarten von Reihen:

1. arithmetische oder Differenzreihen,
2. geometrische oder Quotientenreihen.

1. Eine arithmetische Reihe ist eine solche, bei der die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder dieselbe (konstant) ist; jedes folgende Glied entsteht bei ihr durch Addition derselben Grösse zu dem vorhergehenden.

Z. B. unsere Zahlenreihe, oder

$$\begin{array}{cccc} 9; & 12; & 15; & 18 \dots\dots \\ + 2; & - 1; & - 4; & - 7 \dots\dots \end{array}$$

Allgemein: $a; a + d; a + 2d; a + 3d; \dots$

*) Aus dem Lateinischen; bedeutet soviel wie „Fortschreitung“. Mit den Progressionen haben sich schon die Pythagoreer beschäftigt.

2. Eine geometrische Reihe ist eine solche, bei welcher der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder derselbe (konstant) ist; jedes folgende Glied entsteht bei ihr aus dem vorhergehenden durch Multiplikation desselben mit derselben Grösse.

Z. B. 5; 10; 20; 40
 oder + 9; — 6; + 4; — $\frac{8}{3}$
 Allgemein: a ; $a \cdot q$; $a \cdot q^2$; $a \cdot q^3$;

Arithmetische Reihen.

§ 183.

Man bezeichnet das erste Glied einer arithmetischen Reihe (Anfangsglied) mit a , die konstante Differenz je zweier aufeinanderfolgender Glieder mit d , die Anzahl der Glieder mit n , das letzte Glied (Endglied) mit t und die Summe aller Glieder mit s .

Z. B. Reihe: 5, 7, 9, 11.

$$a = 5; \quad d = 2; \quad n = 4; \quad t = 11; \quad s = 32.$$

Allgemeiner Ausdruck einer arithmetischen Reihe:

$$\begin{array}{ccccccc} a; & a + d; & a + 2d; & \dots & a + (n - 1)d. \\ \text{1. Glied,} & \text{2. Glied,} & \text{3. Glied,} & \dots & \text{n. Glied.} \end{array}$$

§ 184.

In einer arithmetischen Reihe von n Gliedern ist nach vorigem §:

$$\text{Formel I:} \quad t = a + (n - 1)d.$$

In Worten: Das letzte Glied einer arithmetischen Reihe ist gleich der Summe aus dem ersten Gliede und der mit der Differenz multiplizierten um 1 verminderten Gliederanzahl.

§ 185.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Bestimmung der Summe aller n Glieder der Reihe. Es ist nach der Erklärung:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \text{drittletztes} & \text{vorletztes} & \text{letztes} \\ & & & & \text{Glied,} & \text{Glied,} & \text{Glied.} \\ \text{1. Glied,} & \text{2. Glied,} & \text{3. Glied,} & & & & \\ s = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (t - 2d) + (t - d) + t. \end{array}$$

Man denkt sich nun die Reihe umgekehrt entwickelt und addiert. Also

$$\begin{array}{l} s = t + (t - d) + (t - 2d) + \dots + (a + 2d) + (a + d) + a \\ 2s = (a + t) + (a + t) + (a + t) + \dots + (a + t) + (a + t) + (a + t) \text{ (Gr. V}_1\text{)}. \end{array}$$

Es sind nun offenbar n Glieder $(a + t)$ entstanden; es ist also

$$2s = (a + t)n, \text{ oder}$$

$$\text{Formel II: } s = (a + t) \cdot \frac{n}{2} \text{ oder } = \frac{a + t}{2} \cdot n.$$

In Worten: Die Summe aller Glieder einer arithmetischen Reihe ist gleich dem arithmetischen Mittel aus dem ersten und letzten Gliede multipliziert mit der Anzahl der Glieder.

Setzt man in diese Formel den Wert für t aus Formel 1 ein, so erhält man als Nebenformel für s :

$$\text{Formel III: } s = [2a + (n - 1)d] \cdot \frac{n}{2}.$$

§ 186.

Mit Hilfe der drei entwickelten Formeln lassen sich alle Aufgaben aus den arithmetischen Reihen lösen. Es handelt sich dabei immer darum, aus 3 der 5 Grössen a, d, n, t, s die übrigen 2 zu finden. In der folgenden Tabelle sind die möglichen Fälle aufgeführt. Praktischen Wert hat die Tabelle nicht; es ist jedoch für den Schüler eine treffliche Übung, die angegebenen Formeln zu entwickeln.

N ^o	Gegeben	Gesucht	Formel
1	$a; d; n$	t	$t = a + (n - 1)d$
2	$a; d; s$		$t = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{2ds + \left(a - \frac{d}{2}\right)^2}$
3	$a; n; s$		$t = \frac{2s}{n} - a$
4	$d; n; s$		$t = \frac{s}{n} + \frac{(n - 1)d}{2}$
5	$a; d; n$	s	$s = an + \frac{n(n - 1)d}{2}$
6	$a; d; t$		$s = \frac{a + t}{2} + \frac{t^2 - a^2}{2d}$
7	$a; n; t$		$s = (a + t) \frac{n}{2}$
8	$d; n; t$		$s = \frac{n}{2} [2t - (n - 1)d]$

N ^o	Gegeben	Gesucht	Formel
9	$a; n; t$	d	$d = \frac{t - a}{n - 1}$
10	$a; n; s$		$d = \frac{2s - 2an}{n(n - 1)}$
11	$a; t; s$		$d = \frac{t^2 - a^2}{2s - t - a}$
12	$n; t; s$		$d = \frac{2nt - 2s}{n(n - 1)}$
13	$a; d; t$	n	$n = 1 + \frac{t - a}{d}$
14	$a; d; s$		$n = \frac{d - 2a}{2d} \pm \sqrt{\left[\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a - d}{2d}\right)^2\right]}$
15	$a; t; s$		$n = \frac{2s}{a + t}$
16	$d; t; s$		$n = \frac{2t + d}{2d} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{2t + d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}\right]}$
17	$d; n; t$	a	$a = t - (n - 1)d$
18	$d; n; s$		$a = \frac{s}{n} - \frac{(n - 1)d}{2}$
19	$d; t; s$		$a = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{\left[\left(t + \frac{d}{2}\right)^2 - 2ds\right]}$
20	$n; t; s$		$a = \frac{2s}{n} - t$

Geometrische Reihen.

§ 187.

Bei den geometrischen Reihen bezeichnet man den konstanten Quotienten zweier aufeinanderfolgender Glieder mit q . Die übrigen Bezeichnungen sind dieselben wie bei den arithmetischen Reihen.

Z. B. Reihe 5; 10; 20; 40; 80; 160

$a = 5; q = 2; n = 6; t = 160; s = 315.$

Allgemeiner Ausdruck einer geometrischen Reihe:

$a;$ $aq;$ $aq^2;$ $aq^3; \dots \dots \dots aq^{n-1}$
 1. Glied, 2. Glied, 3. Glied, 4. Glied, n . Glied.

§ 188.

In einer geometrischen Reihe von n Gliedern ist nach vorigem § Formel I:

$$t = a q^{n-1}.$$

In Worten: Das letzte Glied einer geometrischen Reihe ist gleich dem Produkte aus dem ersten Gliede und dem mit der um 1 verminderten Gliederanzahl potenzierten Quotienten.

§ 189.

Besonders wichtig ist auch hier die Bestimmung der Summe aller n Glieder der Reihe. Es ist nach der Erklärung:

$$s = a + a q + a q^2 + \dots + a q^{n-1}.$$

Multipliziert man mit q , so kommt:

$$q s = a \cdot q + a q^2 + a q^3 + \dots + a q^n.$$

Subtrahiert man von dieser zweiten Gleichung die erste, so sieht man leicht, dass die Glieder zwischen a und $a q^n$ sämtlich fortfallen (z. B. vorletztes Glied der zweiten Gleichung würde $a q^{n-1}$ sein). Man erhält:

$$\begin{aligned} q s - s &= a q^n - a \quad (\text{Gr. V}_2) \\ s(q - 1) &= a(q^n - 1) \end{aligned}$$

$$\text{Formel II: } s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Denkt man sich diese Formel in der Form $s = \frac{a q^{n-1} \cdot q - a}{q - 1}$ geschrieben und setzt $a q^{n-1} = t$ gemäss Formel I, so erhält man als Nebenformel für s :

$$\text{Formel III: } s = \frac{q t - a}{q - 1}.$$

In Worten: Die Summe aller Glieder einer geometrischen Reihe ist gleich dem Produkte aus dem Quotienten der Reihe und dem letzten Gliede weniger dem Anfangsglied dividiert durch den um 1 verminderten Quotienten.

§ 190.

Ebenso wie bei den arithmetischen Reihen lassen sich mit Hilfe der drei entwickelten Formeln alle Aufgaben aus den geometrischen Reihen lösen. Auch hier ersieht man aus der folgenden Tabelle die möglichen Fälle.

N ^o	Gegeben	Gesucht	Formel
1	$a; q; n$	t	$t = a q^{n-1}$
2	$a; q; s$		$t = \frac{a + (q - 1)s}{q}$
3	$a; n; s$		$t (s - t)^{n-1} - a (s - a)^{n-1} = 0$
4	$q; n; s$		$t = \frac{(q - 1) s q^{n-1}}{q^n - 1}$
5	$a; q; n$	s	$s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$
6	$a; q; t$		$s = \frac{qt - a}{q - 1}$
7	$a; n; t$		$s = \frac{t^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{\frac{1}{t^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}}}$
8	$q; n; t$		$s = \frac{t (q^n - 1)}{(q - 1) q^{n-1}}$
9	$q; n; t$	a	$a = \frac{t}{q^{n-1}}$
10	$q; n; s$		$a = \frac{(q - 1)s}{q^n - 1}$
11	$q; t; s$		$a = qt - (q - 1)s$
12	$n; t; s$		$a (s - a)^{n-1} - t (s - t)^{n-1} = 0$
13	$a; n; t$	q	$q = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$
14	$a; n; s$		$q^n - \frac{s}{a} \cdot q + \frac{s - a}{a} = 0$
15	$a; t; s$		$q = \frac{s - a}{s - t}$
16	$n; t; s$		$q^n - \frac{s}{s - t} \cdot q^{n-1} + \frac{t}{s - t} = 0$
17	$a; q; t$	n	$n = \frac{\log t - \log a}{\log q} + 1$
18	$a; q; s$		$n = \frac{\log [a + (q - 1)s] - \log a}{\log q}$
19	$a; t; s$		$n = \frac{\log t - \log a}{\log (s - a) - \log (s - t)} + 1$
20	$q; t; s$		$n = \frac{\log t - \log [qt - (q - 1)s]}{\log q} + 1$

§ 191. Unendliche Reihen.

In der Mathematik haben in manchen Fällen solche Reihen Interesse, deren Gliederzahl n unendlich gross ist, die aber doch einen bestimmten endlichen Wert haben.

$$\text{Z. B. } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots \infty$$

Grenzwert 1!

Man nennt Reihen von unendlich vielen Gliedern unendliche Reihen ($n = \infty$). Von besonderem Interesse ist dabei die Bestimmung der Summe.

Nach Formel III ist

$$s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Ist hierin $n = \infty$, so ist

$$s = a \cdot \frac{q^\infty - 1}{q - 1}.$$

Ist hierbei $q > 1$, so wird q^∞ unendlich gross, dadurch auch s . Dasselbe entzieht sich dann unserer Berechnung.

Ist aber q ein echter Bruch, also $q < 1$, z. B. $= \frac{1}{2}$, so wird $q^\infty = 0$. Z. B. $\left(\frac{1}{2}\right)^\infty = \frac{1}{2^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$ (§ 98₄).

Es folgt hieraus für die unendlichen Reihen, in denen $q < 1$ ist,

$$s = a \cdot \frac{-1}{q - 1},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner mit -1 multipliziert,

$$\text{Formel IV: } s = \frac{a}{1 - q}.$$

In der oben angeführten Reihe ist

$$a = \frac{1}{2} \quad \text{und ebenso} \quad q = \frac{1}{2};$$

man erhält demnach

$$s = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

XII. Zinseszins- und Rentenrechnung.

§ 192.

Die Zinseszinsrechnung ist die Lehre von den Zinseszinsen. Unter diesen versteht man die Zinsen*) von den Zinsen eines Kapitals.*)

Die Rentenrechnung ist die Lehre von der Rente.*) Unter Rente versteht man in der Arithmetik ein festes Einkommen, welches aus einem Kapital auf Grundlage der Zinseszinsrechnung unter Aufzehrung des Kapitals sich ergibt.

§ 193.

Aus der einfachen Zinsrechnung ist zu merken:

$$Z = \frac{K \cdot P}{100},$$

wobei Z die jährlichen Zinsen, K das Kapital und P den Zinsfuß bedeutet.

In Worten: Die jährlichen Zinsen sind gleich Kapital mal Zinsfuß geteilt durch 100.

Beweis: $P\%$ (Prozent) bedeutet:

Die jährlichen Zinsen von 100 $\mathcal{M}$ Kapital sind $= P \mathcal{M}$

die	"	"	"	1 $\mathcal{M}$	"	"	$= \frac{P}{100} \mathcal{M}$
-----	---	---	---	-----------------	---	---	-------------------------------

"	"	"	"	$K \mathcal{M}$	"	"	$= \frac{K \cdot P}{100} \mathcal{M}$
---	---	---	---	-----------------	---	---	---------------------------------------

Z. B. 5000 zu 4% :

Die jährl. Zins. v. 100 $\mathcal{M}$ Kapital sind $= 4 \mathcal{M}$

die	"	"	"	1 $\mathcal{M}$	"	"	$= \frac{4}{100} \mathcal{M}$
-----	---	---	---	-----------------	---	---	-------------------------------

"	"	"	"	5000 $\mathcal{M}$	"	"	$= \frac{5000 \cdot 4}{100} \mathcal{M} = 200 \mathcal{M}$
---	---	---	---	--------------------	---	---	--

Aus $Z = \frac{K \cdot P}{100}$ ergeben sich unmittelbar die Nebenformeln

$$K = \frac{100 Z}{P} \text{ und } P = \frac{100 Z}{K}.$$

§ 194.

Nach der einfachen Zinsrechnung wächst ein Anfangskapital a bei $P\%$ in einem Jahre an zu:

*) Die Ausdrücke Kapital und Zinsen stammen von den lateinischen Worten caput „Haupt“ und census „Schätzung“ her. Rente kommt von dem italienischen Worte rendita.

$$a + \frac{a \cdot P}{100} \quad \text{oder zu} \\ a \left(1 + \frac{P}{100} \right).$$

Diese Grösse $\left(1 + \frac{P}{100} \right)$ bezeichnet man in der Zinseszinsrechnung mit q und nennt sie den Zinsfaktor. Unter Zinsfaktor versteht man in der Zinseszinsrechnung die Grösse, mit der man ein gegebenes Kapital multiplizieren muss, um seinen Wert nebst den einmaligen Zinsen zu erhalten. Als Zeit gilt auch hier, wie in der einfachen Zinsrechnung, 1 Jahr, wenn nichts anderes besonders angegeben ist.

Formel I: $q = 1 + \frac{P}{100}.$

Z. B. Ist $P = 3; 4; 3\frac{1}{2}; 4\frac{3}{4}; 5,2; 3\frac{1}{3}; 4\frac{2}{3}$,
so ist $q = 1,03; 1,04; 1,035; 1,0475; 1,052; 1,0333; 1,0467$.

In den Fällen, bei denen der Dezimalbruch unendlich wird, wie z. B. $3\frac{1}{3}; 4\frac{2}{3}$, rechnet man auch wohl, um die Abrundung zu vermeiden,

$$q = 1 + \frac{10}{300} = \frac{31}{30}; \quad \frac{314}{300}.$$

Aus Formel I ergibt sich die Nebenformel:

$$P = 100 (q - 1).$$

Z. B. $q = 1,06$
 $P = 6\%.$

§ 195.

Die Hauptfrage in der Zinseszinsrechnung ist: Wozu wächst ein Kapital (Anfangskapital, a) an, wenn es zu gewissen Prozenten auf Zinseszinsen steht und die Zinsen in bestimmten Terminen zum Kapital gelegt und wieder mit verzinst werden?

Die Antwort giebt, wenn man das Endkapital mit b und die Anzahl der Termine (Jahre, wenn nichts anders angegeben ist) mit n bezeichnet, die

Formel II: $b = a \cdot q^n.$

In Worten: Das Endkapital ist gleich dem Anfangskapital mal der n ten Potenz des Zinsfaktors, wenn n die Anzahl der Zinstermine bedeutet.

Bew. Bezeichnet man die Endkapitalien nach 1; 2 Jahren mit $b_1; b_2 \dots$, so erhält man

Die Summe $r + rq + \dots + rq^{n-1}$ ist eine geometrische Reihe mit dem Anfangsgliede r , dem Quotienten q und der Anzahl der Glieder n . Demnach ist nach § 189

$$s = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1} \text{ und folglich}$$

$$b = aq^n \pm \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Anmerkung 1. Sind die geometrischen Reihen noch nicht durchgenommen, so setze man die Summe $r + rq + \dots + rq^{n-1}$ gleich einer beliebigen Zahl, z. B. $= s$. Man hat dann:

$$\begin{array}{r} s = r + rq + rq^2 + \dots + rq^{n-1} \\ q = q \quad (\text{Gr. I}) \\ \hline sq = \quad \quad rq + rq^2 + rq^3 + \dots + rq^{n-1} + rq^n \quad (\text{Gr. V}_3) \\ s = r + rq + rq^2 + rq^3 + \dots + rq^{n-1} \\ \hline sq - s = rq^n - r \quad (\text{Gr. V}_2) \\ s = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}. \end{array}$$

Anmerkung 2. Die Formeln der Zinseszinsrechnung finden auch bei anderen Dingen als Kapitalien Anwendung, z. B. bei der Bevölkerung eines Landes und bei dem Holzbestande eines Waldes.

Aus der Formel $b = aq^n \pm \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$ folgen unmittelbar die Nebenformeln:

$$\begin{aligned} a &= \frac{b(q - 1) \mp r(q^n - 1)}{q^n(q - 1)} \\ r &= \frac{(b - aq^n)(q - 1)}{q^n - 1} \text{ für } + \text{ oder } r = \frac{(aq^n - b)(q - 1)}{q^n - 1} \text{ für } - \\ n &= \log \frac{bP \pm 100r}{aP \pm 100r} : \log q. \end{aligned}$$

In der letzten Formel ist $\frac{P}{100}$ für $q - 1$ eingeführt worden.

§ 197. Formel der Kapital- und Lebensversicherung.

Zahlt man am Anfang jedes Jahres die Summe r , so wird aus Formel III, da $a = r$ ist und die letzte Zuzahlung fehlt,

$$\begin{aligned} b &= r q^n + \frac{r(q^n - 1)}{q - 1} - r \quad \text{oder} \\ b &= \frac{rq^{n+1} - rq^n + rq^n - r - rq + r}{q - 1} \quad \text{oder} \\ b &= \frac{rq^{n+1} - rq}{q - 1} \quad \text{oder} \end{aligned}$$

$$\text{Formel IV: } b = \frac{rq(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Hierin sind die üblichen Fälle der Kapital- und Lebensversicherung enthalten. Denn bei diesen wird meistens durch Einzahlung eines festen Beitrages am Anfang des Jahres ein verhältnismässig grosses Endkapital nach einer gewissen Anzahl von Jahren hervorgebracht. Bei der Kapitalversicherung steht die Anzahl der Jahre fest, bei der Lebensversicherung beruht sie auf Schätzung. r heisst hier die Prämie.

Man kann die Formel IV auch direkt analog dem Beweise der Formel III entwickeln.

Aus der Formel $b = \frac{rq(q^n - 1)}{q - 1}$ folgen unmittelbar die Nebenformeln:

$$r = \frac{b(q - 1)}{q(q^n - 1)} \quad \text{und}$$

$$n = \log \frac{bP + 100rq}{100rq} : \log q.$$

Wird die Prämie r am Ende jedes Jahres eingezahlt, so wird in $b = aq^n + \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$ die Grösse $a = 0$, da ein Anfangskapital ja nicht angelegt wird, und man erhält

$$b = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Setzt man hierin $q - 1 = \frac{P}{100}$, so erhält man:

$$b = \frac{100r}{P} (q^n - 1),$$

und daraus die Nebenformeln:

$$r = \frac{bP}{100(q^n - 1)} \quad \text{und}$$

$$n = \log \frac{bP + 100r}{100r} : \log q.$$

§ 198. Rentengleichung.

Wird bei jährlicher Auszahlung ein Kapital vollständig verbraucht, so wird in der Formel

$$b = aq^n - \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$b = 0, \text{ also } 0 = aq^n - \frac{r(q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{oder}$$

Formel V: $aq^n = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}.$

Diese Gleichung ist die Grundformel zur Renten- und Leibrentenrechnung, bei denen für ein Kapital a eine bestimmte Rente am Ende des Jahres bezahlt wird. Die jährlich fällige Rente nennt man auch wohl „Annuität“.*) Bei der Rentenrechnung steht die Anzahl der Jahre fest, bei der Leibrentenrechnung beruht sie auf Schätzung. a nennt man hierbei den baren Wert der Rente r .

Führt man wieder für $q - 1$ den Wert $\frac{P}{100}$ ein, so erhält man als oft übliche Form der Rentengleichung die Formel

$$a = \frac{100r}{P} (1 - q^{-n})$$

und daraus die Nebenformeln:

$$r = \frac{aPq^n}{100(q^n - 1)} \quad \text{und}$$

$$n = \log \frac{100r}{100r - aP} : \log q.$$

Wird die Rente nicht am Ende, sondern am Anfang jedes Jahres ausbezahlt, so ergibt sich nach Formel IV und V

$$aq^n = \frac{rq(q^n - 1)}{q - 1}$$

oder
$$a = \frac{100rq}{P} (1 - q^{-n})$$

und daraus die Nebenformeln:

$$r = \frac{aPq^{n-1}}{100(q^n - 1)} \quad \text{und}$$

$$n = \log \frac{100rq}{100rq - aP} : \log q.$$

XIII. Anhang.

§ 199. Die wichtigsten Formeln der Arithmetik.

(Der Schüler thut gut, bei jeder Formel sich zur Wiederholung den Wortlaut klar zu machen.)

1. $a + b = b + a.$

2. Wenn $m - s = d$, so ist $d + s = m.$

3. $a + (b - c) = a + b - c$

$a - (b - c) = a - b + c$

$a - a = 0$

$0 - (+b) = -b.$

*) Aus dem Neulateinischen; bedeutet „Jahresrente“.

4. $a \cdot b = b \cdot a.$
5. $a \cdot 1 = a.$
6. $a \cdot 0 = 0.$
7. $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b$ oder $= a \cdot (b \cdot c).$
8. $(+a) \cdot (+b) = +ab$
 $(-a) \cdot (-b) = +ab$
 $(+a) \cdot (-b) = -ab$
 $(-a) \cdot (+b) = -ab.$
9. $(a + b - c) \cdot x = ax + bx - cx.$
10. $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd.$
11. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
 $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
 $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
 $(a^2 - ab + b^2) \cdot (a + b) = a^3 + b^3$
 $(a^2 + ab + b^2) \cdot (a - b) = a^3 - b^3$
 $(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac +$
 $+ 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$
12. Wenn $D:d = Q$, so ist $Q \cdot d = D.$
13. $(+a):(+b) = +\frac{a}{b}$
 $(-a):(-b) = +\frac{a}{b}$
 $(+a):(-b) = -\frac{a}{b}$
 $(-a):(+b) = -\frac{a}{b}.$
14. $\frac{a}{a} = 1.$
15. $\frac{0}{a} = 0.$
16. $\frac{a}{0} = \infty.$
17. $\frac{a \cdot b}{c} = \frac{a}{c} \cdot b$ oder $= a \cdot \frac{b}{c}.$
18. $(a + b):c = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$
19. $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot x}{b \cdot x} = \frac{a:x}{b:x}.$
20. $\frac{a - b}{b - a} = -1.$

$$21. \frac{a}{n} \pm \frac{b}{n} = \frac{a \pm b}{n}$$

$$\frac{a}{m} \pm \frac{b}{n} = \frac{an \pm bm}{mn}.$$

$$22. \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}.$$

$$23. \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

$$24. \frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}.$$

$$25. a : \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{b}.$$

$$26. \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

$$27. \text{ Wenn } a:b = c:d, \text{ so ist } a \cdot d = b \cdot c.$$

$$28. (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

$$29. \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

$$30. a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

$$31. \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

$$32. a^0 = 1.$$

$$33. a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

$$34. \text{ Wenn } b^e = P, \text{ so ist } \sqrt[e]{P} = b \text{ und } \log_b P = e.$$

$$35. (\sqrt[n]{a})^n = a.$$

$$36. \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

$$37. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

$$38. (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

$$39. \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}.$$

$$40. \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}; \quad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

$$41. \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot x]{a^{m \cdot x}} = \sqrt[\frac{n}{x}]{a^{\frac{m}{x}}}.$$

$$42. \log a \cdot b = \log a + \log b.$$

$$43. \log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

$$44. \log a^n = n \cdot \log a.$$

$$45. \log \sqrt[n]{a} = \frac{\log a}{n}.$$

$$46. \log_a 1 = 0.$$

$$47. t = a + (n - 1) d$$

$$s = [2a + (n - 1) d] \frac{n}{2}$$

$$s = (a + t) \frac{n}{2}.$$

$$48. t = a q^{n-1}$$

$$s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$s = \frac{qt - a}{q - 1}$$

$$s = \frac{a}{1 - q} \quad (\text{für } q < 1 \text{ und } n = \infty).$$

$$49. Z = \frac{K \cdot P}{100}$$

$$q = 1 + \frac{P}{100}$$

$$b = a q^n$$

$$b = a q^n \pm \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$b = \frac{r q (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$a q^n = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}.$$

C. Trigonometrie.

I. Einleitendes.

§ 200.

Die Trigonometrie*) löst die Aufgabe, ebene Figuren, insbesondere Dreiecke, aus gegebenen Bestandteilen zu berechnen.

Die Hauptfrage der Trigonometrie ist: Wie hängen die Seiten und Winkel eines Dreiecks in Bezug auf ihre Grösse zusammen? Die Planimetrie löst diese Aufgabe durch Konstruktion, die Trigonometrie durch Berechnung; in der Trigonometrie berechnet man beispielsweise aus der Länge der Seiten die Grösse der Winkel.

Man unterscheidet ebene und sphärische Trigonometrie. Die letztere beschäftigt sich mit der Berechnung sphärischer Dreiecke, das sind Dreiecke auf der Oberfläche einer Kugel, z. B. der Erde, deren Seiten Bögen sogenannter grösster Kugelkreise sind (vgl. § 253, Erkl. 1). Im folgenden wird nur von ebener Trigonometrie gehandelt. Mit Hilfe von Dreiecken kann man auch die Vielecke berechnen.

§ 201.

Eine Schwierigkeit der Berechnung von Winkeln aus Seiten und umgekehrt liegt darin, dass Seiten und Winkel durch ein gemeinsames Mass nicht messbar sind (Meter, Grad). Die Beseitigung dieser Schwierigkeit gelingt dadurch, dass man die Winkel noch durch ein anderes Mass, als Grade, Minuten und Sekunden misst, nämlich durch Verhältnisse von Strecken (§ 203); diese Streckenquotienten nennt man die trigonometrischen Zahlen

*) Das Wort Trigonometrie stammt aus dem Griechischen und bedeutet Messkunst des Dreiecks. Die Trigonometrie ist sehr alt; sie ist eine notwendige Hilfswissenschaft der Astronomie. Der Erfinder der Trigonometrie der Griechen ist Hipparch von Nicäa, ein grosser Astronom, der 160—125 v. Chr. zu Rhodus und Alexandria lebte. Auch die alten Inder hatten schon früh eine Trigonometrie.

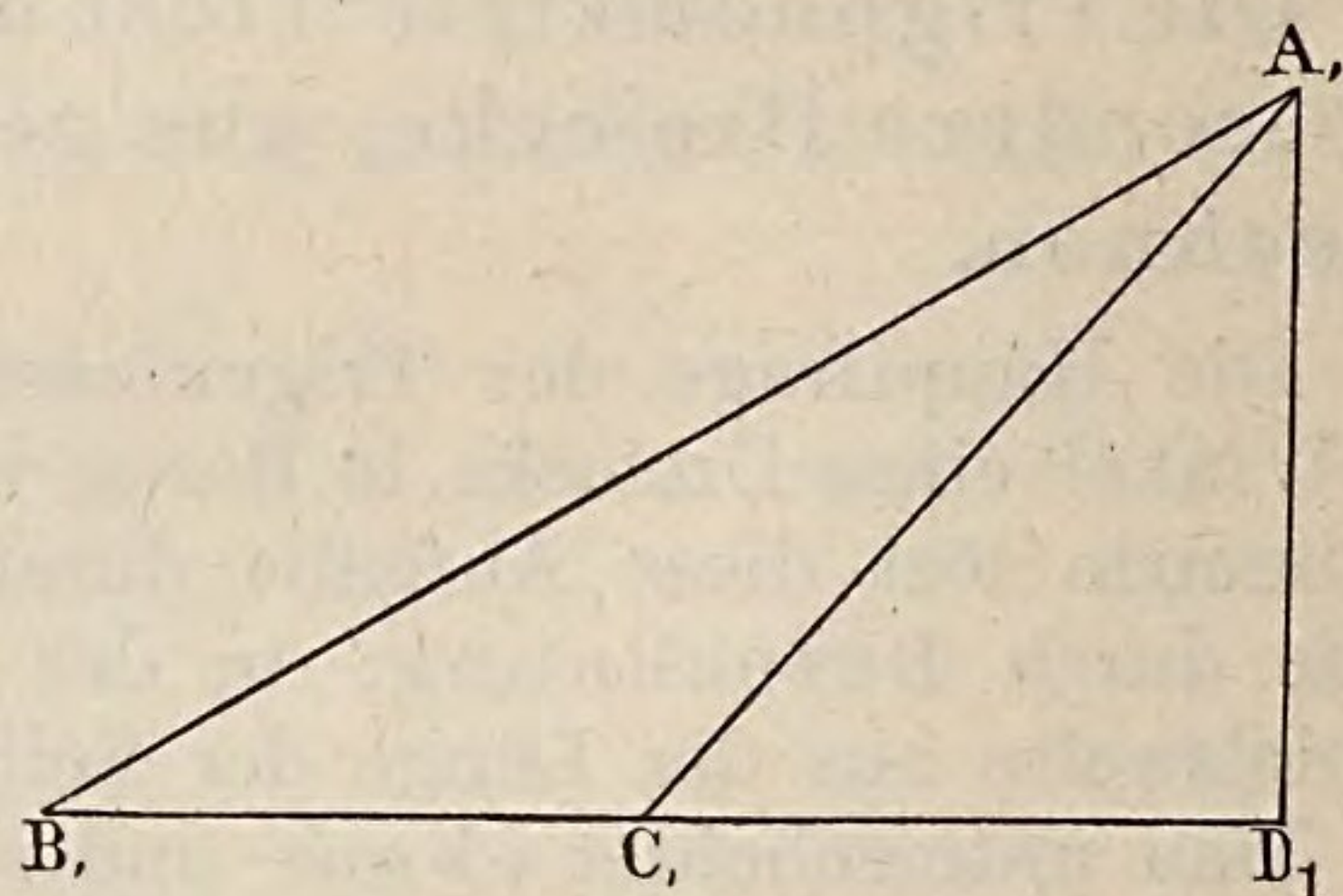
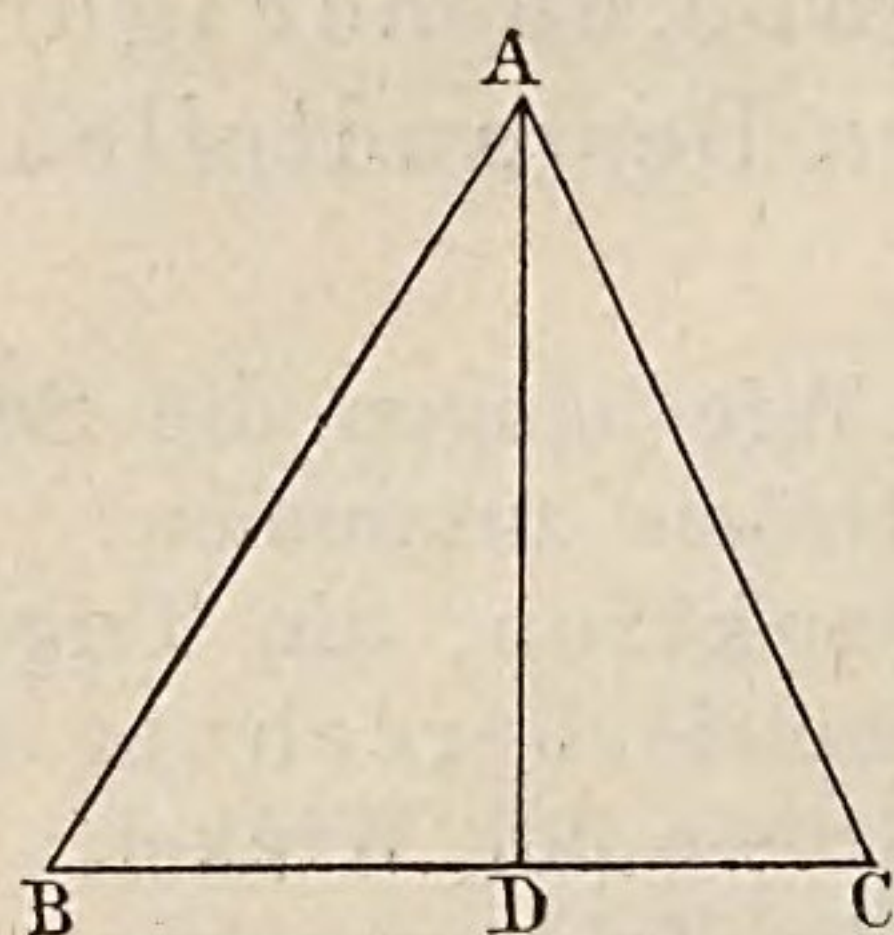
oder die trigonometrischen Winkelfunktionen. (Näheres § 204.)

Unter Funktion*) einer Grösse versteht man in der Mathematik jede zweite Grösse, die mit der ersten so zusammenhängt, dass eine Änderung dieser auch eine entsprechende Änderung jener zur Folge hat. Z. B. ist ein spitzer Winkel im rechtwinkligen Dreieck eine Funktion des andern, die Länge der Peripherie eines Kreises ist eine Funktion des Radius u. s. w.

§ 202.

Jedes schiefwinklige Dreieck kann durch zwei rechtwinklige bestimmt werden.

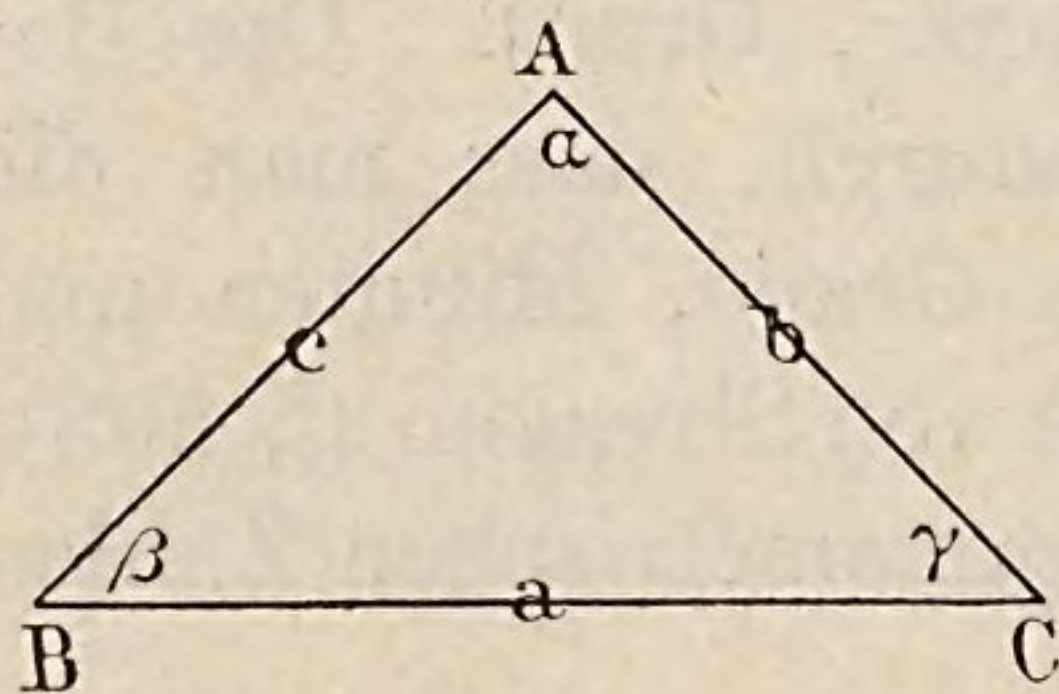
$$\begin{aligned} \text{Z. B.} \quad \triangle ABC &= \triangle ADB + \triangle ADC \\ \triangle A_1B_1C_1 &= \triangle A_1D_1B_1 - \triangle A_1D_1C_1. \end{aligned}$$



Wir betrachten daher bei der Festsetzung der Winkelfunktionen vorläufig nur das rechtwinklige Dreieck (weiteres s. § 217), über welches schon in der Planimetrie Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln gelehrt sind (z. B. § 47₄ und Lehrsatz des Pythagoras).

§ 203.

Zwischen den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks können sechs Verhältnisse stattfinden:

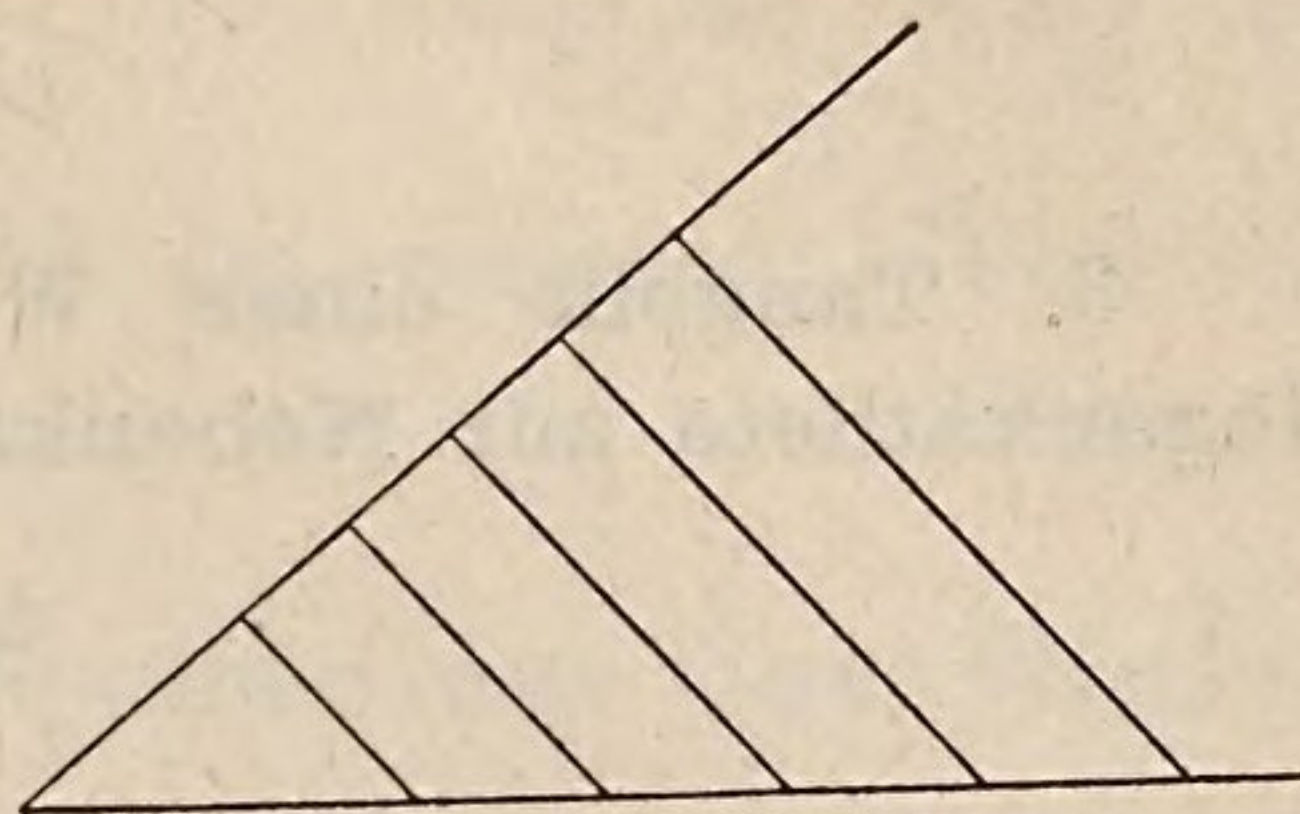


1. $b : a$ } das Verhältniss einer Kathete zur
2. $c : a$ } Hypotenuse
3. $b : c$ } das Verhältniss der beiden Katheten
4. $c : b$ }

5. $a : c$ }
6. $a : b$ } das Verhältniss der Hypotenuse zu einer Kathete.

*) Aus dem Lateinischen; bedeutet eigentlich „Verrichtung, Wirksamkeit“.

Jedes dieser Verhältnisse bestimmt die Grösse des einen spitzen Winkels und damit auch die Grösse des andern, und umgekehrt wird jedes dieser Verhältnisse durch die Grösse des einen spitzen Winkels bestimmt. So lange der Winkel derselbe bleibt, bleiben auch nach § 59 die Verhältnisse dieselben, wenn auch die einzelnen Seiten grösser oder kleiner werden. S. Figur. Sobald aber die Grösse des Winkels sich ändert, ändern sich auch die Verhältnisse der Seiten. Diese sind daher Funktionen der Winkel, und umgekehrt sind die Winkel Funktionen der Verhältnisse der Seiten.



II. Die trigonometrischen Winkelfunktionen.

§ 204.

Unter den trigonometrischen Winkelfunktionen versteht man die sechs Verhältnisse je zweier Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks und nennt dieselben Sinus (sin), Cosinus (cos), Tangens (tg), Cotangens (ctg), Sekans (sec) und Cosekans (cosec).

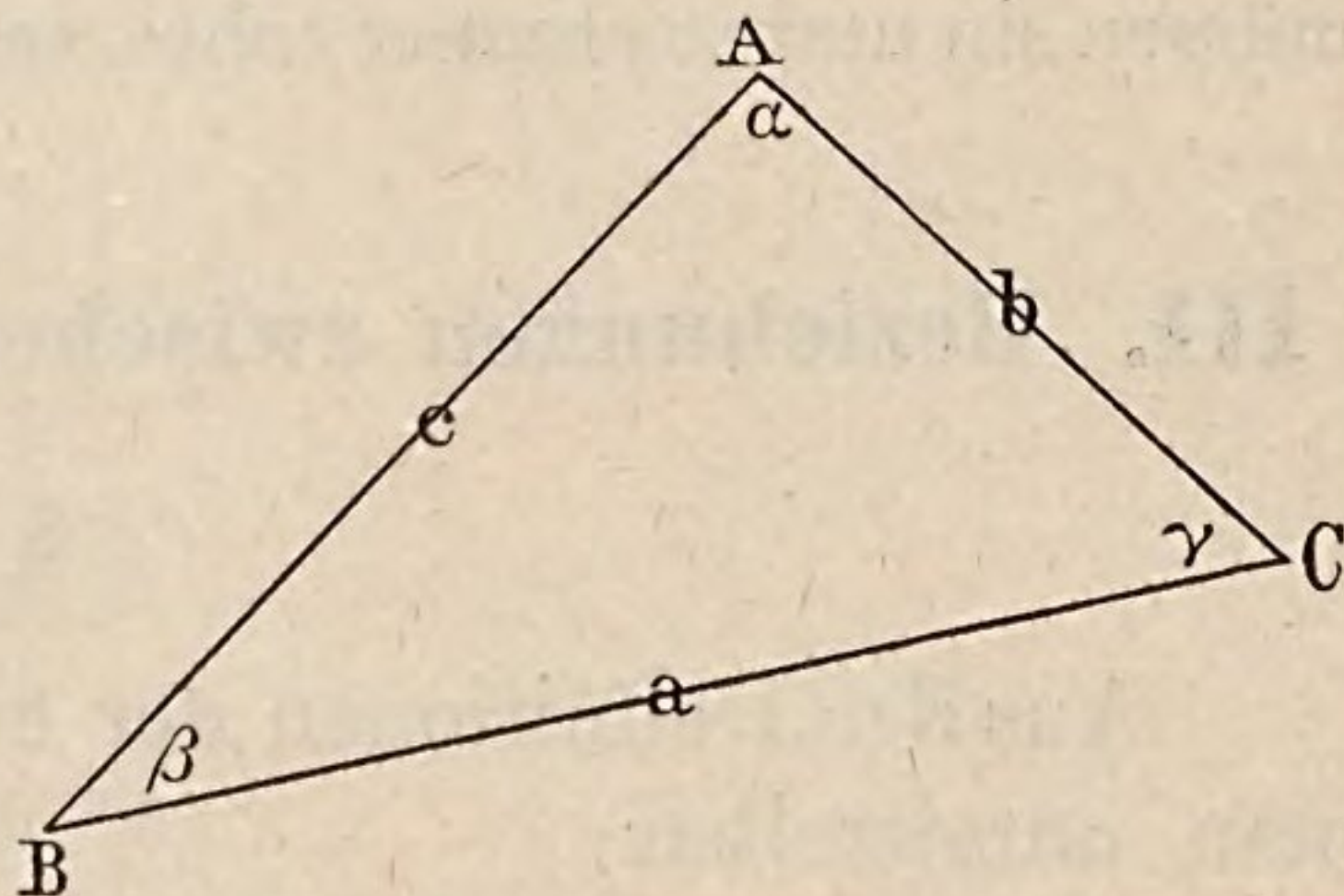
Anmerkung. Das Wort „Sinus“ ist die lateinische Übersetzung des arabischen Wortes „dschaib“. Die Araber haben den Begriff des sinus von den alten Indern übernommen, bei denen unter „dschiva“, woraus im Arabischen „dschaib“ wurde, die halbe auf dem Radius senkrechte Sehne, die als ein Mass für die Grösse des zugehörigen Centriwinkels angesehen werden kann, verstanden wird. Das lateinische Wort sinus bedeutet eigentlich „Busen“, und das ist auch eine zweite Bedeutung des arabischen Wortes „dschaib“. Demnach dürfte der Ausdruck sinus auf eine fehlerhafte Übersetzung zurückzuführen sein; wer zuerst das Wort sinus in der Trigonometrie gebraucht hat, ist unbekannt. Das Wort Tangens hängt mit dem planimetrischen Ausdruck Tangente zusammen, vgl. § 211, Anmerkung, ebenso das Wort Sekans mit dem planimetrischen Ausdruck Sekante. Über Cosinus, Cotangens und Cosekans s. § 206, Anmerkung.

1. Sinus eines Winkels ist das Verhältniss seiner Gegenkathete zur Hypotenuse.

$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

$$\sin \gamma = \frac{a}{c}$$

2. Cosinus eines Winkels ist das Verhältniss seiner Nebenkathete zur Hypotenuse.



$$\cos \beta = \frac{c}{a}$$

$$\cos \gamma = \frac{b}{a}.$$

3. Tangens eines Winkels ist das Verhältniss seiner Gegenkathete zur Nebenkathete.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{c}{b}.$$

4. Cotangens eines Winkels ist das Verhältniss seiner Nebenkathete zur Gegenkathete.

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{b}{c}.$$

5. Sekans eines Winkels ist das Verhältniss der Hypotenuse zur Nebenkathete.

$$\sec \beta = \frac{a}{b}$$

$$\sec \gamma = \frac{a}{c}.$$

6. Cosekans eines Winkels ist das Verhältniss der Hypotenuse zur Gegenkathete.

$$\operatorname{cosec} \beta = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{cosec} \gamma = \frac{a}{b}.$$

Anmerkung 1. Es wird bei den Funktionen angenommen, dass die Seiten des Dreiecks durch eine beliebige (aber dieselbe) Längeneinheit ausgedrückt sind. Nimmt man die Hypotenuse $= 1$ an, so stellt b unmittelbar $\sin \beta$ dar. Das ist dann ganz entsprechend der Bezeichnung der alten Inder.

Anmerkung 2. Da die Hypotenuse grösser ist als jede Kathete, so müssen $\sin$ und $\cos$ immer echte, $\sec$ und $\csc$ immer unechte Brüche sein.

III. Beziehungen zwischen den einzelnen Funktionen.

§ 205.

Aus den Definitionen der einzelnen Winkelfunktionen erkennt man unmittelbar:

1. Cosekans eines Winkels ist der reciproke Wert von Sinus und umgekehrt.

2. Sekans eines Winkels ist der reciproke Wert von Cosinus und umgekehrt.

3. Tangens eines Winkels ist der reciproke Wert von Cotangens und umgekehrt.

Oder:

1. Das Produkt aus Cosekans und Sinus eines Winkels ist gleich 1.

2. Das Produkt aus Sekans und Cosinus eines Winkels ist gleich 1.

3. Das Produkt aus Cotangens und Tangens eines Winkels ist gleich 1.

Beweis: 1.

$$\operatorname{cosec} \beta = \frac{a}{b}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{cosec} \beta \cdot \sin \beta = 1 \text{ (Gr. } V_3)$$

$$\operatorname{cosec} \beta = \frac{1}{\sin \beta}$$

$$\sin \beta = \frac{1}{\operatorname{cosec} \beta}.$$

2.

$$\sec \beta = \frac{a}{c}$$

$$\cos \beta = \frac{c}{a}$$

$$\sec \beta \cdot \cos \beta = 1 \text{ (Gr. } V_3)$$

$$\sec \beta = \frac{1}{\cos \beta}$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sec \beta}.$$

3.

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{tg} \beta = 1$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{ctg} \beta}.$$

Cosekans und Sekans eines Winkels lassen sich demnach aus Sinus und Cosinus unmittelbar hinschreiben.

$$\begin{array}{ll} \text{Ist z. B.} & \sin x = \frac{2}{3}, \\ \text{so ist} & \operatorname{cosec} x = \frac{3}{2}. \\ \\ \text{Ist} & \cos x = \frac{4}{5}, \\ \text{so ist} & \sec x = \frac{5}{4}. \end{array}$$

Daher werden Sekans und Cosekans in den trigonometrisch-logarithmischen Tafeln (s. § 212) nicht berechnet und sollen auch aus unserer Betrachtung fortan ganz ausscheiden.

Ebenso könnte man es mit Cotangens machen. Es hat sich jedoch bei manchen Aufgaben als praktisch herausgestellt, Cotangens beizubehalten. Wir behandeln daher im folgenden Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens.

§ 206.

Da im rechtwinkligen Dreieck die beiden spitzen Winkel Komplementwinkel sind,

$$\left. \begin{array}{l} \sphericalangle \beta = 90^\circ - \gamma \\ \sphericalangle \gamma = 90^\circ - \beta \end{array} \right\} (\S 21),$$

so erkennt man leicht unmittelbar aus den Definitionen der Winkelfunktionen:

Cosinus eines Winkels ist gleich Sinus des Komplementwinkels, und umgekehrt ist Sinus eines Winkels gleich Cosinus des Komplementwinkels.

Cotangens eines Winkels ist gleich Tangens des Komplementwinkels, und umgekehrt ist Tangens eines Winkels gleich Cotangens des Komplementwinkels.

Zusammengefasst: Die Cofunktionen eines Winkels sind gleich den Funktionen des Komplementwinkels und umgekehrt.

1. $\cos \beta = \sin (90^\circ - \beta)$
2. $\sin \beta = \cos (90^\circ - \beta)$
3. $\operatorname{ctg} \beta = \operatorname{tg} (90^\circ - \beta)$
4. $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} (90^\circ - \beta).$

$$\text{Beweis 1. } \cos \beta = \frac{c}{a}$$

$$\sin \gamma = \sin (90^\circ - \beta) = \frac{c}{a}$$

$$\cos \beta = \sin (90^\circ - \beta) \text{ (Gr. III).}$$

Ebenso ist 2. bis 4. zu beweisen.

Anmerkung. Die aus dem Lateinischen entnommenen Ausdrücke cosinus, cotangens und cosecans finden dadurch ihre Erklärung, dass sie sinus, tangens und secans des Komplementwinkels sind.

§ 207.

Zwischen Sinus und Cosinus einerseits und Tangens und Cotangens andererseits bestehen die Formeln:

$$\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \operatorname{tg} \beta$$

$$\text{und } \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \operatorname{ctg} \beta.$$

$$\text{Beweis: } \sin \beta = \frac{b}{a}$$

$$\cos \beta = \frac{c}{a}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin \beta}{\cos \beta} &= \frac{b}{a} : \frac{c}{a} = \frac{b \cdot a}{a \cdot c} = \frac{b}{c} \\ \frac{\cos \beta}{\sin \beta} &= \frac{c}{a} : \frac{b}{a} = \frac{c \cdot a}{a \cdot b} = \frac{c}{b} \end{aligned} \right\} \text{ (Gr. V}_4\text{)}$$

$$\frac{b}{c} = \operatorname{tg} \beta$$

$$\frac{c}{b} = \operatorname{ctg} \beta$$

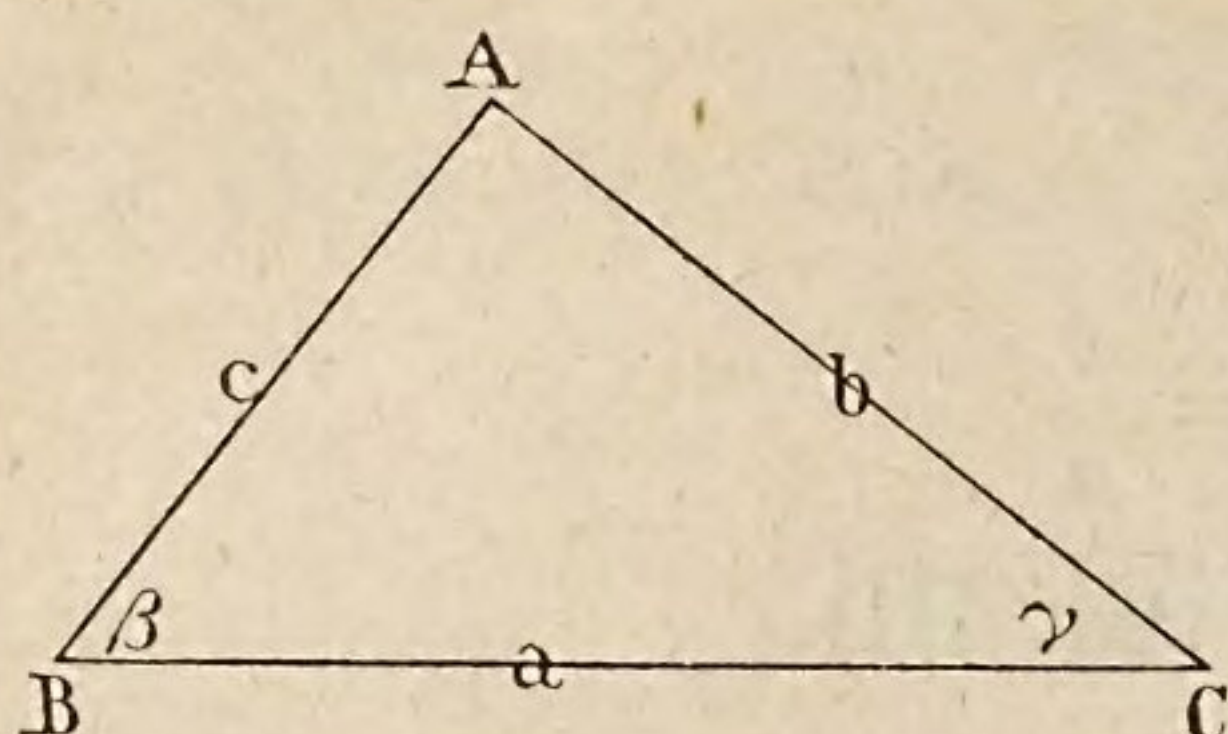
$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin \beta}{\cos \beta} &= \operatorname{tg} \beta \\ \frac{\cos \beta}{\sin \beta} &= \operatorname{ctg} \beta \end{aligned} \right\} \text{ (Gr. III).}$$

§ 208.

Zwischen Sinus und Cosinus eines Winkels besteht die Beziehung:

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1.$$

In Worten: Die Summe der Quadrate von Sinus und Cosinus eines Winkels ist 1. ($\sin^2 \beta$ bedeutet das Quadrat der Funktion $\sin \beta$, also eigentlich $(\sin \beta)^2$.)



Beweis:

$$\sin \beta = \frac{b}{a}; \cos \beta = \frac{c}{a}$$

$$\sin^2 \beta = \frac{b^2}{a^2}; \cos^2 \beta = \frac{c^2}{a^2} \text{ (Gr. V}_5\text{)}$$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \text{ (Gr. V}_1\text{)} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$

Nun ist aber $b^2 + c^2 = a^2$ (Pythagoras)

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1.$$

Aus dieser Hauptformel folgen die Nebenformeln:

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta}$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}.$$

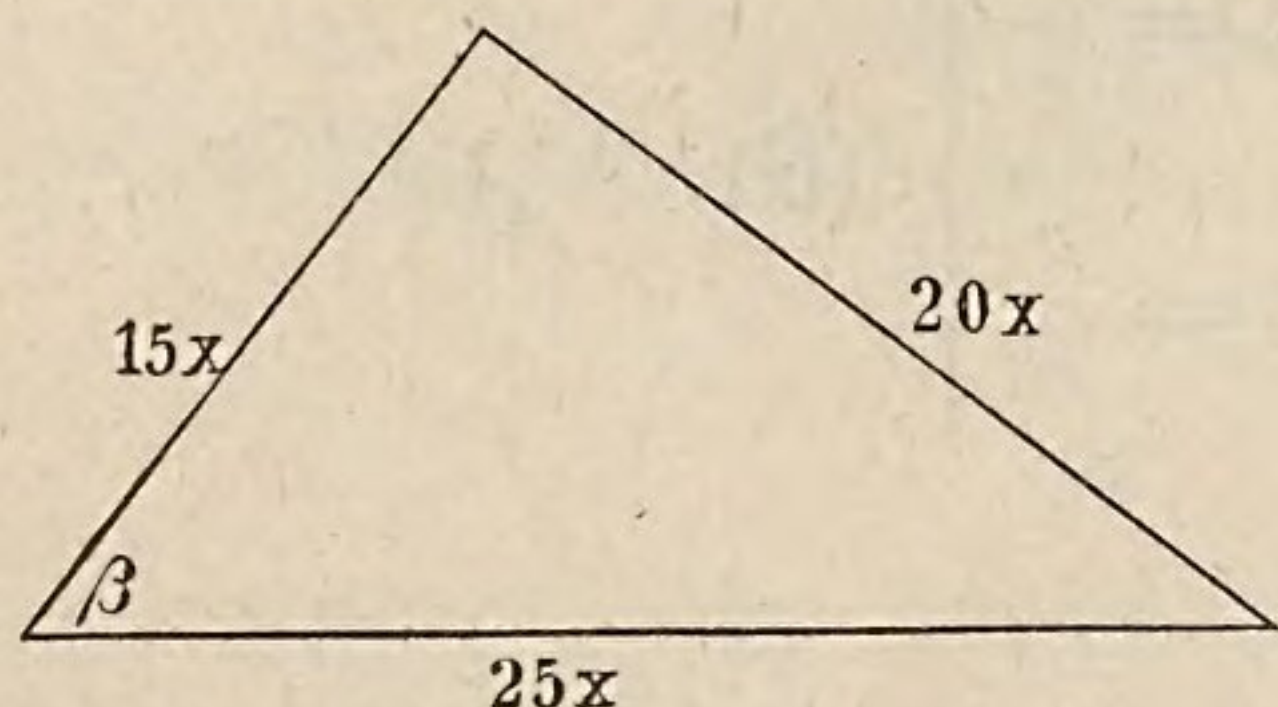
Anmerkung. Aus den Formeln der 4 letzten Paragraphen folgt, dass, wenn eine Winkelfunktion bekannt ist, man die übrigen Funktionen sämtlich aus dieser ableiten kann.

Berechnung der Funktionen einiger Winkel.

§ 209.

Die trigonometrischen Winkelfunktionen sind, wie alle Verhältnisse (s. § 119), unbenannte Zahlen.

Sind z. B. (s. Figur) die drei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks Vielfache irgend einer Masseinheit x , z. B. $15x$, $20x$ und $25x$, so ist



$$\sin \beta = \frac{20x}{25x} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\cos \beta = \frac{15x}{25x} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{20x}{15x} = \frac{4}{3} = 1,33 \dots$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{15x}{20x} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Die Berechnung aller zu den einzelnen Winkeln von 0° bis 90° gehörigen Funktionen kann hier nicht gezeigt werden. Die Funktionen einiger Winkel können wir aber auch schon mit Hilfe der erworbenen Kenntnisse berechnen, wie im folgenden Paragraphen gezeigt werden soll.

In unseren Logarithmentafeln finden wir meistens nicht die Funktionen selber, sondern ihre Logarithmen. Will man daraus die Funktion selber erfahren, so muss man den zugehörigen Numerus aufsuchen.

§ 210.

1. Die Funktionen von 45° .

Berechnung: Ist im rechtwinkligen Dreieck ein Winkel $= 45^\circ$, so ist es rechtwinklig gleichschenkelig; es ist demnach $b = c$.

$$\sin 45^\circ = \frac{b}{a}, \text{ ebenso } \cos 45^\circ.$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ (Pythagoras)} = 2b^2$$

$$a = b \sqrt{2} \text{ (Gr. V}_6\text{)}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{b}{b \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

oder erweitert mit $\sqrt{2}$

$$\left. \begin{array}{l} \sin 45^\circ \\ \cos 45^\circ \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} = 1,4142$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin 45^\circ \\ \cos 45^\circ \end{array} \right\} = 0,7071$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{b}{c} = 1, \text{ ebenso } \operatorname{ctg} 45^\circ.$$

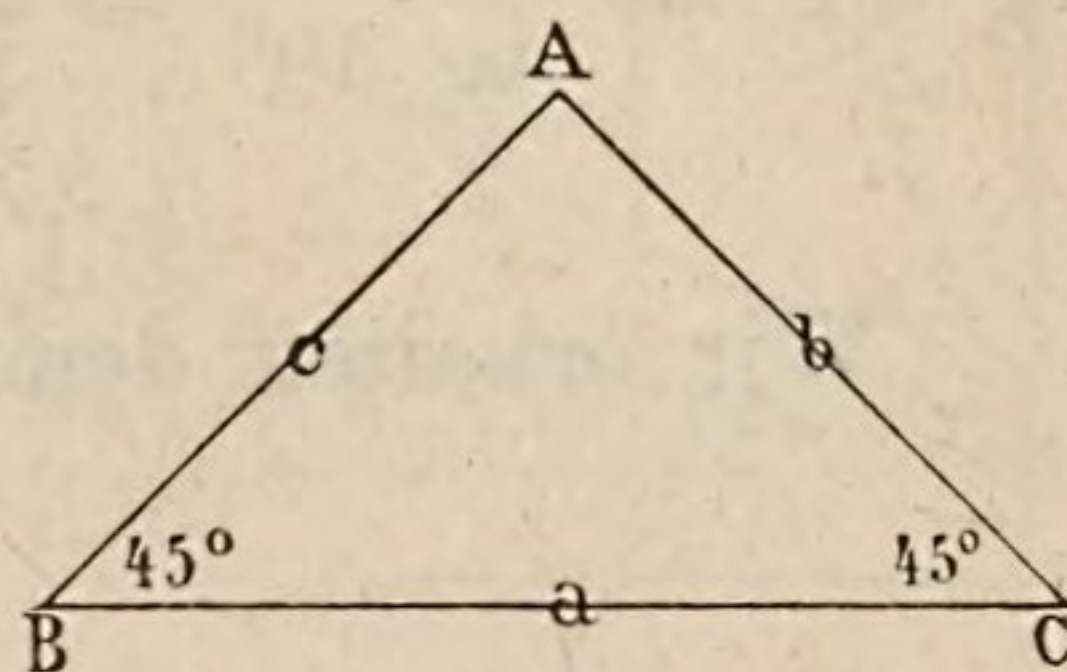
Wir erhalten demnach:

$$\sin 45^\circ = 0,7071$$

$$\cos 45^\circ = 0,7071$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

$$\operatorname{ctg} 45^\circ = 1.$$

2. Die Funktionen von 30° .

Ist im $\triangle \sphericalangle B = 30^\circ$, demnach $\sphericalangle C = 60^\circ$, so ist $AC = \frac{1}{2} BC$ (§ 47₄), demnach $\sin 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2} = 0,5$.

$$\cos 30^\circ = \frac{c}{a}$$

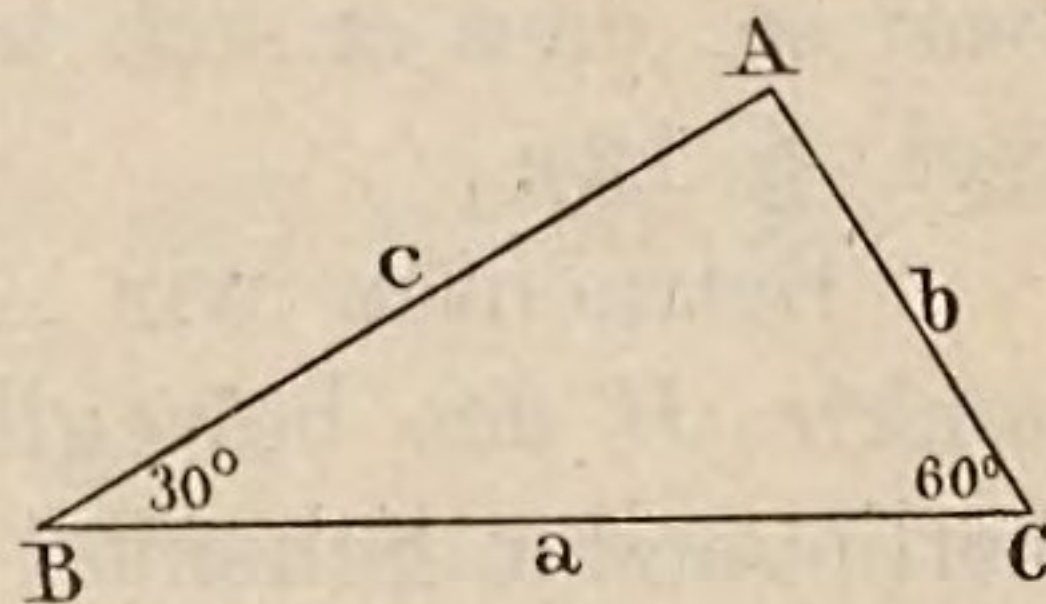
$$c^2 = a^2 - b^2 \text{ (Pythagoras)} = a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$c = \frac{a}{2} \sqrt{3} \text{ (Gr. V}_6\text{)}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{a}{2} \sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} = 1,7321$$

$$\cos 30^\circ = 0,866$$



$$\operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{\sin 30^{\circ}}{\cos 30^{\circ}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \sqrt{3} = \frac{1,732}{3} = 0,577$$

$$\operatorname{ctg} 30^{\circ} = \frac{1}{\operatorname{tg} 30^{\circ}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} = 1,732.$$

Wir erhalten demnach:

$$\begin{aligned}\sin 30^{\circ} &= 0,5 \\ \cos 30^{\circ} &= 0,866 \\ \operatorname{tg} 30^{\circ} &= 0,577 \\ \operatorname{ctg} 30^{\circ} &= 1,732.\end{aligned}$$

3. Die Funktionen von 60° .

Da nach § 206 die Funktionen von 60° gleich den Co-funktionen von 30° sind, so ist

$$\begin{aligned}\sin 60^{\circ} &= 0,866 \\ \cos 60^{\circ} &= 0,5 \\ \operatorname{tg} 60^{\circ} &= 1,732 \\ \operatorname{ctg} 60^{\circ} &= 0,577.\end{aligned}$$

Man kann mit Hilfe der planimetrischen Lehrsätze noch die Funktionen anderer Winkel berechnen (z. B. von 18° und 72°) und mit Hilfe trigonometrischer Formeln aus den so bekannten Winkelfunktionen wieder andere ableiten. Für uns können die angeführten Beispiele genügen.

§ 211. Die Funktionen von 0° — 90° .

Zur besseren Kenntnis der Funktionen ist es erforderlich, ihr Verhalten bei grösser oder kleiner werdendem Winkel und ihre Grenzwerte zunächst für 0° und 90° kennen zu lernen. Zu dem Zwecke denken wir uns den einen Schenkel beweglich und zwar so, dass er sich um den festgelegten Scheitelpunkt O dreht (vgl. § 12).

Betrachten wir $\sphericalangle BOA = \alpha$, so ist, wenn wir vom Endpunkte B des beweglichen Schenkels OB das Lot BC auf den festliegenden Schenkel AO fallen und wenn wir BC mit a , CO mit b und den beweglichen Schenkel mit r bezeichnen,

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{a}{r} \\ \cos \alpha &= \frac{b}{r}.\end{aligned}$$

Wird der Winkel kleiner, etwa gleich $\sphericalangle B_1 O A = \alpha_1$, so wird bei entsprechender Bezeichnung

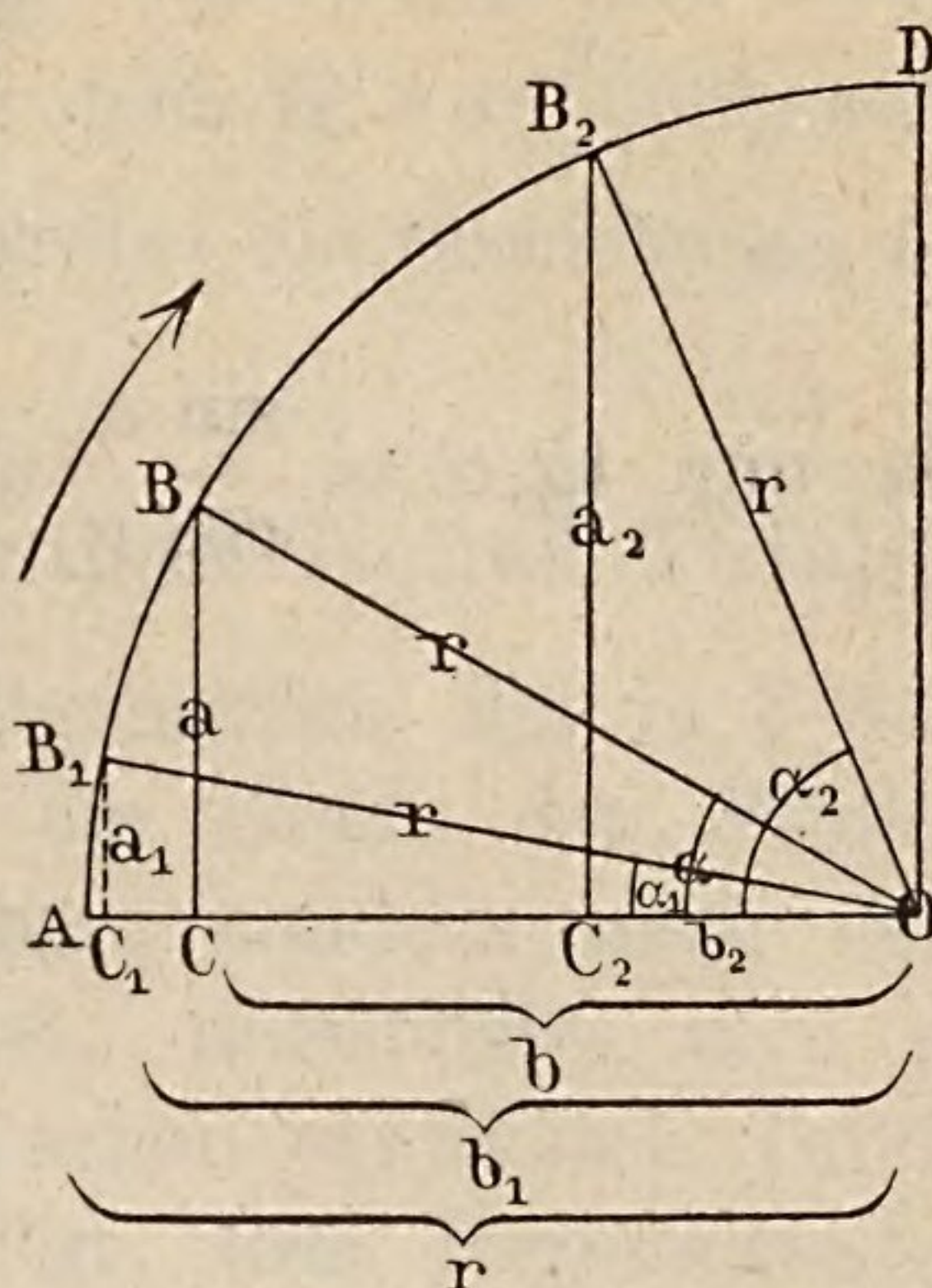
$$\sin \alpha_1 = \frac{a_1}{r}$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{b_1}{r}.$$

Wird der Winkel grösser, etwa gleich $\sphericalangle B_2 O A = \alpha_2$, so wird

$$\sin \alpha_2 = \frac{a_2}{r}$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{b_2}{r}.$$



Man erkennt hieraus leicht, da der Nenner immer derselbe ist, dass bei kleiner werdendem Winkel die Sinusfunktion kleiner, die Cosinusfunktion aber grösser und dass bei grösser werdendem Winkel die Sinusfunktion grösser, die Cosinusfunktion aber kleiner wird.

Wenn man bei dieser Betrachtung $r = 1$ setzt, so wird

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= a; & \cos \alpha &= b \\ \sin \alpha_1 &= a_1; & \cos \alpha_1 &= b_1 \\ \sin \alpha_2 &= a_2; & \cos \alpha_2 &= b_2. \end{aligned}$$

Man nennt, wenn man die Hypotenuse $= 1$ setzt, die Gegenkathete die Sinuslinie und die Nebenkathete die Cosinuslinie des Winkels. Man sieht, dass bei wachsendem Winkel die Sinuslinie ebenfalls wächst, die Cosinuslinie aber abnimmt und dass bei kleiner werdendem Winkel die Sinuslinie ebenfalls abnimmt, die Cosinuslinie aber wächst.

Denkt man sich den $\sphericalangle \alpha$ immer kleiner und schliesslich zu 0 werden, so wird auch die Sinuslinie schliesslich zu 0, und wir haben deshalb:

$$\sin 0^\circ = \frac{0}{r} = 0.$$

Die Cosinuslinie wird aber immer grösser und schliesslich bei $\alpha = 0$ zu r . Wir haben demnach:

$$\cos 0^\circ = \frac{r}{r} = 1.$$

Denkt man sich den $\sphericalangle \alpha$ immer grösser und schliesslich zu 90° werden, so wird die Sinuslinie immer grösser und schliesslich zu r , die Cosinuslinie immer kleiner und schliesslich zu 0. Wir haben demnach:

$$\sin 90^\circ = \frac{r}{r} = 1$$

$$\cos 90^\circ = \frac{0}{r} = 0.$$

Da nun $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ und $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ist, so erhalten wir

$$\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{0}{1} = 0$$

$$\operatorname{ctg} 0^\circ = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\operatorname{ctg} 90^\circ = \frac{0}{1} = 0.$$

Stellen wir uns die Ergebnisse dieses und des vorigen Paragraphen in einem Täfelchen zusammen, so erhalten wir (bei Abrundung auf 2 Stellen):

Winkel	sin	cos	tg	ctg
0°	0	1	0	∞
30°	0,5	0,87	0,58	1,73
45°	0,71	0,71	1	1
60°	0,87	0,5	1,73	0,58
90°	1	0	∞	0

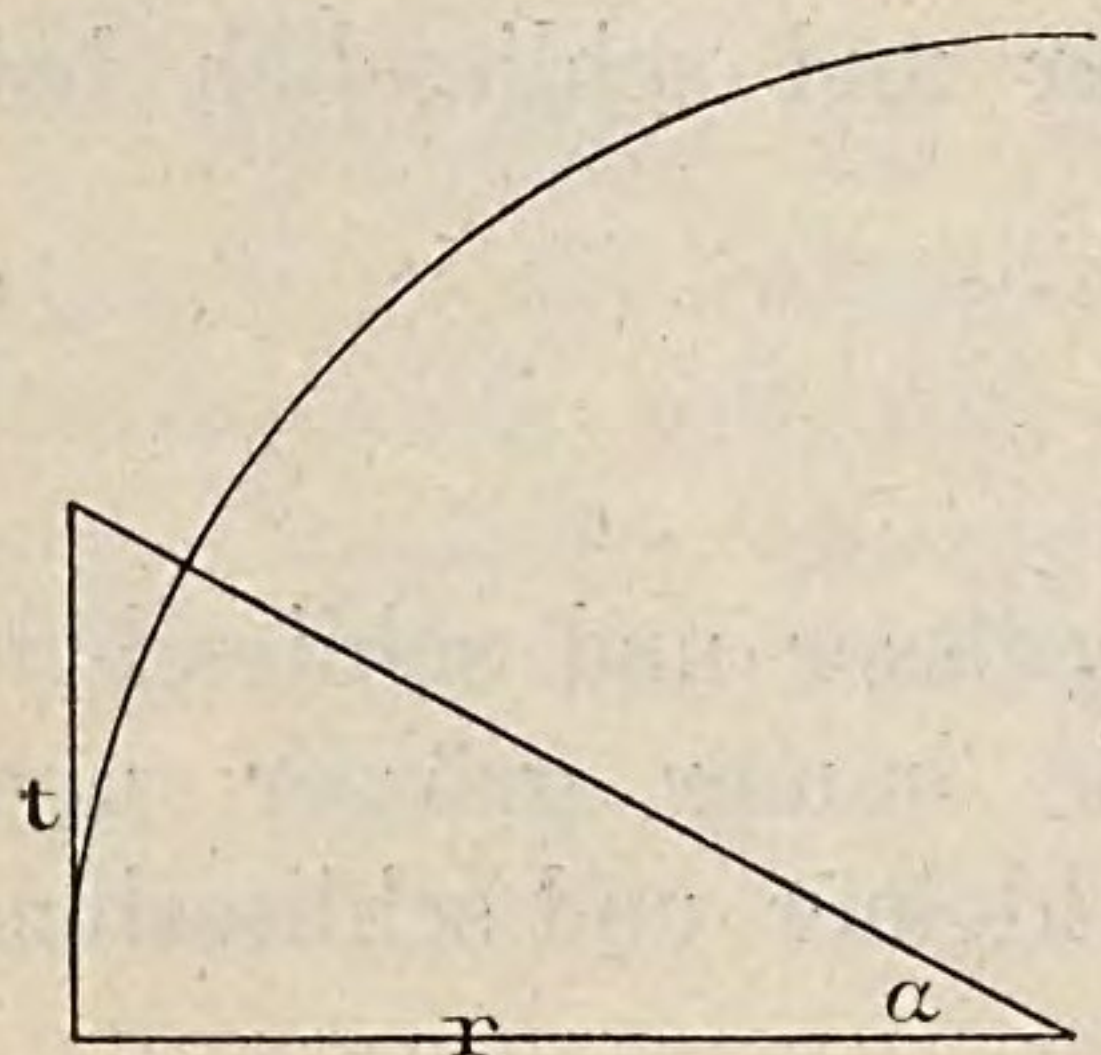
Man erkennt hieraus:

Bei grösser werdendem Winkel nehmen die Funktionen (Sinus und Tangens) zu, die Cofunktionen (Cosinus und Cotangens) ab; bei kleiner werdendem Winkel nehmen die Funktionen ab, die Cofunktionen zu.

Sinus und Cosinus sind immer echte Brüche (liegen zwischen 0 und 1; die Logarithmen sind daher immer negativ).

Tangens von 0° bis 45° und Cotangens von 45° bis 90° sind echte Brüche (die Logarithmen daher negativ), Tangens von 45° bis 90° und Cotangens von 0° bis 45° sind grösser als 1, also unechte Brüche (die Logarithmen daher positiv).

Anmerkung. Denkt man sich bei der vorigen Figur in A auf AO die Senkrechte



errichtet, so wird sie eine Tangente an dem durch den beweglichen Schenkel entstehenden Kreis. Es ist dann $\operatorname{tg} \alpha = \frac{t}{r}$, oder wenn man wieder $r = 1$ setzt, $\operatorname{tg} \alpha = t$. Hiervon rührt die Bezeichnung der Tangensfunktion.

§ 212. Die logarithmisch-trigonometrischen Tafeln.

Die Einrichtung entspricht im allgemeinen der in § 159 beschriebenen. Es ist das richtigste, die Grade der Winkel nicht in Minuten, Sekunden und Tertien, sondern nach dem Dezimalsystem in zehntel, hundertstel, tausendstel u. s. w. Grad einzuteilen, wie es z. B. in den schon erwähnten Tafeln von Bremiker geschehen ist. Es genügt, drei Dezimalstellen unter Abrundung der letzten zu berechnen. Sind Winkel in Minuten und Sekunden gegeben, so kann man dieselben durch Division mit 60 leicht in Dezimalteile von Graden verwandeln.

$$\begin{aligned} \text{Z. B.} \quad & 5^{\circ}29'56'' \\ & 56'' = 56 : 60 = 5,6 : 6 = 0,933 \\ & 29,933 = 29,933 : 60 = 2,9933 : 6 = 0,499. \\ \text{Also} \quad & 5^{\circ}29'56'' = 5,499. \end{aligned}$$

Ebenso kann man umgekehrt die Dezimalteile von Graden leicht durch Multiplikation mit 60 in Minuten und Sekunden verwandeln.

$$\begin{aligned} \text{Z. B.} \quad & 20,768 \\ & 0,768 \cdot 60 = 46,08 \\ & 0,08 \cdot 60 = 4,8. \\ \text{Also} \quad & 20,768 = 20^{\circ}46'4'',8. \end{aligned}$$

Nach dem vorigen Paragraphen sind die Logarithmen der $\sin$ und $\cos$ aller Winkel von 0° bis 90° , ferner die Logarithmen der tg von 0° bis 45° und die der ctg von 45° bis 90° negativ. Diese sind nun aus praktischen Gründen als positive Zahlen in den Tafeln angegeben mit angehängter negativer 10 als Kennziffer, die man in den genannten Fällen zu ergänzen hat.

$$\begin{aligned} \text{Z. B.} \quad & 7,64. \\ & \log \sin 7,64 = 9,12368 - 10 \\ & \log \operatorname{tg} \quad \quad = 9,12756 - 10 \\ & \log \operatorname{ctg} \quad \quad = 0,87244 \\ & \log \cos \quad \quad = 9,99613 - 10. \end{aligned}$$

Da nach § 206 die Cofunktionen eines Winkels gleich den Funktionen seines Komplementwinkels und umgekehrt die Funktionen eines Winkels gleich den Cofunktionen seines Komplementwinkels sind, so finden wir in den Tafeln nur die Logarithmen

der $\sin$, tg , ctg und $\cos$ von 0° bis 45° angegeben, die dann den $\cos$, ctg , tg und $\sin$ der Winkel von 45° bis 90° entsprechen. Die Grade von 0 bis 45 stehen oben auf den Seiten und die zugehörigen hundertstel Grade links von oben nach unten, während die Grade von 45 bis 90 unten auf den Seiten in umgekehrter Richtung und die zugehörigen hundertstel Grade rechts von unten nach oben angegeben sind.

$$\begin{aligned} \text{Z. B. } \log \sin 66^\circ,41 &= \log \cos 23^\circ,59 = 9,96210 - 10 \\ \log \operatorname{tg} 52^\circ,03 &= \log \operatorname{ctg} 37^\circ,97 = 0,10766 \\ \log \operatorname{ctg} 80^\circ,99 &= \log \operatorname{tg} 9^\circ,01 = 9,20020 - 10 \\ \log \cos 46^\circ,78 &= \log \sin 43^\circ,22 = 9,83556 - 10. \end{aligned}$$

Die Logarithmen für die tausendstel und, wenn verlangt, auch für die zehntausendstel Grade findet man ganz, wie für die fünften und sechsten Stellen der Zahlen durch Interpolation (vgl. § 159). Der Bequemlichkeit wegen stehen die Differenzen für $\sin$ und $\cos$ meist rechts neben den Logarithmen unter d angegeben; für tg und ctg finden wir die gemeinsame Differenz zwischen ihren Logarithmen unter $d . c$. In besonderen Täfelchen sind in den meisten Fällen auch hier unter P.P. die zu den tausendstel Graden gehörenden Werte näher berechnet. Der Schüler muss sich aber bei diesen gebotenen Bequemlichkeiten immer klar bleiben, wie die Täfelchen entstanden sind.

Abweichend von dem früheren muss man bei $\cos$ und ctg , also bei den Cofunktionen, die für die tausendstel Grade gefundenen Werte abziehen, da ja dem grösseren Winkel eine kleinere Cofunktion entspricht. Z. B.

$$\begin{aligned} \log \sin 23^\circ,986 &= \begin{cases} 9,60897 - 10 \\ + 10 \\ \hline 9,60907 - 10 \end{cases} \\ \log \operatorname{tg} 60^\circ,268 &= \begin{cases} 0,24312 \\ + 14 \\ \hline 0,24326 \end{cases} \\ \log \cos 12^\circ,509 &= \begin{cases} 9,98958 - 10 \\ - 2 \\ \hline 9,98956 - 10 \end{cases} \\ \log \operatorname{ctg} 83^\circ,573 &= \begin{cases} 9,05192 - 10 \\ - 20 \\ \hline 9,05172 - 10. \end{cases} \end{aligned}$$

Soll man umgekehrt zu dem Logarithmus einer Winkelfunktion den zugehörigen Winkel aufschlagen, so sucht man in der betreffenden Rubrik bei $\sin$ und tg den nächst niederen,

bei $\cos$ und ctg aber den nächst höheren Logarithmus auf, da zu einer grösseren Cofunktion ja der kleinere Winkel und also auch zu einem grösseren Logarithmus derselben der kleinere Winkel gehört. Die gefundenen Tausendstel u. s. w. hängt man dann in allen Fällen an den zu dem nächst niederen (bei $\sin$ und tg) oder nächst höheren Logarithmus (bei $\cos$ und ctg) gehörenden Winkel an.

$$\text{Z. B. } \log \sin \beta = 8,99667 - 10.$$

$$\text{Man findet bei } 8,99628 - 10 \dots 5^0,69$$

$$39; \text{ Differenz der Tafel 76}$$

$$\beta = 5^0,695.$$

$$\log \cos \beta = 9,51163 - 10.$$

$$\text{Man findet bei } 9,51176 - 10 \dots 71^0,04$$

$$13; \text{ Differenz der Tafel 22}$$

$$\beta = 71^0,046.$$

$$\log \text{tg } \beta = 0,23940.$$

$$\text{Man findet bei } 0,23926 \dots 60^0,04$$

$$14; \text{ Differenz der Tafel 18}$$

$$\beta = 60^0,048.$$

$$\log \text{ctg } \beta = 0,20351.$$

$$\text{Man findet bei } 0,20354 \dots 32^0,04$$

$$3; \text{ Differenz der Tafel 17}$$

$$\beta = 32^0,042.$$

IV. Berechnung des rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecks, sowie des regulären Polygons und der Zahl π .

§ 213. Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks.

Wir unterscheiden 4 Fälle:

1. Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen aus der Hypotenuse und einem spitzen Winkel.

Geg. a, β .

Ges. γ, b, c, J .

Lösung: 1. $\gamma = R - \beta$ (§ 21)

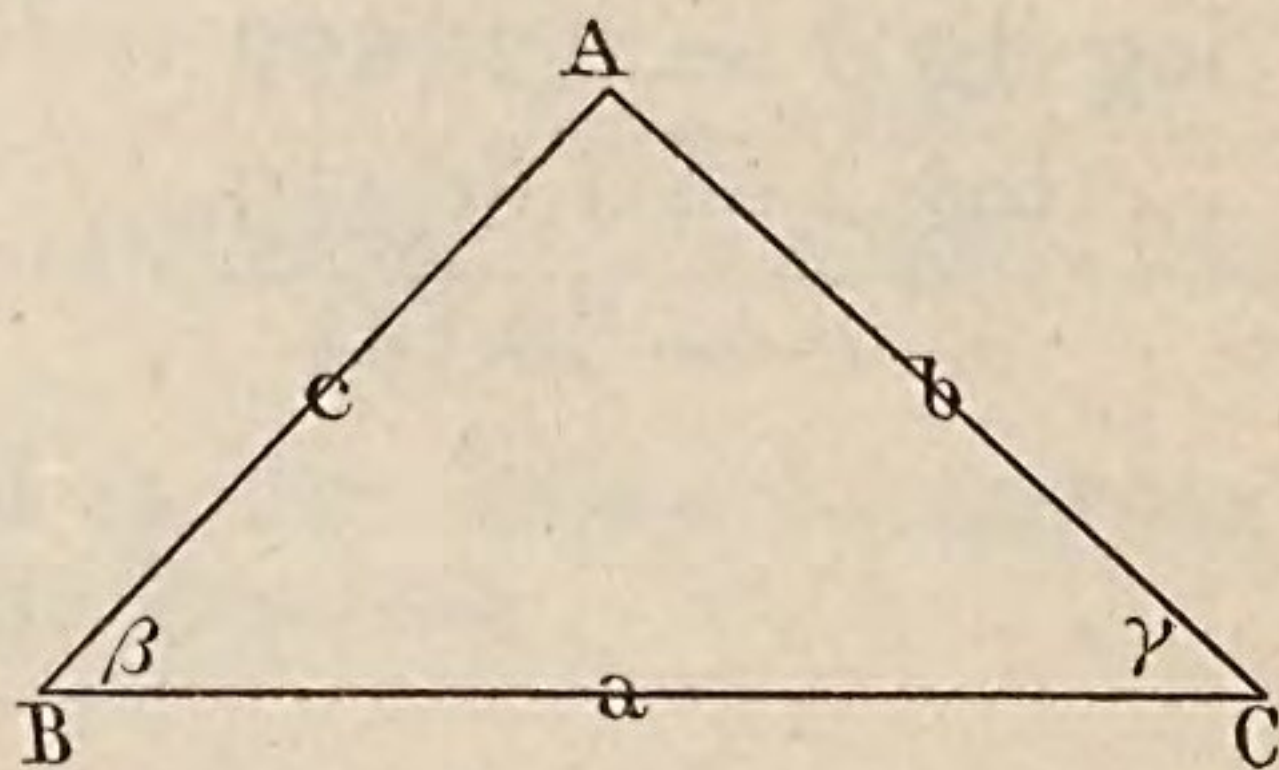
$$\sin \beta = \frac{b}{a}$$

$$2. b = a \cdot \sin \beta$$

$$\cos \beta = \frac{c}{a}$$

$$3. c = a \cdot \cos \beta.$$

$$4. J = \frac{b \cdot c}{2} \quad (\S 56_v).$$



Musterbeispiel: $a = 35,748$ m; $\sphericalangle \beta = 62^0,651$.

Berechnung: 1. $\gamma = 27^0,349$

2. $\log a = 1,55325$

$\log \sin \beta = 9,94852 - 10$

$\log b = 1,50177$

$b = 31,752$

3. $\log a = 1,55325$

$\log \cos \beta = 9,66220 - 10$

$\log c = 1,21545$

$c = 16,423$

4. $\log b = 1,50177$

$\log c = 1,21545$

$2,71722$

$\log 2 = 0,30103$

$\log J = 2,41619$

$J = 260,73.$

Antwort: $\gamma = 62^0,651$; $b = 31,752$ m; $c = 16,423$ m;
 $J = 260,73$ qm.

2. Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen aus einer Kathete und einem spitzen Winkel.

Geg. b, β .

Ges. γ, c, a, J .

Lösung: 1. $\gamma = R - \beta$

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{c}{b}$$

2. $c = b \operatorname{ctg} \beta$

$$\sin \beta = \frac{b}{a}$$

3. $a = \frac{b}{\sin \beta}$

4. $J = \frac{b \cdot c}{2}$

Musterbeispiel: $b = 13,405$ m; $\beta = 30^0,094$.

Berechnung: 1. $\gamma = 59^0,906$

2. $\log b = 1,12727$

$\log \operatorname{ctg} \beta = 0,23692$

$\log c = 1,36419$

$c = 23,131$

3. $\log b = 1,12727$

$\log \sin \beta = 9,70020 - 10$

$\log a = 1,42707$

$a = 26,734$

4. $\log b = 1,12727$

$\log c = 1,36419$

$2,49146$

$\log 2 = 0,30103$

$\log J = 2,19043$

$J = 155,04.$

Antwort: $\gamma = 59^{\circ},906$; $c = 23,131$ m; $a = 26,734$ m;
 $J = 155,04$ qm.

3. Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen aus der Hypotenuse und einer Kathete.

Geg. a, b .

Ges. c, β, γ, J .

Lösung: $c^2 = a^2 - b^2$ (Pythagoras)

$$1. c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Bei grossen Zahlen rechnet man:

$$c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$$

$$2. \sin \beta \left. \vphantom{\begin{matrix} 2. \\ 3. \end{matrix}} \right\} = \frac{b}{a}$$

$$3. \cos \gamma \left. \vphantom{\begin{matrix} 2. \\ 3. \end{matrix}} \right\} = \frac{b}{a}$$

$$4. J = \frac{bc}{2}.$$

Anmerkung. Man kann auch rechnen:

$$1. \sin \beta \left. \vphantom{\begin{matrix} 1. \\ 2. \end{matrix}} \right\} = \frac{b}{a}$$

$$2. \cos \gamma \left. \vphantom{\begin{matrix} 1. \\ 2. \end{matrix}} \right\} = \frac{b}{a}$$

$$3. c = a \cdot \sin \gamma.$$

Musterbeispiel: $a = 25,009$ m; $b = 16,343$ m.

Berechnung:

1. $a + b = 41,352$	2. u. 3.	$\log b = 1,21333$
$a - b = 8,666$		$\log a = 1,39809$
$\log(a + b) = 1,61650$		$\log \sin \beta \left. \vphantom{\begin{matrix} 2. \\ 3. \end{matrix}} \right\} = 9,81524 - 10$
$\log(a - b) = 0,93782$		$\log \cos \gamma \left. \vphantom{\begin{matrix} 2. \\ 3. \end{matrix}} \right\} = 9,81524 - 10$
$2,55432$		$\beta = 40^{\circ},806$
$\log c = 1,27716$		$\gamma = 49^{\circ},194$
$c = 18,93$		

$$4. \log b = 1,21333$$

$$\log c = 1,27716$$

$$2,49049$$

$$\log 2 = 0,30103$$

$$\log J = 2,18946$$

$$J = 154,69.$$

Antwort: $c = 18,93$ m; $\beta = 40^{\circ},806$; $\gamma = 49^{\circ},194$;
 $J = 154,69$ qm.

Anmerkung. Rechnet man auf die in der obigen Anmerkung angegebenen Weise, so erhält man dasselbe Ergebnis.

4. Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen aus den beiden Katheten.

Geg. b, c .

Ges. β, γ, a, J .

Lösung: 1. $\operatorname{tg} \beta \Big| = \frac{b}{c}$
 2. $\operatorname{ctg} \gamma \Big|$
 3. $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ (Pythagoras), oder $a = \frac{b}{\sin \beta}$
 4. $J = \frac{b \cdot c}{2}$.

Anmerkung. Die Formel $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ wendet man nur bei kleinen Zahlen an.

Musterbeispiel a: $b = 12 \text{ m}$; $c = 5 \text{ m}$.

Berechnung:

1. u. 2. $\log b = 1,07918$ $\log c = 0,69897$ $\log \operatorname{tg} \beta \Big = 0,38021$ $\log \operatorname{ctg} \gamma \Big $ $\beta = 67^{\circ},38$ $\gamma = 22^{\circ},62$	3. $a = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$ 4. $J = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$.
--	--

Antwort: $\beta = 67^{\circ},38$; $\gamma = 22^{\circ},62$; $a = 13 \text{ m}$; $J = 30 \text{ qm}$.

Musterbeispiel b: $b = 1,3009 \text{ m}$; $c = 0,8074 \text{ m}$.

Berechnung:

1. u. 2. $\log b = 0,11425$ $\log c = 0,90709 - 1$ $\log \operatorname{tg} \beta \Big = 0,20716$ $\log \operatorname{ctg} \gamma \Big $ $\beta = 58^{\circ},175$ $\gamma = 31^{\circ},825$ 3. $\log b = 0,11425$ $\log \sin \beta = 9,92925 - 10$ $\log a = 0,18500$ $a = 1,5311$	4. $\log b = 0,11425$ $\log c = 0,90709 - 1$ $0,02134$ $\log 2 = 0,30103$ $\log J = 0,72031 - 1$ $J = 0,52519$.
---	--

Antwort: $\beta = 58^{\circ},175$; $\gamma = 31^{\circ},825$; $a = 1,5311 \text{ m}$; $J = 0,52519 \text{ qm}$.

§ 214. Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks.

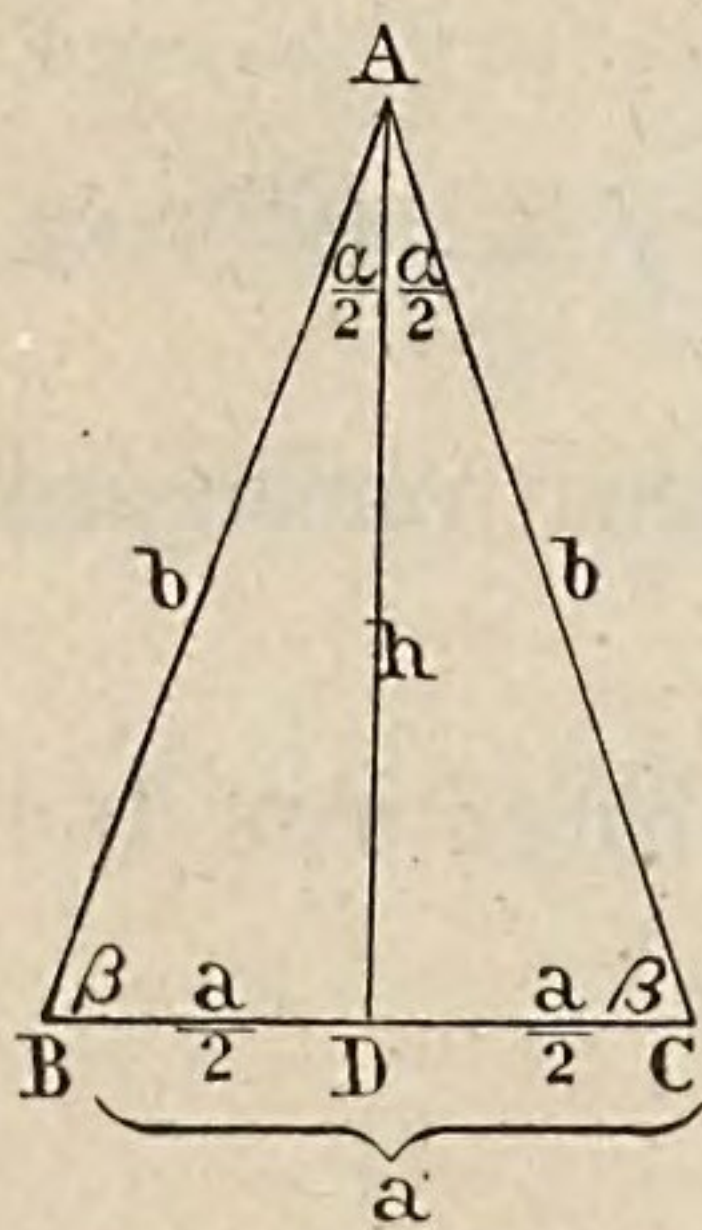
Wir unterscheiden 5 Fälle:

1. Ein gleichschenkliges Dreieck zu berechnen aus der Basis und dem Winkel an der Spitze.

Geg. a , α .

Ges. β , b , h , J .

Lösung: Ziehe ich die Höhe $AD = h$, so halbiert diese die Basis und den Winkel an der Spitze (§ 31₃). Ferner ist $\sphericalangle C = B$ (§ 26) $= \beta$.



Demnach ist

$$1. \quad \beta = \frac{2R - \alpha}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{b}$$

$$2. \quad b = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{h}{\frac{a}{2}}$$

$$3. \quad h = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

$$4. \quad J = \frac{a \cdot h}{2}.$$

Beispiel: $a = 156,77 \text{ m}$; $\alpha = 35^{\circ},749$.

Antwort: $\beta = 72^{\circ},126$; $b = 255,38 \text{ m}$; $h = 243,05 \text{ m}$;
 $J = 19052 \text{ qm}$.

Anmerkung. Ganz entsprechend berechnet sich das gleichschenklige Dreieck aus der Basis und dem Winkel an derselben; es ist dann $\sphericalangle \alpha = 2R - 2\beta$.

2. Ein gleichschenkliges Dreieck zu berechnen aus dem Schenkel und dem Winkel an der Basis.

Geg. b, β .

Ges. α, a, h, J .

Lösung. 1. $\sphericalangle \alpha = 2R - 2\beta$

$$\cos \beta = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{a}{2b}$$

$$2. \quad a = 2b \cos \beta$$

$$\sin \beta = \frac{h}{b}$$

$$3. \quad h = b \sin \beta$$

$$4. \quad J = \frac{a \cdot h}{2}.$$

Beispiel: $b = 13,456 \text{ m}$; $\beta = 39^{\circ},357$.

Antwort: $\alpha = 101^{\circ},286$; $a = 20,809 \text{ m}$; $h = 8,5332 \text{ m}$;
 $J = 88,783 \text{ qm}$.

Anmerkung. Ganz entsprechend berechnet sich das gleichschenklige Dreieck aus dem Schenkel und dem Winkel an der Spitze; es ist dann $\sphericalangle \beta = \frac{2R - \alpha}{2}$.

3. Ein gleichschenkliges Dreieck zu berechnen aus Basis und Schenkel.

Geg. a, b .

Ges. α, β, h, J .

Lösung:

$$\left. \begin{array}{l} 1. \sin \frac{\alpha}{2} \\ 2. \cos \beta \end{array} \right\} = \frac{a}{2b}$$

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \text{ (Pythagoras)}$$

$$3. h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$4. J = \frac{a \cdot h}{2}.$$

Anmerkung. Bei grossen Zahlen rechnet man

$$h = \sqrt{\left(b + \frac{a}{2}\right) \left(b - \frac{a}{2}\right)}$$

oder auch

$$\sin \beta = \frac{h}{b}$$

$$h = b \cdot \sin \beta.$$

Beispiel: $b = 22,349 \text{ m}; a = 24,258 \text{ m}$.

Antwort: $\beta = 57^{\circ},132; \alpha = 65^{\circ},736; h = 18,772 \text{ m}; J = 227,68 \text{ qm}$.

4. Ein gleichschenkliges Dreieck zu berechnen aus Schenkel und der zur Basis gehörigen Höhe.

Geg. b, h .

Ges. β, α, a, J .

Lösung:

$$\left. \begin{array}{l} 1. \sin \beta \\ 2. \cos \frac{\alpha}{2} \end{array} \right\} = \frac{h}{b}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - h^2 \text{ (Pythagoras)}$$

$$\frac{a}{2} = \sqrt{b^2 - h^2}$$

$$3. a = 2 \sqrt{b^2 - h^2}$$

$$4. J = \frac{a \cdot h}{2}.$$

Anmerkung. Bei grossen Zahlen rechnet man

$$a = 2 \sqrt{(b+h)(b-h)}$$

oder auch $\cos \beta = \frac{a}{2b}$
 $a = 2b \cos \beta.$

Beispiel: $b = 15,673 \text{ m}; h = 9,8547 \text{ m}.$

Antwort: $\beta = 38^0,96; \alpha = 102^0,08; a = 24,375 \text{ m};$
 $J = 120,11 \text{ qm}.$

5. Ein gleichschenkliges Dreieck zu berechnen aus Basis und der zugehörigen Höhe.

Geg. $a, h.$

Ges. $\alpha, \beta, b, J.$

Lösung: $\left. \begin{array}{l} 1. \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \\ 2. \operatorname{ctg} \beta \end{array} \right\} = \frac{a}{2h}$

$$3. b = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \text{ oder } b = \frac{h}{\sin \beta}$$

$$4. J = \frac{a \cdot h}{2}.$$

Anmerkung. Die Formel $b = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ wendet man nur bei kleinen Zahlen an.

Beispiel: $a = 20,456 \text{ m}; h = 18,359 \text{ m}.$

Antwort: $\alpha = 58^0,246; \beta = 60^0,877;$

$$b = 21,016 \text{ m} \left(\frac{h}{\sin \beta} \right); \text{ oder } = 21,015 \text{ m} \left(\sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \right);$$

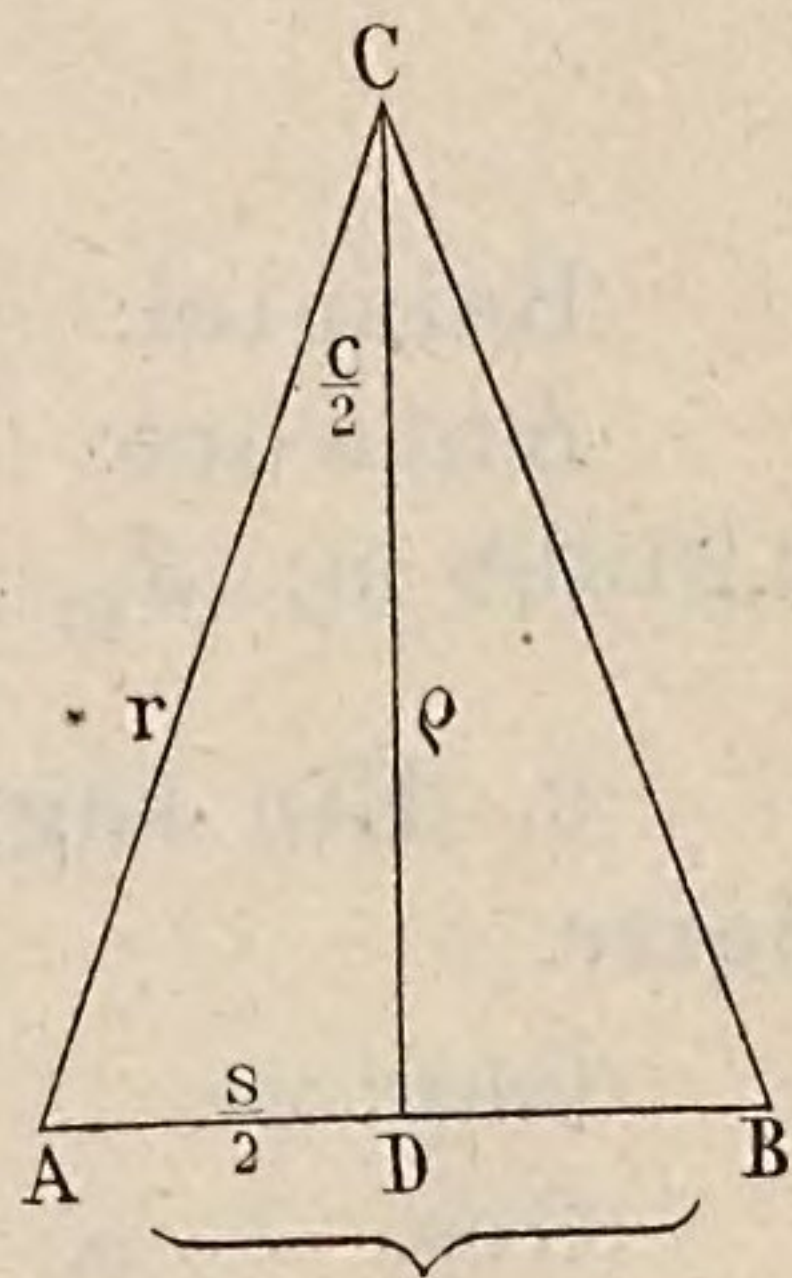
$$J = 187,78 \text{ qm}.$$

§ 215. Berechnung des regulären Polygons.

Bei einem regulären Polygon bezeichnen wir gemäss § 52 in dem $\triangle CAB$ die Schenkel $CA = CB$ mit r (grosser Radius), die Höhe CD mit ϱ (kleiner Radius), die Seite AB mit s , den Winkel an der Spitze mit C (Centriwinkel), den Umfang mit U und den Inhalt mit J . $r_7, \varrho_7, s_7 \dots$ bezeichnen dann die bezüglichen Stücke im regulären Siebeneck, allgemein $r_n, \varrho_n, s_n \dots$ im regulären n Eck. Es ist dann nach § 31 $AD = \frac{s}{2}$ und

$$\sphericalangle ACD = \frac{C}{2}. \text{ Es ist aber } C_n = \frac{360^0}{n} \text{ (§ 52)}$$

$$\text{und folglich } \sphericalangle ACD = \frac{180^0}{n}.$$



Wir unterscheiden 3 Fälle, die direkt aus den Berechnungen des gleichschenkligen Dreiecks hervorgehen.

1. Ein reguläres Polygon zu berechnen aus seinem grossen Radius.

Geg. r .

Ges. s , ϱ , U , J .

Lösung:

$$\begin{aligned} 1. \quad s &= 2r \sin \frac{180^\circ}{n} \\ 2. \quad \varrho &= r \cos \frac{180^\circ}{n} \\ 3. \quad U &= n \cdot s. \end{aligned}$$

Da offenbar n untereinander kongruente Bestimmungs-dreiecke den Inhalt des regulären n Ecks ausmachen, so ist

$$J = \frac{n s \cdot \varrho}{2}$$

oder

$$4. \quad J = \frac{U \cdot \varrho}{2}.$$

Beispiel: $r_{10} = 17$ m.

Antwort: $s_{10} = 10,507$ m; $\varrho_{10} = 16,168$ m; $U_{10} = 105,07$ m; $J_{10} = 849,4$ qm.

2. Ein reguläres Polygon zu berechnen aus seinem kleinen Radius.

Geg. ϱ .

Ges. r , s , U , J .

Lösung:

$$\begin{aligned} 1. \quad r &= \frac{\varrho}{\cos \frac{180^\circ}{n}} \\ 2. \quad s &= 2\varrho \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \\ 3. \quad U &= n \cdot s \\ 4. \quad J &= \frac{U \cdot \varrho}{2}. \end{aligned}$$

Beispiel: $\varrho_{13} = 0,3456$ m.

Antwort: $r_{13} = 0,35594$ m; $s_{13} = 0,17036$ m; $U_{13} = 2,21468$ m; $J_{13} = 0,38269$ qm.

3. Ein reguläres Polygon zu berechnen aus seiner Seite.

Geg. s .

Ges. r , ϱ , U , J .

Lösung:

$$1. r = \frac{s}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$$

$$2. \varrho = \frac{s}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}.$$

$$3. U = n \cdot s$$

$$4. J = \frac{U \cdot \varrho}{2}.$$

Beispiel: $s_{29} = 13,458$ m.

Antwort: $r = 62,236$ m; $\varrho = 61,871$ m; $U = 390,28$ m;
 $J = 12074$ qm.

§ 216. Berechnung der Zahl π . (Vgl. § 74 und 75.)

Mit Hilfe des regulären Polygons lässt sich, wie in der Planimetrie ausgeführt worden ist, die Zahl π angenähert berechnen. Es soll dies mit Hilfe trigonometrischer Rechnung hier an einem Beispiele gezeigt werden.

Es seien $ABCD \dots$ und $A'B'C'D' \dots$ reguläre n Ecke von derselben Seitenzahl in und um einen Kreis vom Radius r beschrieben. Ferner sei $OMM' \perp AB$ und $A'B'$. Bezeichnet man ferner den Inhalt des eingeschriebenen n Ecks mit J_1 , den des umschriebenen mit J_2 , so ist augenscheinlich

$$\begin{aligned} \text{Kreisinhalt} &> J_1 \\ &< J_2. \end{aligned}$$

Nun ist nach dem vorigen Paragraphen:

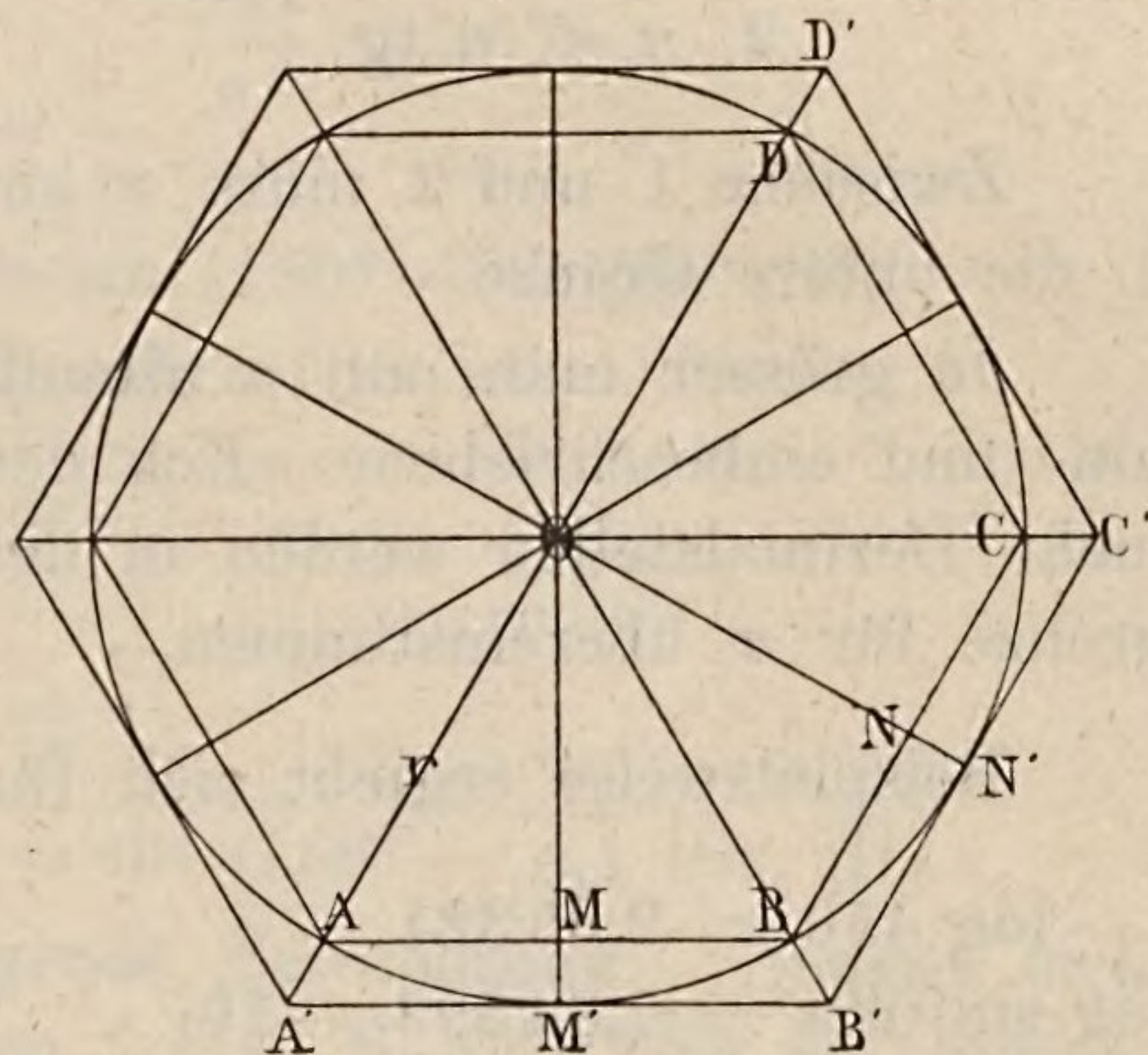
$$J_1 = \frac{n \cdot AB \cdot OM}{2}$$

$$J_2 = \frac{n \cdot A'B' \cdot OM'}{2}$$

$$AB = 2r \sin \frac{180^\circ}{n}$$

$$OM = r \cos \frac{180^\circ}{n}$$

$$OM' = r$$



$$A'B' = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$$

$$J_1 = nr^2 \sin \frac{180^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n}$$

$$J_2 = nr^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

Nun ist der Inhalt des Kreises $= r^2 \pi$ (§ 77)

$$r^2 \pi > nr^2 \sin \frac{180^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n}$$

$$r^2 \pi < nr^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

Dividiert man durch

$$r^2 = r^2, \text{ so ist}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1. \pi > n \sin \frac{180^\circ}{n} \cdot \cos \frac{180^\circ}{n} \\ 2. \pi < n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \end{array} \right\} \text{ (Gr. VI}_4\text{)}$$

Zwischen 1. und 2. muss π enthalten sein. 1. ist die obere, 2. die untere Grenze.

Je grösser man nun n nimmt, desto mehr werden sich das um- und einbeschriebene n Eck dem Kreise anschmiegen, umso mehr Dezimalstellen werden in der unteren und oberen Fehlergrenze für π übereinstimmen.

Beispielsweise ergibt sich für das 450 Eck $\left(\frac{180^\circ}{n} = 0^\circ,4\right)$.

$$\begin{array}{r} \log 450 = 2,65321 \\ \log \sin 0^\circ,4 = 7,84393 - 10 \\ \log \cos 0^\circ,4 = 9,99999 - 10 \\ \hline 0,49713 \end{array}$$

$$\pi > 3,1414\dots$$

$$\begin{array}{r} \log 450 = 2,65321 \\ \log \operatorname{tg} 0^\circ,4 = 7,84394 - 10 \\ \hline 0,49715 \end{array}$$

$$\pi < 3,1416\dots$$

Der Wert von π muss also zwischen 3,1414... und 3,1416... liegen. Es ist:

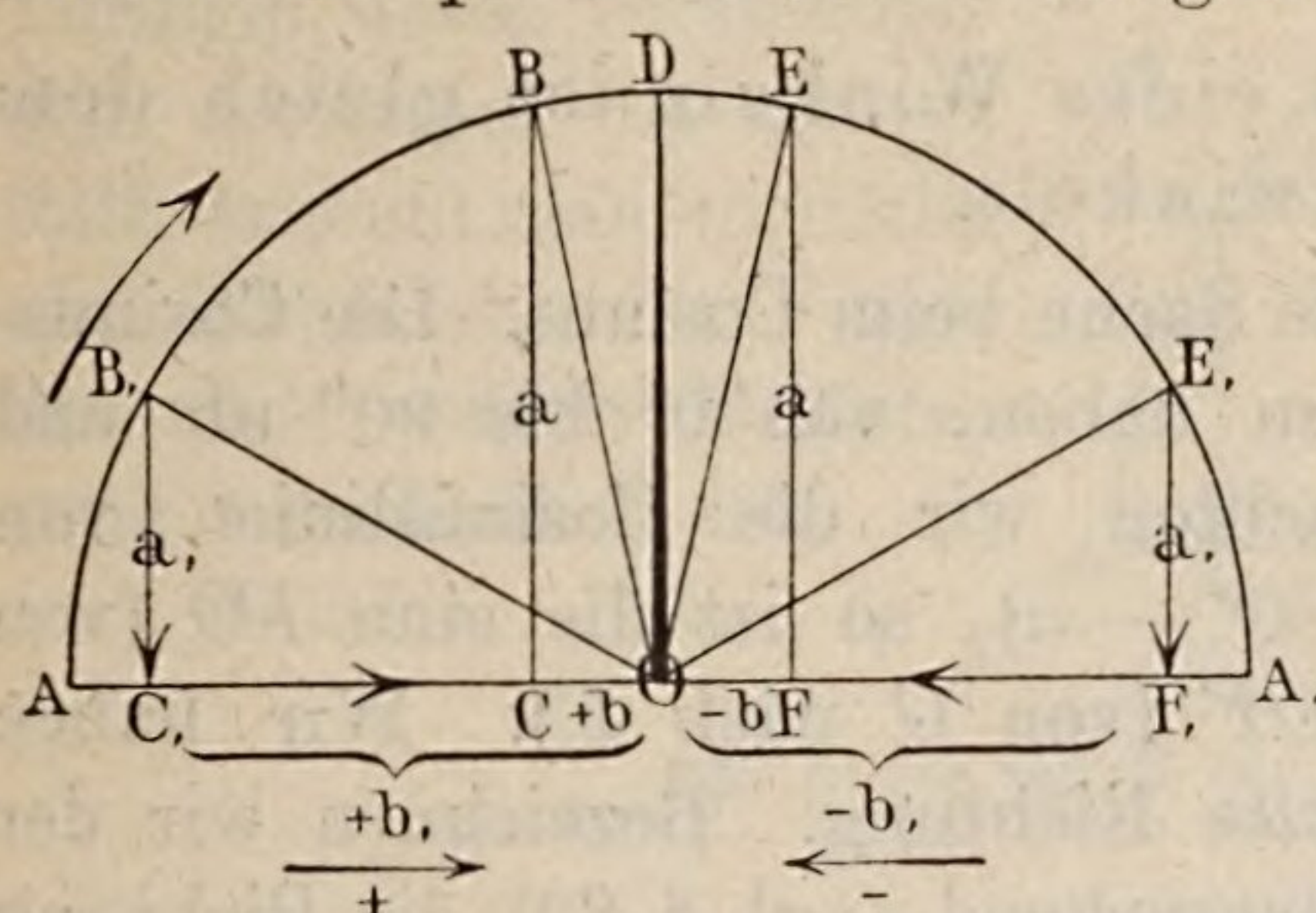
$$\begin{array}{l} \pi = 3,14159\dots \\ \text{und } \log \pi = 0,49715\dots \end{array}$$

V. Formeln und Sätze vom schiefwinkligen Dreieck.

§ 217. Die Funktionen des stumpfen Winkels.

Denkt man den beweglichen Schenkel eines Winkels (vgl. § 211) sich weiter drehen, so dass der Winkel α stumpf wird, z. B. $\angle AOE$, und fällt man das Lot $EF = a$ auf die Ver-

längerung von AO , so stellt, wenn man sich den Begriff des Sinus auf den stumpfen Winkel übertragen denkt, dieses Lot die Sinuslinie



des Winkels AOE dar, ebenso $E_1F_1 = a_1$ die Sinuslinie von AOE_1 . Die Sinuslinie wird bei wachsendem Winkel entsprechend kleiner, sie wird $= \frac{1}{2}$, wenn der Winkel 150° , sein Nebenwinkel 30° , und wird $= 0$, wenn der Winkel zu 180° wird.

a und a_1 sind aber nicht nur die Sinuslinien von den stumpfen Winkeln AOE und AOE_1 , sondern auch die der spitzen Winkel EOA_1 und E_1OA_1 . Bezeichnen wir $\sphericalangle AOE$ mit α , so ist $\sphericalangle EOA_1 = 180^\circ - \alpha$. Wir haben demnach:

$$\sin \alpha = \frac{a}{r}$$

$$\sin (180^\circ - \alpha) = \frac{a}{r}$$

$$\sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha) \text{ (Gr. III).}$$

Bezeichnen wir $\sphericalangle AOE_1$ mit α_1 , so ist

$$\sin \alpha_1 = \frac{a_1}{r}$$

$$\sin (180^\circ - \alpha_1) = \frac{a_1}{r}$$

$$\sin \alpha_1 = \sin (180^\circ - \alpha_1) \text{ (Gr. III).}$$

Dasselbe lehrt auch folgende Betrachtung. Bewegt sich der Schenkel OB um den Bogen DE (z. B. 20°) über 90° hinaus, so ist, wenn Bogen BD ebenfalls 20° ist, $\triangle EOF \cong \triangle BOC$ (K. II), da ja $\sphericalangle EOF = 70^\circ = \sphericalangle BOC$ ist; demnach ist $BC = EF = a$ (h. St.). Ebenso ist, wenn $\widehat{E_1D} = \widehat{B_1D}$, $\triangle E_1OF_1 \cong \triangle B_1OC_1$ und demnach $E_1F_1 = B_1C_1 = a_1$.

Daraus folgt wieder:

$$\sin AOE \left(\frac{a}{r} \right) = \sin A_1OE \left(\frac{a}{r} \right)$$

$$\sin AOE_1 \left(\frac{a_1}{r} \right) = \sin A_1OE_1 \left(\frac{a_1}{r} \right).$$

Es ist demnach z. B.

$$\sin 110^\circ = \sin 70^\circ$$

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ$$

$$\sin 175^\circ = \sin 5^\circ \text{ u. s. w.}$$

oder allgemein

$$\sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha).$$

In Worten: Der Sinus eines Winkels ist gleich dem Sinus seines Supplementwinkels.

Anders gestaltet sich die Sache beim Cosinus. Die Cosinuslinie nimmt, wie wir gesehen haben, von 0° bis 90° ab und wird bei 90° zu 0. Betrachten wir die Cosinuslinien von $\sphericalangle AOE$ (α) und A_1OE ($180^\circ - \alpha$), so ist die eine FO (von F nach O) und die andere OF (von O nach F). Wir haben hier genau die entgegengesetzte Richtung. Bezeichnen wir der algebraischen Zahlenreihe entsprechend (vgl. § 82) die Richtung von links nach rechts mit $+$, so sind, wenn $CO = +b$, $C_1O = +b_1$ sind, $FO = -b$ und $F_1O = -b_1$. Demnach sind die Cosinuslinien von 90° bis 180° negativ.

Wir erhalten also, wenn wir die bei Sinus angestellte Betrachtung auf den Cosinus übertragen:

$$\cos AOE = \frac{-b}{r}$$

$$\cos A_1OE = \cos AOB = \frac{+b}{r}.$$

ebenso $\cos AOE_1 = \frac{-b_1}{r}$

$$\cos A_1OE_1 = \cos AOB_1 = \frac{+b_1}{r}.$$

Hieraus folgt weiter $\frac{b}{r} = -\cos AOE$

$$\frac{b}{r} = \cos A_1OE$$

$$\cos A_1OE = -\cos AOE \text{ (Gr. III)}$$

$$\text{oder } \cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\text{oder } \cos \alpha = -\cos (180^\circ - \alpha).$$

In Worten: Der Cosinus eines Winkels ist gleich dem negativen Cosinus seines Supplementwinkels.

Z. B. $\cos 110^\circ = -\cos 70^\circ$
 $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ$
 $\cos 175^\circ = -\cos 5^\circ$ u. s. w.
 $\cos 180^\circ = -\cos 0^\circ = -1$ (§ 211).

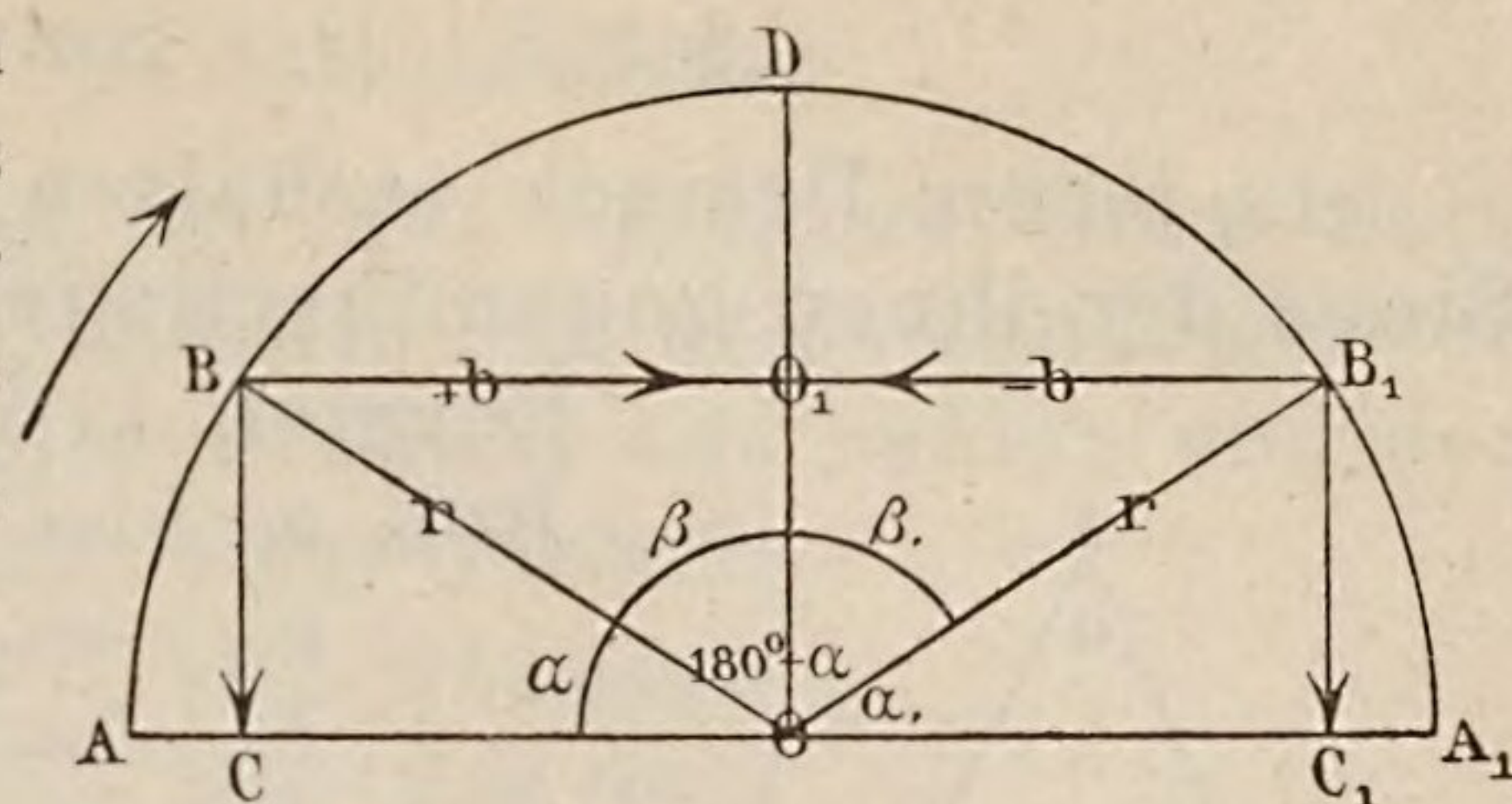
Für die Berechnung der schiefwinkligen Dreiecke hat man nur die beiden neuen Formeln nötig:

$$\sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha) \text{ und}$$

$$\cos \alpha = -\cos (180^\circ - \alpha).$$

Diese beiden wichtigen Formeln, deren Verständnis dem Anfänger oft schwer fällt, erkennt man ebenfalls aus nebenstehender Figur, die ohne weitere Erläuterung verständlich ist.

Es ist:



$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{BO_1}{r}$$

$$\cos (180^\circ - \alpha) = \cos \alpha_1 = \sin \beta_1 = \frac{B_1O_1}{r}$$

Nun sind BO_1 und B_1O_1 als homologe Stücke kongruenter Dreiecke freilich gleich, haben aber genau entgegengesetzte Richtung. Das drückt man, wie schon erwähnt, in der Mathematik durch das entgegengesetzte Vorzeichen aus. Ist daher

$BO_1 = +b$, so ist $B_1O_1 = -b$, und wir erkennen aus

$$\cos \alpha = \frac{+b}{r}$$

$$\text{und } \cos (180^\circ - \alpha) = \frac{-b}{r},$$

dass $\cos \alpha = -\cos (180^\circ - \alpha)$ oder $\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ ist.

$$\text{Bei } \sin \alpha = \frac{BC}{r} \quad \text{und}$$

$$\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha_1 = \frac{B_1C_1}{r}$$

kommt beide Male dieselbe Richtung in Betracht, und es ist daher, da BC und B_1C_1 als homologe Stücke kongruenter Dreiecke einander gleich sind,

$$\sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha).$$

Anmerkung. Für tg und ctg erhält man in ganz entsprechender Weise für die stumpfen Winkel die Formeln:

$$\begin{aligned} \text{tg } \alpha &= -\text{tg } (180^\circ - \alpha) \quad \text{und} \\ \text{ctg } \alpha &= -\text{ctg } (180^\circ - \alpha). \end{aligned}$$

Für die Funktionen der stumpfen Winkel sind also immer die Funktionen der Supplementwinkel zu nehmen und zwar bei Sinus positiv, bei Cosinus, Tangens und Cotangens aber negativ. Hierbei liegen

$\sin$	90°	bis	$\sin$	180°	zwischen	1	und	0
$\cos$	90°	„	$\cos$	180°	„	0	und	-1
tg	90°	„	tg	180°	„	-	∞	und 0
ctg	90°	„	ctg	180°	„	0	und	-

§ 218. Der Sinussatz.

In jedem Dreieck verhalten sich die Seiten wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Formel. $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$.

Beh. $a : b = \sin \alpha : \sin \beta$

$a : c = \sin \alpha : \sin \gamma$

$b : c = \sin \beta : \sin \gamma$.

H. K. Höhe CF .

Bew. $\sin \alpha = \frac{CF}{b}$; $\sin \beta = \frac{CF}{a}$

$CF = b \cdot \sin \alpha$; $CF = a \cdot \sin \beta$

$a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha$ (Gr. III)

oder $a : b = \sin \alpha : \sin \beta$. W. z. b. w.

Ebenso werden, wenn man von B und A aus die Höhen fällt, die beiden andern Teile bewiesen.

Anderer Beweis:

Zieht man den umschriebenen Kreis (§ 50), so ist $\sphericalangle BOC = 2\alpha$, $\sphericalangle AOC = 2\beta$ und $\sphericalangle AOB = 2\gamma$ (§ 47), demnach $\sphericalangle BOD = \alpha$, $\sphericalangle COE = \beta$ und $\sphericalangle BOF = \gamma$ (§ 31).

Da nun $BD = \frac{a}{2}$, $CE = \frac{b}{2}$

und $BF = \frac{c}{2}$ ist, so folgt aus

den rechtwinkligen Dreiecken BOD , COE und BOF

$$\sin \alpha = \frac{a}{2r}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{2r}$$

$$\sin \gamma = \frac{c}{2r}$$

$$\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = \frac{a}{2r} : \frac{b}{2r} : \frac{c}{2r} \text{ oder}$$

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma. \text{ W. z. b. w.}$$

Anmerkung. Für den Radius r des umschriebenen Kreises erhält man aus den oben entwickelten Formeln $\sin \alpha = \frac{a}{2r}$ u. s. w.:

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma}.$$

§ 219. Der Cosinussatz.

In jedem Dreieck ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen vermindert um das doppelte Produkt aus beiden und dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels.

$$\begin{aligned}\text{Formel: } a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.\end{aligned}$$

Der Beweis folgt aus dem verallgemeinerten Pythagoras (§ 58). Wir müssen zwei Fälle unterscheiden:

1. Im stumpfwinkligen Dreieck ABC ist:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \cdot CD \quad (\S 58).$$

$$\text{Nun ist } \cos ACD = \frac{CD}{AC}$$

$$CD = AC \cdot \cos ACD$$

$$\sphericalangle ACD = 2R - \gamma \quad (\text{N. } \sphericalangle)$$

$$CD = AC \cdot \cos (2R - \gamma)$$

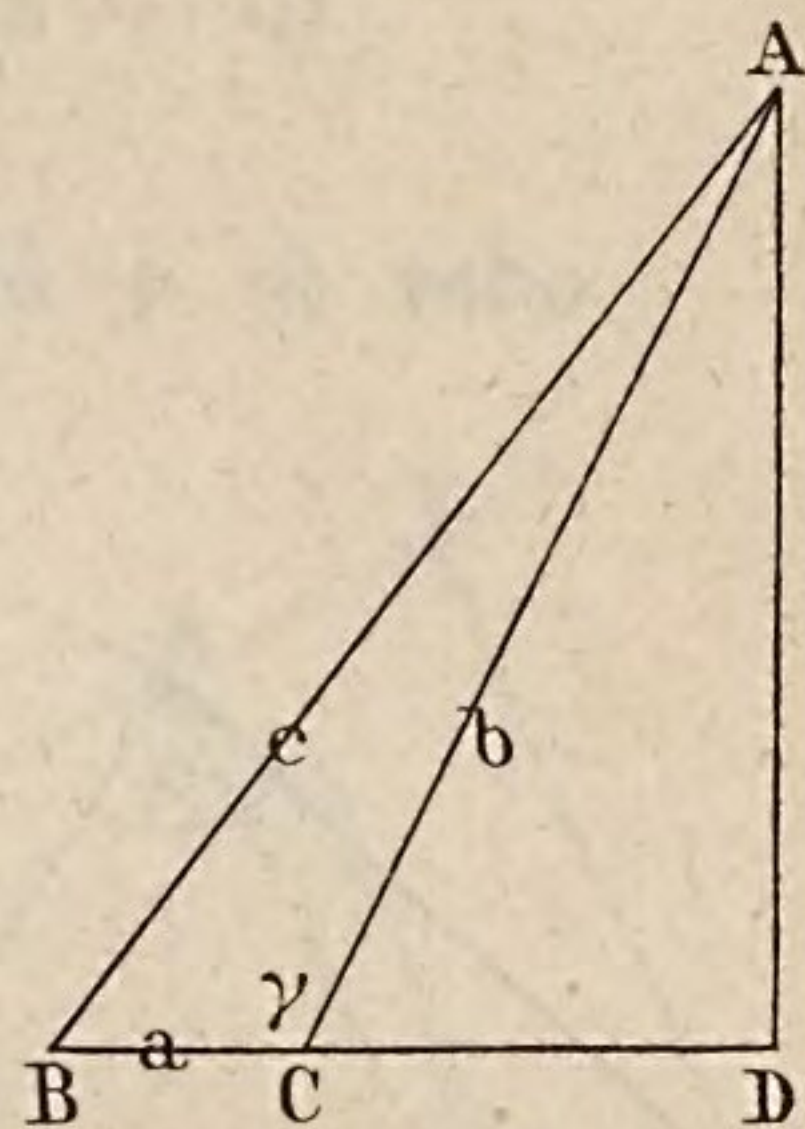
$$\cos (2R - \gamma) = -\cos \gamma$$

$$CD = -AC \cdot \cos \gamma$$

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos \gamma$$

oder

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$



2. Im spitzwinkligen Dreieck ABC ist:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot CD \quad (\S 58).$$

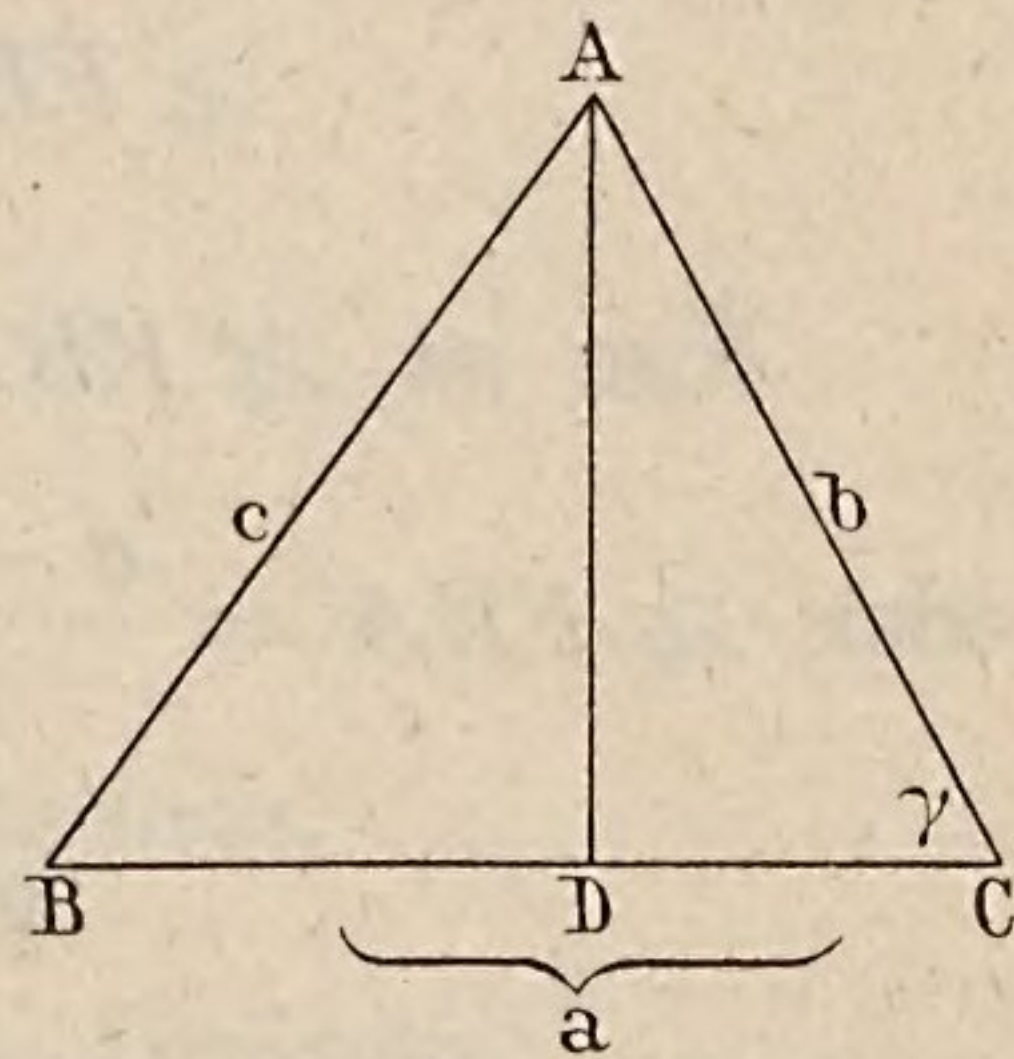
$$\text{Nun ist } \cos \gamma = \frac{CD}{AC}$$

$$CD = AC \cdot \cos \gamma$$

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cos \gamma$$

$$\text{oder } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

W. z. b. w.



Ebenso sind die beiden andern Formeln zu beweisen.

§ 220. Der Tangentensatz.

In jedem Dreieck verhält sich die Summe zweier Seiten zu ihrer Differenz wie Tangens der halben Summe ihrer gegenüberliegenden Winkel zu Tangens der halben Differenz derselben.

§ 221. Vom Inhalt.

Der Inhalt eines jeden Dreiecks ist gleich dem halben Produkt zweier Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.

$$\begin{aligned} \text{Formel:} \quad J &= \frac{ab \sin \gamma}{2} \\ J &= \frac{ac \sin \beta}{2} \\ J &= \frac{bc \sin \alpha}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Beweis: } \left. \begin{aligned} J &= \frac{a \cdot h}{2} \\ J &= \frac{b \cdot h'}{2} \\ J &= \frac{c \cdot h''}{2} \end{aligned} \right\} (\S \cdot 56_{IV})$$

$$\sin \gamma = \frac{h}{b}; \quad \sin \alpha = \frac{h'}{c}; \quad \sin \beta = \frac{h''}{a}$$

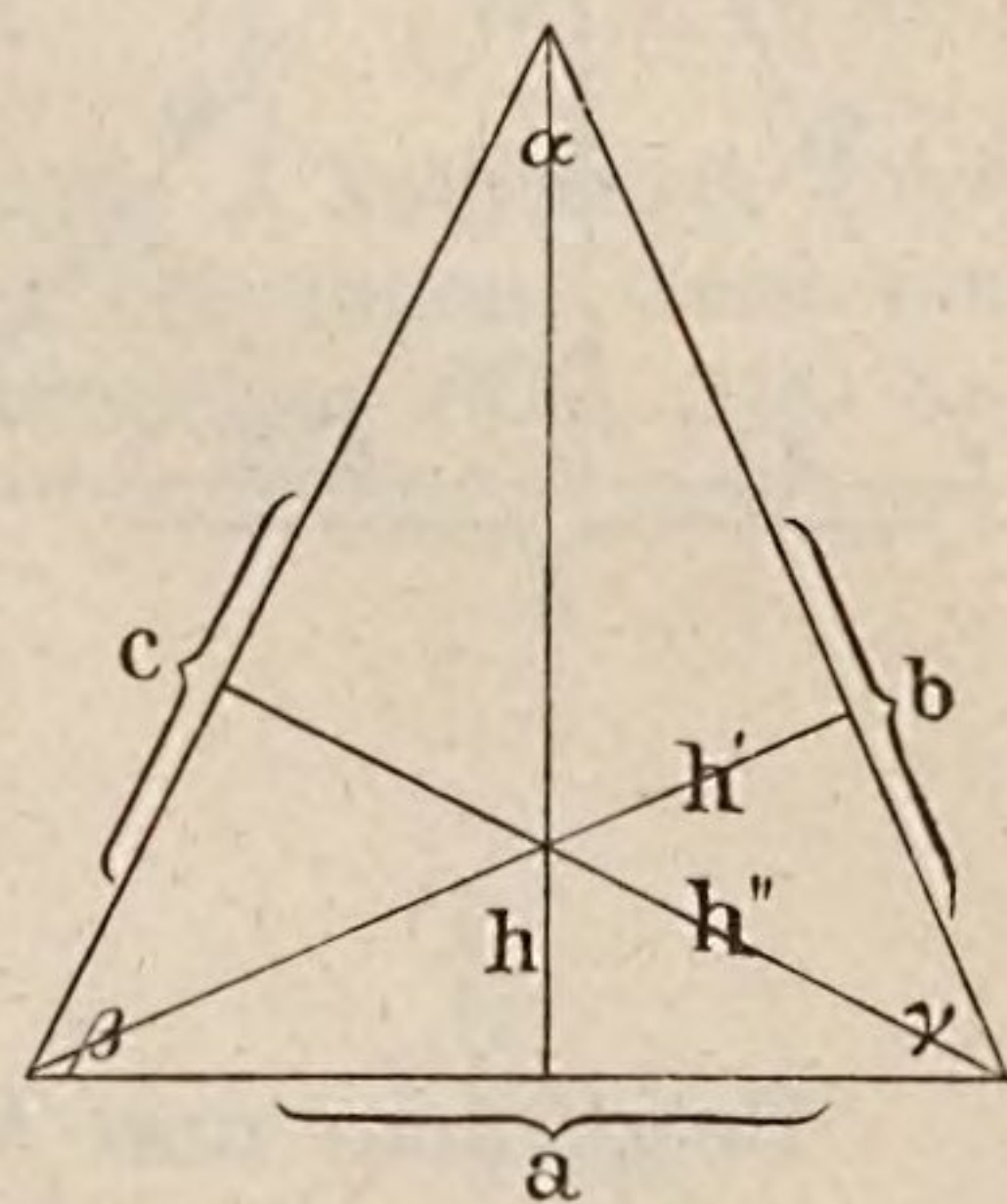
$$\overline{h = b \cdot \sin \gamma; \quad h' = c \cdot \sin \alpha; \quad h'' = a \sin \beta}$$

$$J = \frac{ab \sin \gamma}{2}$$

$$J = \frac{ac \sin \beta}{2}$$

$$J = \frac{bc \sin \alpha}{2}.$$

W. z. b. w.



§ 222. Der Sinussummensatz.

Bezeichnet man den halben Umfang des Dreiecks $\frac{a + b + c}{2}$ mit s , so ist

$$\sin \alpha = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\sin \beta = \frac{2}{ac} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\sin \gamma = \frac{2}{ab} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Dann ist

$$h = \frac{1}{2a} \sqrt{2s \cdot 2(s-a) \cdot 2(s-b) \cdot 2(s-c)}$$

$$h = \frac{1}{2a} \sqrt{16s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$h = \frac{2}{a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Setzt man diesen Wert in $J = \frac{a \cdot h}{2}$ ein, so kommt

$$J = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ und demnach}$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\sin \beta = \frac{2}{ac} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\sin \gamma = \frac{2}{ab} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \quad \text{W. z. b. w.}$$

Anmerkung. Aus der obigen Formel für J kann man leicht den Radius ρ des einbeschriebenen Kreises berechnen, wenn man bedenkt, dass das ganze $\triangle ABC$ aus den 3 Dreiecken BCO , ACO und ABO besteht. Es ist:

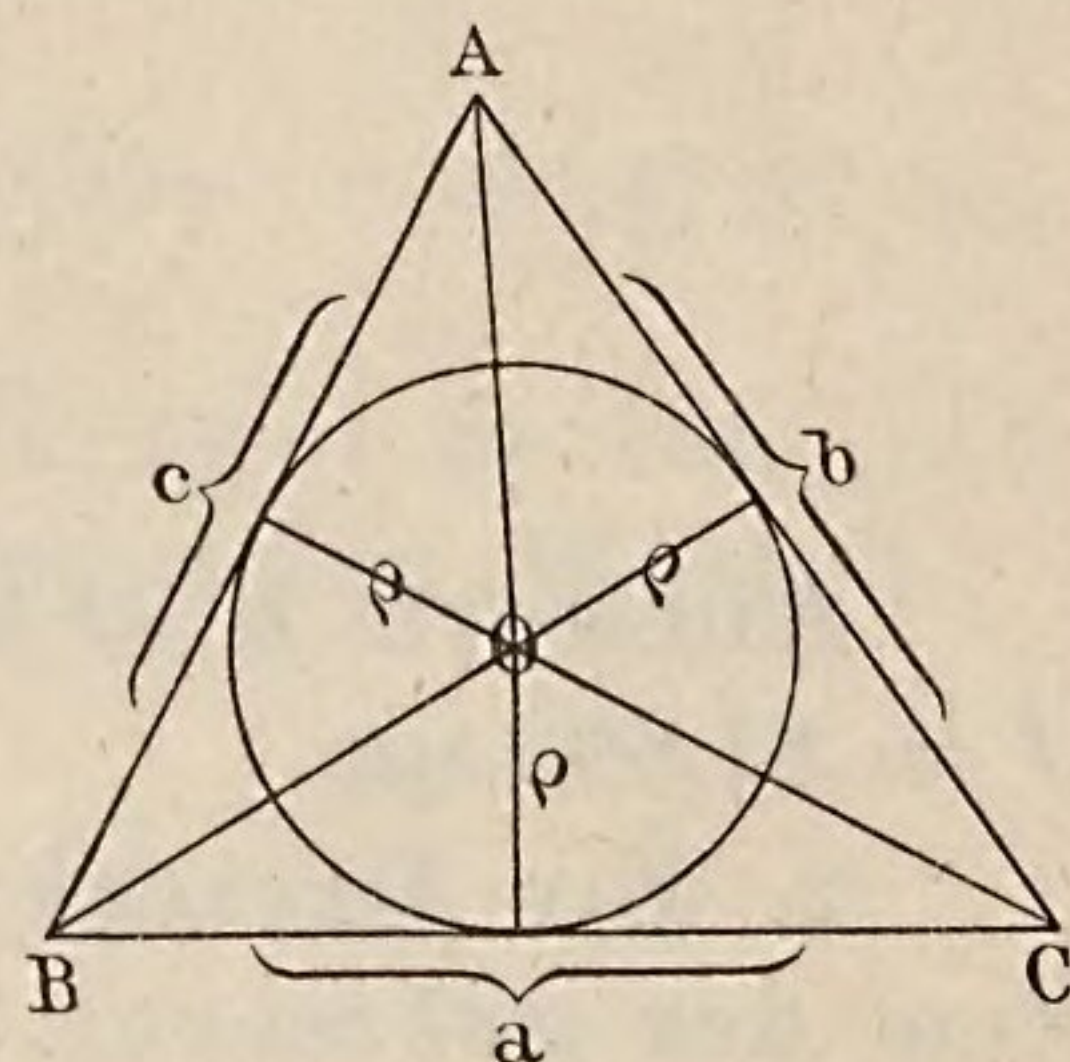
$$\left. \begin{aligned} \triangle BCO &= \frac{a \cdot \rho}{2} \\ \triangle ACO &= \frac{b \cdot \rho}{2} \\ \triangle ABO &= \frac{c \cdot \rho}{2} \end{aligned} \right\} (\S 56 \text{ IV})$$

$$\triangle ABC = \rho \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} \right)$$

$$\text{oder } \frac{J = \rho \cdot s}{\rho = \frac{J}{s}}$$

$$\text{oder } \rho = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$$

$$\text{oder } \rho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$



VI. Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks und des Parallelogramms.

§ 223.

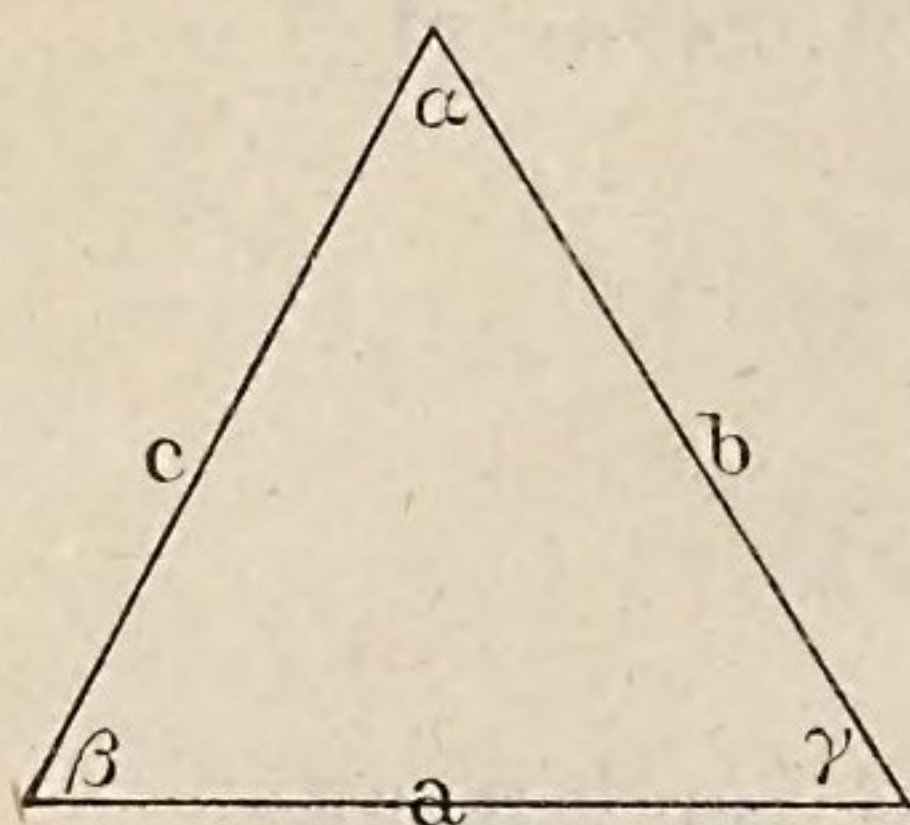
Bei der Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks unterscheiden wir 5 Fälle.

1. Ein Dreieck zu berechnen aus einer Seite und zwei Winkeln.

Geg. a, β, γ .

Ges. α, b, c, J .

Lösung (durch den Sinussatz):



$$1. \quad \alpha = 2R - (\beta + \gamma) \quad (\S 21)$$

$$\underline{b : a = \sin \beta : \sin \alpha \quad (\text{Sinussatz})}$$

$$2. \quad b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$\underline{c : a = \sin \gamma : \sin \alpha \quad (\text{Sinussatz})}$$

$$3. \quad c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$4. \quad J = \frac{a \cdot b \sin \gamma}{2}$$

Musterbeispiel: $a = 20,949 \text{ m}$; $\beta = 31^{\circ},783$; $\gamma = 43^{\circ},006$.

Berechnung: 1. $\alpha = 105^{\circ},211$

$$2. \quad \log a = 1,32116$$

$$\log \sin \beta = 9,72157 - 10$$

$$\underline{1,04273}$$

$$\log \sin \alpha = 9,98451 - 10$$

$$\underline{\log b = 1,05822}$$

$$b = 11,434$$

$$3. \quad \log a = 1,32116$$

$$\log \sin \gamma = 9,83383 - 10$$

$$\underline{1,15499}$$

$$\log \sin \alpha = 9,98451 - 10$$

$$\underline{\log c = 1,17048}$$

$$c = 14,807$$

$$4. \quad \log a = 1,32116$$

$$\log b = 1,05822$$

$$\log \sin \gamma = 9,83383 - 10$$

$$\underline{2,21321}$$

$$\log 2 = 0,30103$$

$$\underline{\log J = 1,91218}$$

$$J = 81,692.$$

Antwort: $\alpha = 105^{\circ},211$; $b = 11,434 \text{ m}$; $c = 14,807 \text{ m}$; $J = 81,692 \text{ qm}$.

2. Ein Dreieck zu berechnen aus zwei Seiten und dem der grösseren Seite gegenüberliegenden Winkel.

Geg. a, b, β

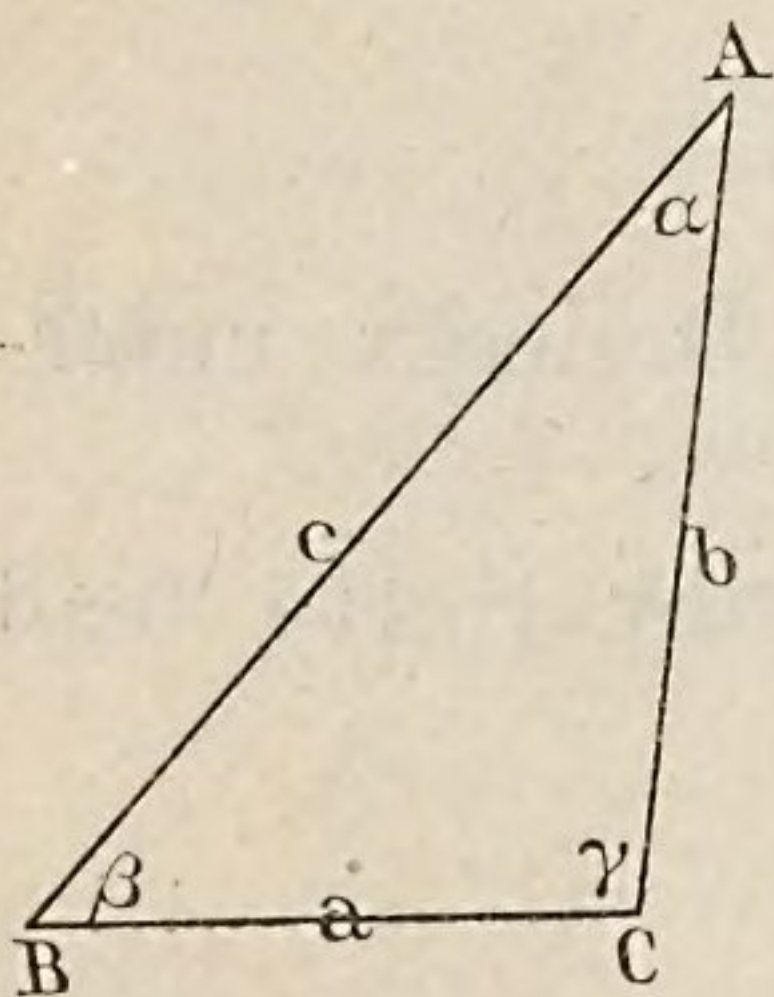
$$b > a.$$

Ges. α, γ, c, J .

Lösung (durch den Sinussatz):

$$\underline{a : b = \sin \alpha : \sin \beta \quad (\text{Sinussatz})}$$

$$1. \quad \sin \alpha = \frac{a \sin \beta}{b}$$



Zu $\log \sin \alpha$ findet man zwei Winkel, einen spitzen und den zugehörigen stumpfen Supplementwinkel. Hier darf wegen $a < b$, also auch $\alpha < \beta$, nur der spitze Winkel genommen werden.

$$2. \gamma = 2R - (\alpha + \beta)$$

$$a : c = \sin \alpha : \sin \gamma \text{ (Sinussatz)}$$

$$3. c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$4. J = \frac{ab \sin \gamma}{2}$$

Musterbeispiel: $a = 88,888 \text{ m}$; $b = 99,999 \text{ m}$; $\beta = 88^{\circ},888$.

Berechnung:

$$1. \begin{array}{r} \log a = 1,94884 \\ \log \sin \beta = 9,99992 - 10 \\ \hline \end{array}$$

$$1,94876$$

$$\log b = 2,00000$$

$$\log \sin \alpha = 9,94876 - 10$$

$$\alpha = 62^{\circ},713$$

$$2. \gamma = 28^{\circ},399$$

$$4. \log a = 1,94884$$

$$\log b = 2,00000$$

$$\log \sin \gamma = 9,67725 - 10$$

$$3,62609$$

$$\log 2 = 0,30103$$

$$\log J = 3,32506$$

$$J = 2113,8.$$

$$3. \log a = 1,94884$$

$$\log \sin \gamma = 9,67725 - 10$$

$$1,62609$$

$$\log \sin \alpha = 9,94876 - 10$$

$$\log c = 1,67733$$

$$c = 47,57$$

Antwort: $\alpha = 62^{\circ},713$; $\gamma = 28^{\circ},399$; $c = 47,57 \text{ m}$;
 $J = 2113,8 \text{ qm}$.

3. Ein Dreieck zu berechnen aus zwei Seiten und dem der kleineren Seite gegenüberliegenden Winkel.

Geg. a, b, β
 $b < a$.

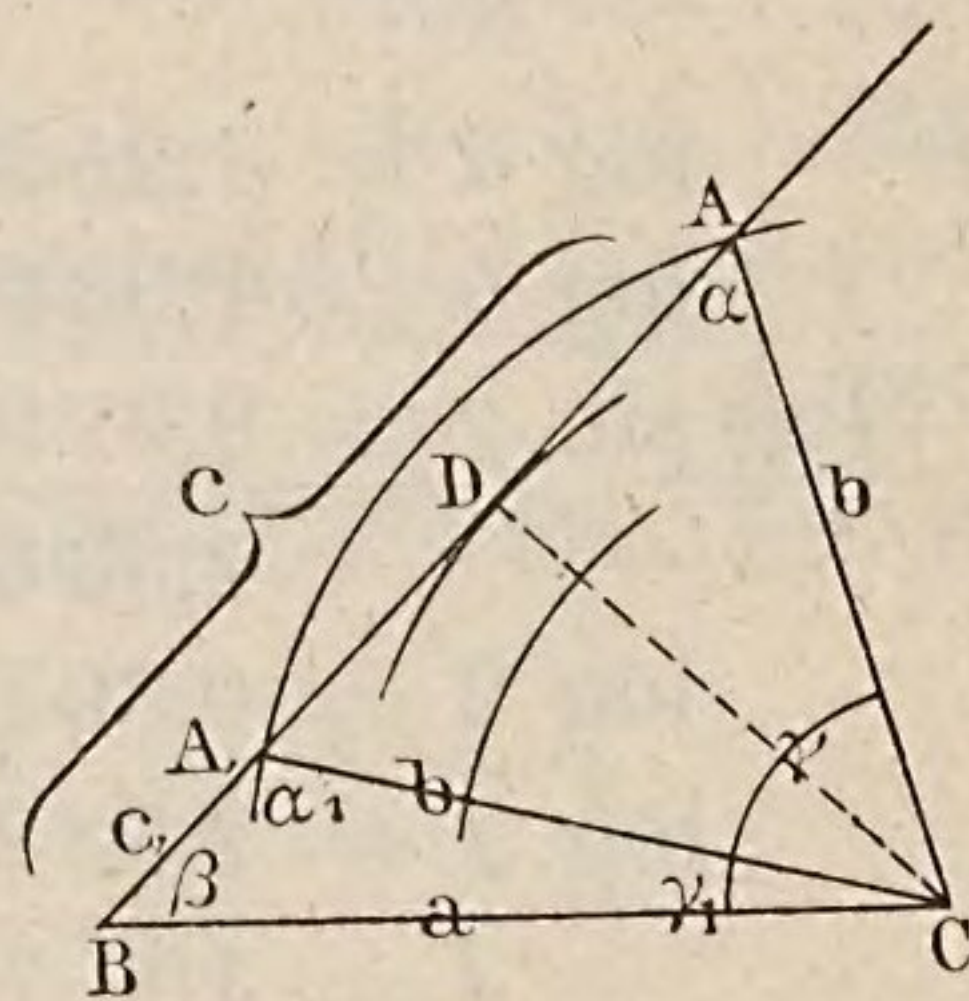
Ges. α, γ, c, J .

Lösung (durch den Sinussatz):

$$a : b = \sin \alpha : \sin \beta \text{ (Sinussatz)}$$

$$1. \sin \alpha = \frac{a \sin \beta}{b}$$

Hier kann erstens der Fall eintreten, dass $\log \sin \alpha$ gleich einer positiven Grösse wird. Hierzu findet man natürlich in der Logarithmentafel keinen Winkel, da $\sin$ nie > 1 , $\log \sin$ also nie positiv sein kann. Dann ist b zu klein angenommen (kleiner als das von C auf den freien Schenkel von β gefällte Lot CD), und die Aufgabe ist nicht lösbar.



Zweitens kann der Fall eintreten, dass $\log \sin \alpha = 0$ wird. Dann ist $\sin \alpha = 1$ und folglich $\alpha = 90^\circ$; b ist dann $= CD$.

Findet man drittens zu $\log \sin \alpha$ in der Tafel einen spitzen Winkel, so muss man bedenken, dass der zugehörige stumpfe Supplementwinkel ebenfalls richtig ist. Man erhält zwei Dreiecke, in denen a, b, β gleich, die übrigen Stücke aber verschieden sind. Man muss also 1^a. α spitz und 1^b. α_1 stumpf in Betracht ziehen. Dann ergibt sich

$$2^a. \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$2^b. \gamma_1 = 180^\circ - (\alpha_1 + \beta)$$

$$3^a. c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$3^b. c_1 = \frac{a \sin \gamma_1}{\sin \alpha_1}$$

$$4^a. J = \frac{ab \sin \gamma}{2}$$

$$4^b. J_1 = \frac{ab \sin \gamma_1}{2}$$

Musterbeispiel: $a = 17,899$ m; $b = 12,048$ m; $\beta = 33^\circ,405$.

Berechnung: 1. $\log a = 1,25283$

$$\log \sin \beta = 9,74080 - 10$$

$$\hline 0,99363$$

$$\log b = 1,08092$$

$$\log \sin \alpha = 9,91271 - 10$$

$$1^a. \alpha = 54^\circ,877; \quad 1^b. \alpha_1 = 125^\circ,123$$

$$2^a. \gamma = 91^\circ,718; \quad 2^b. \gamma_1 = 21^\circ,472$$

$$3^a. \log a = 1,25283$$

$$\log \sin \gamma = 9,99980 - 10$$

$$\hline 1,25263$$

$$\log \sin \alpha = 9,91271 - 10$$

$$\log c = 1,33992$$

$$\hline c = 21,874$$

$$3^b. \log a = 1,25283$$

$$\log \sin \gamma_1 = 9,56354 - 10$$

$$\hline 0,81637$$

$$\log \sin \alpha_1 = 9,91271 - 10$$

$$\log c_1 = 0,90366$$

$$\hline c_1 = 8,0105$$

$$4^a. \log a = 1,25283$$

$$\log b = 1,08092$$

$$\log \sin \gamma = 9,99980 - 10$$

$$\hline 2,33355$$

$$\log 2 = 0,30103$$

$$\log J = 2,03252$$

$$\hline J = 107,78$$

$$4^b. \log a = 1,25283$$

$$\log b = 1,08092$$

$$\log \sin \gamma_1 = 9,56354 - 10$$

$$\hline 1,89729$$

$$\log 2 = 0,30103$$

$$\log J_1 = 1,59626$$

$$\hline J_1 = 39,469.$$

Antwort: $\alpha = 54^{\circ},877$; $\alpha_1 = 125^{\circ},123$; $\gamma = 91^{\circ},718$;
 $\gamma_1 = 21^{\circ},472$; $c = 21,874$ m; $c_1 = 8,0105$ m;
 $J = 107,78$ qm; $J_1 = 39,469$ qm.

4. Ein Dreieck zu berechnen aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

Geg. a, b, γ .

Ges. c, α, β, J .

1. Lösung (durch den Cosinussatz):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad (\text{Cosinussatz})$$

$$1. \quad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$$

$$a : c = \sin \alpha : \sin \gamma \quad (\text{Sinussatz})$$

$$2. \quad \sin \alpha = \frac{a \sin \gamma}{c}$$

$$3. \quad \beta = 2R - (\alpha + \gamma).$$

Da man für $\log \sin \alpha$ wieder zwei Werte findet, wählt man für 2. den Winkel α , wenn $a < b$ ist, und darf dann nur den zugehörigen spitzen Winkel nehmen. Ist aber $b < a$, so berechnet man zunächst den spitzen Winkel β nach dem Sinussatz.

$$2. \quad \sin \beta = \frac{b \sin \gamma}{c}$$

und dann $3. \quad \alpha = 2R - (\gamma + \beta)$

$$4. \quad J = \frac{ab \sin \gamma}{2}.$$

Anmerkung. Diese Berechnung ist dadurch unangenehm, dass $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$ keine ununterbrochene logarithmische Berechnung zulässt; dieser Übelstand wird bei der zweiten Lösung vermieden.

Musterbeispiel: $a = 19,453$ m; $b = 20,999$ m; $\gamma = 105^{\circ},453$.

Berechnung: 1. $\cos 105^{\circ},453 = -\cos 74^{\circ},547$ (§ 217)

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos 74^{\circ},547}.$$

$\log a = 1,28899$	$\log b = 1,32220$	$\log 2 = 0,30103$
$\log a^2 = 2,57798$	$\log b^2 = 2,64440$	$\log a = 1,28899$
$a^2 = 378,43$	$b^2 = 440,96$	$\log b = 1,32220$
$b^2 = 440,96$		$\log \cos 74^{\circ},547 = 9,42561 - 10$
$2ab \cos 74^{\circ},547 = 217,69$		$2,33783$
$c = \sqrt{1037,08}$		$2ab \cos 74^{\circ},547 = 217,69$
$\log 1037,1 = 3,01582$		
$\log c = 1,50791$		
$c = 32,204$		

$$\begin{array}{r}
 2. \quad \log a = 1,28899 \\
 \log \sin \gamma = 9,98401 - 10 \\
 \hline
 1,27300 \\
 \log c = 1,50791 \\
 \hline
 \log \sin \alpha = 9,76509 - 10 \\
 \hline
 \alpha = 35^{\circ},607.
 \end{array}$$

$$3. \quad \beta = 38^{\circ},94.$$

$$\begin{array}{r}
 4. \quad \log a = 1,28899 \\
 \log b = 1,32220 \\
 \log \sin \gamma = 9,98401 - 10 \\
 \hline
 2,59520 \\
 \log 2 = 0,30103 \\
 \hline
 \log J = 2,29417 \\
 \hline
 J = 196,86.
 \end{array}$$

Antwort: $c = 32,204$ m; $\alpha = 35^{\circ},607$; $\beta = 38^{\circ},94$; $J = 196,86$ qm.

2. Lösung (durch den Tangentensatz):

$$(a + b) : (a - b) = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} : \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} \text{ (Tangentensatz).}$$

Hierin sind bekannt $a + b$, $a - b$ und

$$\begin{array}{r}
 \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{180^{\circ} - \gamma}{2} \\
 \hline
 \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{(a - b) \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{a + b}.
 \end{array}$$

Findet man auf diese Weise

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = d, \quad \text{und ist}$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = s, \quad \text{so ist}$$

$$1. \quad \alpha = s + d$$

$$2. \quad \beta = s - d.$$

Ist $a < b$, so rechnet man nach der Formel $(b + a) :$

$$(b - a) = \operatorname{tg} \frac{\beta + \alpha}{2} : \operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2}$$

und erhält dann $\beta = s + d$

und $\alpha = s - d.$

$$c : a = \sin \gamma : \sin \alpha$$

$$3. \quad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$4. \quad J = \frac{ab \sin \gamma}{2}.$$

Musterbeispiel: $a = 3,4499$ m; $b = 0,37856$ m; $\gamma = 103^{\circ},478.$

Berechnung:

$$\begin{aligned}
 1. \quad a + b &= 3,82846 \\
 a - b &= 3,07134 \\
 \log(a - b) &= 0,48732 \\
 \log \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} &= 9,89689 - 10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &0,38421 \\
 \log(a + b) &= 0,58303 \\
 \log \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} &= 9,80118 - 10
 \end{aligned}$$

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = 32^{\circ},321$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 38^{\circ},261$$

$$\alpha = 70^{\circ},582$$

$$2. \quad \beta = 5^{\circ},94$$

Antwort: $\alpha = 70^{\circ},582$; $\beta = 5^{\circ},94$; $c = 3,5572$ m;
 $J = 0,63503$ qm.

$$\alpha + \beta = 76^{\circ},522$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 38^{\circ},261$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad \log a &= 0,53781 \\
 \log \sin \gamma &= 9,98787 - 10 \\
 &0,52568
 \end{aligned}$$

$$\log \sin \alpha = 9,97457 - 10$$

$$\log c = 0,55111$$

$$c = 3,5572$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad \log a &= 0,53781 \\
 \log b &= 0,57814 - 1 \\
 \log \sin \gamma &= 9,98787 - 10
 \end{aligned}$$

$$0,10382$$

$$\log 2 = 0,30103$$

$$\log J = 0,80279 - 1$$

$$J = 0,63503$$

5. Ein Dreieck zu berechnen aus den drei Seiten.

Geg. a, b, c Ges. α, β, γ, J

1. Lösung (durch den Cosinussatz; nur bei kleinen Zahlen praktisch):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$1. \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$2. \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$3. \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$4. \quad J = \frac{ab \sin \gamma}{2}.$$

Anmerkung. Man kann den dritten Winkel selbstverständlich auch durch den Satz von der Winkelsumme im Dreieck berechnen, also hier $\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$; man berechnet aber gern zur Probe der Richtigkeit die drei Winkel unabhängig voneinander. Hierbei kann wegen der in der Rechnung vorkommenden Abrundungen die Winkelsumme um einige tausendstel Grad von 180° abweichen.

Musterbeispiel: $a = 5$ m; $b = 6$ m; $c = 7$ m.

$$\text{Berechnung: } 1. \cos \alpha = \frac{36 + 49 - 25}{84} = \frac{5}{7}$$

$$\log 5 = 0,69897$$

$$\log 7 = 0,84510$$

$$\log \cos \alpha = 9,85387 - 10$$

$$\alpha = 44^{\circ},416$$

$$2. \cos \beta = \frac{25 + 49 - 36}{70} = \frac{19}{35} \quad 3. \cos \gamma = \frac{25 + 36 - 49}{60} = \frac{1}{5}$$

$$\log 19 = 1,27875$$

$$\log 35 = 1,54407$$

$$\log \cos \beta = 9,73468 - 10$$

$$\beta = 57^{\circ},122$$

$$\log 1 = 0,00000$$

$$\log 5 = 0,69897$$

$$\log \cos \gamma = 9,30103 - 10$$

$$\gamma = 78^{\circ},463,$$

$$\text{zu ändern in } \gamma = 78^{\circ},462$$

$$\text{wegen } \alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ} \text{ (Will}$$

man genauer rechnen, so verteile man den Fehler sinngemäss auf die drei Winkel.)

$$4. \quad J = 15 \cdot \sin \gamma$$

$$\log 15 = 1,17609$$

$$\log \sin \gamma = 9,99113 - 10$$

$$\log J = 1,16722$$

$$J = 14,697$$

Antwort: $\alpha = 44^{\circ},416$; $\beta = 57^{\circ},122$; $\gamma = 78^{\circ},462$;
 $J = 146,97 \text{ qm.}$

2. Lösung (durch den Sinussummensatz):

$$1. \quad J = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$2. \sin \alpha = \frac{2J}{bc}$$

$$3. \sin \beta = \frac{2J}{ac}$$

$$4. \sin \gamma = \frac{2J}{ab}$$

Anmerkung. Man berechnet hierbei zuerst die Winkel, welche den kleineren Seiten gegenüber liegen. Dieselben können nur spitze Winkel sein, während der der grössten Seite gegenüberliegende Winkel ja auch stumpf sein kann. Im übrigen vgl. Anmerkung zu Lösung 1.

Musterbeispiel: $a = 6,7789 \text{ m}$; $b = 56,003 \text{ m}$;
 $c = 57,445 \text{ m.}$

$$\text{Berechnung: } 1. \quad s = 60,11345 = 60,113$$

$$s - a = 53,33455 = 53,335$$

$$s - b = 4,11045 = 4,1105$$

$$s - c = 2,66845 = 2,6685$$

$\log s = 1,77897$		
$\log (s - a) = 1,72701$		
$\log (s - b) = 0,61390$		
$\log (s - c) = 0,42627$		
$4,54615$		
$\log J = 2,27308$		
$J = 187,53$		
2. $\log b = 1,74821$	3. $\log a = 0,83116$	4. $\log a = 0,83116$
$\log c = 1,75925$	$\log c = 1,75925$	$\log b = 1,74821$
$\log bc = 3,50746$	$\log ac = 2,59041$	$\log ab = 2,57937$
$\log 2J = 2,57411$	$\log 2J = 2,57411$	$\log 2J = 2,57411$
$\log \sin \alpha = 9,06665 - 10$	$\log \sin \beta = 9,98370 - 10$	$\log \sin \gamma = 9,99474 - 10$
$\alpha = 6^{\circ},695$	$\beta = 74^{\circ},4$	$\gamma = 81^{\circ},1$ oder $= 98^{\circ},9$, zu ändern in $\gamma = 98^{\circ},905$ wegen $\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}$.

(Will man genauer rechnen, so verteile man den Fehler sinngemäss auf die drei Winkel.)

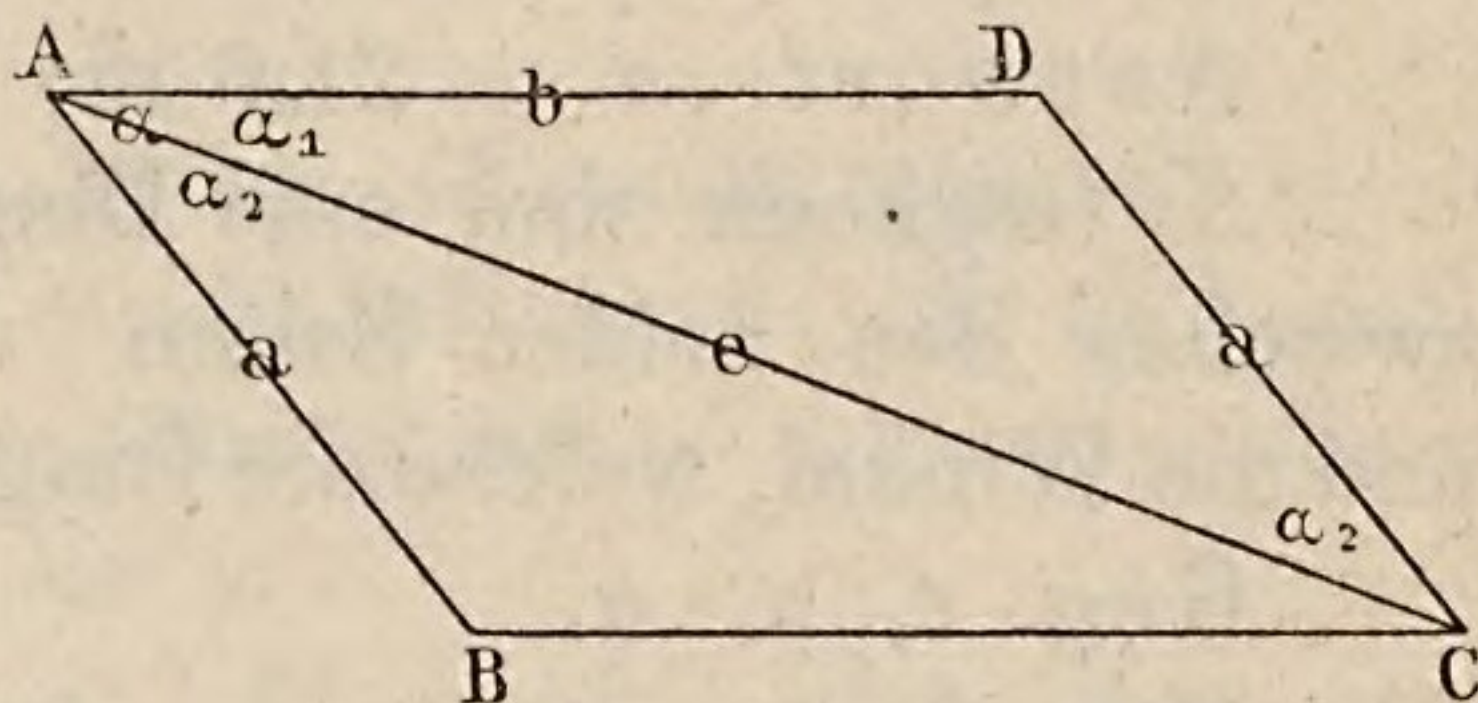
Antwort: $J = 187,53$ qm; $\alpha = 6^{\circ},695$; $\beta = 74^{\circ},4$; $\gamma = 98^{\circ},905$.

§ 224.

Bei der Berechnung des Parallelogramms sind vor allen Dingen die mit dem physikalischen Satze vom Parallelogramm der Kräfte zusammenhängenden Fälle von Wichtigkeit.

Wir unterscheiden 4 Fälle:

1. Gegeben sind die beiden Seiten und der eingeschlossene Winkel. Gesucht werden eine Diagonale und die Winkel, die sie mit den Seiten bildet.



Geg. a, b, α .

Ges. e, α_1, α_2 .

1. Lösung (durch den Cosinussatz):

$$e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos (2R - \alpha)}$$

$$\cos (2R - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$1. \quad e = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}$$

$$a : e = \sin \alpha_1 : \sin (2R - \alpha)$$

$$\sin (2R - \alpha) = \sin \alpha$$

$$2. \quad \sin \alpha_1 = \frac{a \sin \alpha}{e}$$

$$3. \quad \alpha_2 = \alpha - \alpha_1$$

oder 2. $\sin \alpha_2 = \frac{b \sin \alpha}{e}$

3. $\alpha_1 = \alpha - \alpha_2$.

Beispiel: $a = 725,38$ m; $b = 266,59$ m; $\sphericalangle \alpha = 36^0,759$.

Antwort: $e = 952,45$ m; $\alpha_1 = 27^0,115$; $\alpha_2 = 9^0,644$.

2. Lösung (durch den Tangentensatz):

1. u. 2. $\operatorname{tg} \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = \frac{(a - b) \operatorname{tg} \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}}{a + b},$

oder wenn $a < b$,

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = \frac{(b - a) \operatorname{tg} \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}}{b + a}$$

3. $e = \frac{a \sin \alpha}{\sin \alpha_1}.$

2. Gegeben sind eine Diagonale und die Winkel, die sie mit den Seiten bildet. Gesucht werden die Seiten des Parallelogramms.

Geg. e, α_1, α_2 .

Ges. a, b .

Lösung (durch den Sinussatz):

1. $a = \frac{e \sin \alpha_1}{\sin \alpha}$

2. $b = \frac{e \sin \alpha_2}{\sin \alpha}.$

Beispiel: $e = 13,478$ m; $\alpha_1 = 59^0,476$; $\alpha_2 = 88^0,009$.

Antwort: $a = 21,6$ m; $b = 25,059$ m.

3. Gegeben sind eine Diagonale, eine Seite und der Winkel zwischen den beiden Seiten. Gesucht werden die zweite Seite und die Winkel, welche die Diagonale mit den beiden Seiten bildet.

Geg. e, a, α .

Ges. b, α_1, α_2 .

Lösung (durch den Sinussatz):

1. $\sin \alpha_1 = \frac{a \sin \alpha}{e}.$

Hierbei ist, wenn $\alpha > 90^0$, zu beachten, dass α_1 oder α_2 möglicherweise $> 90^0$ werden kann.

2. $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$

3. $b = \frac{e \sin \alpha_2}{\sin \alpha}.$

Beispiel: $e = 14,399$ m; $a = 7,6879$ m; $\sphericalangle \alpha = 79^0,007$.

Antwort: $\alpha_1 = 31^0,61$; $\alpha_2 = 47^0,397$; $b = 10,797$ m.

4. Gegeben sind eine Diagonale und die Seiten. Gesucht werden die Winkel, welche die Diagonale mit den Seiten bildet.

Geg. e, a, b .

Ges. $\sphericalangle \alpha_1, \alpha_2$.

Lösung (durch den Sinussummensatz):

$$1. \sin \alpha_1 = \frac{2}{be} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-e)}$$

$$2. \sin \alpha_2 = \frac{2}{ae} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-e)},$$

$$\text{wo } s = \frac{a+b+e}{2} \text{ ist.}$$

Über die Reihenfolge der Berechnung s. § 223₅, Anmerkung.

Beispiel: $e = 5,3487$ m; $a = 4,0009$ m; $b = 3,2285$ m.

Antwort: $\sphericalangle \alpha_1 = 48^{\circ},192$; $\sphericalangle \alpha_2 = 36^{\circ},976$.

VII. Anhang.

§ 225. Die wichtigsten Formeln der Trigonometrie für den Schüler.

$$1. \sin \beta = \frac{b}{a}; \cos \beta = \frac{c}{a}; \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{c}; \operatorname{ctg} \beta = \frac{c}{b}.$$

$$2. \cos \alpha = \sin (90^{\circ} - \alpha); \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} (90^{\circ} - \alpha).$$

$$3. \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}.$$

$$4. \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha; \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$5. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$6. \sin 0^{\circ} = 0; \cos 0^{\circ} = 1; \operatorname{tg} 0^{\circ} = 0; \operatorname{ctg} 0^{\circ} = \infty; \\ \sin 90^{\circ} = 1; \cos 90^{\circ} = 0; \operatorname{tg} 90^{\circ} = \infty; \operatorname{ctg} 90^{\circ} = 0.$$

$$7. \sin (180^{\circ} - \alpha) = \sin \alpha; \cos (180^{\circ} - \alpha) = -\cos \alpha.$$

$$8. a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

$$9. a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha; b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta; \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

$$10. (a+b) : (a-b) = \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$11. J = \frac{bc \sin \alpha}{2} = \frac{ac \sin \beta}{2} = \frac{ab \sin \gamma}{2}.$$

$$J = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ wo } s = \frac{a+b+c}{2} \text{ ist.}$$

$$12. \sin \alpha = \frac{2}{bc} \cdot J; \sin \beta = \frac{2}{ac} \cdot J; \sin \gamma = \frac{2}{ab} \cdot J.$$

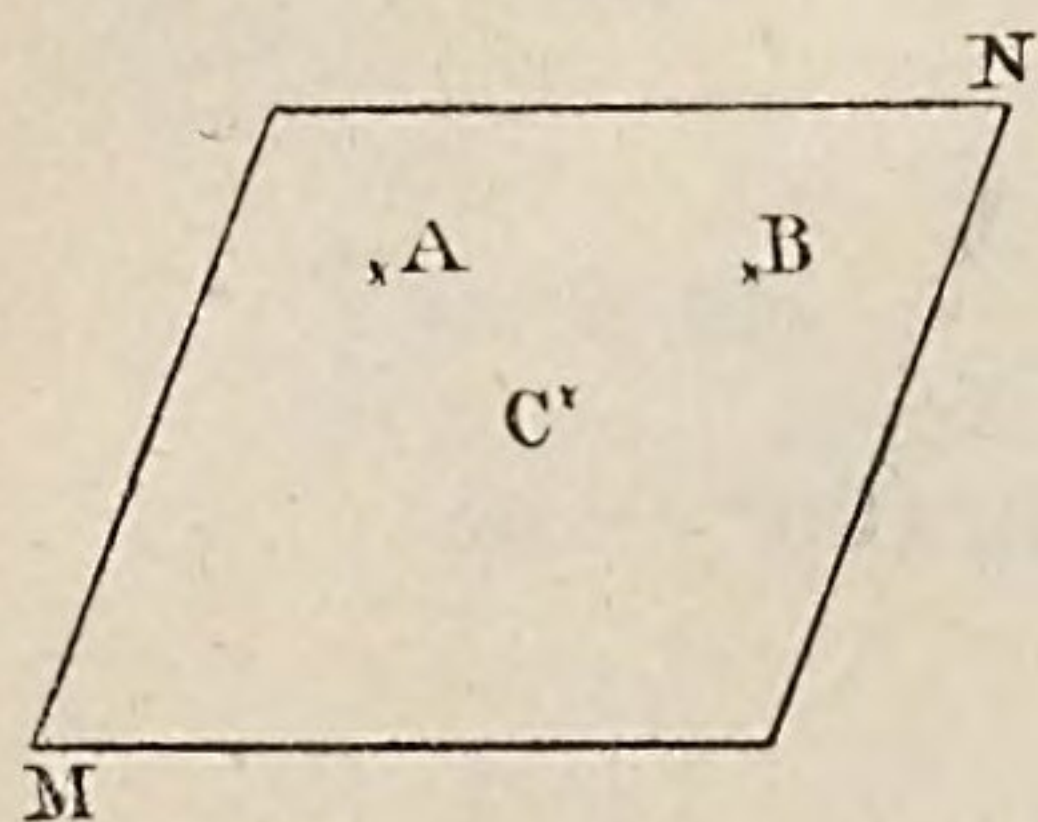
D. Stereometrie.

I. Einleitendes.

§ 226.

Die Stereometrie ist die Lehre von den räumlichen Gebilden, die **nicht** in einer Ebene liegen, insonderheit von den Körpern selber (vgl. § 9).

Grundsatz. Eine Ebene ist bestimmt:



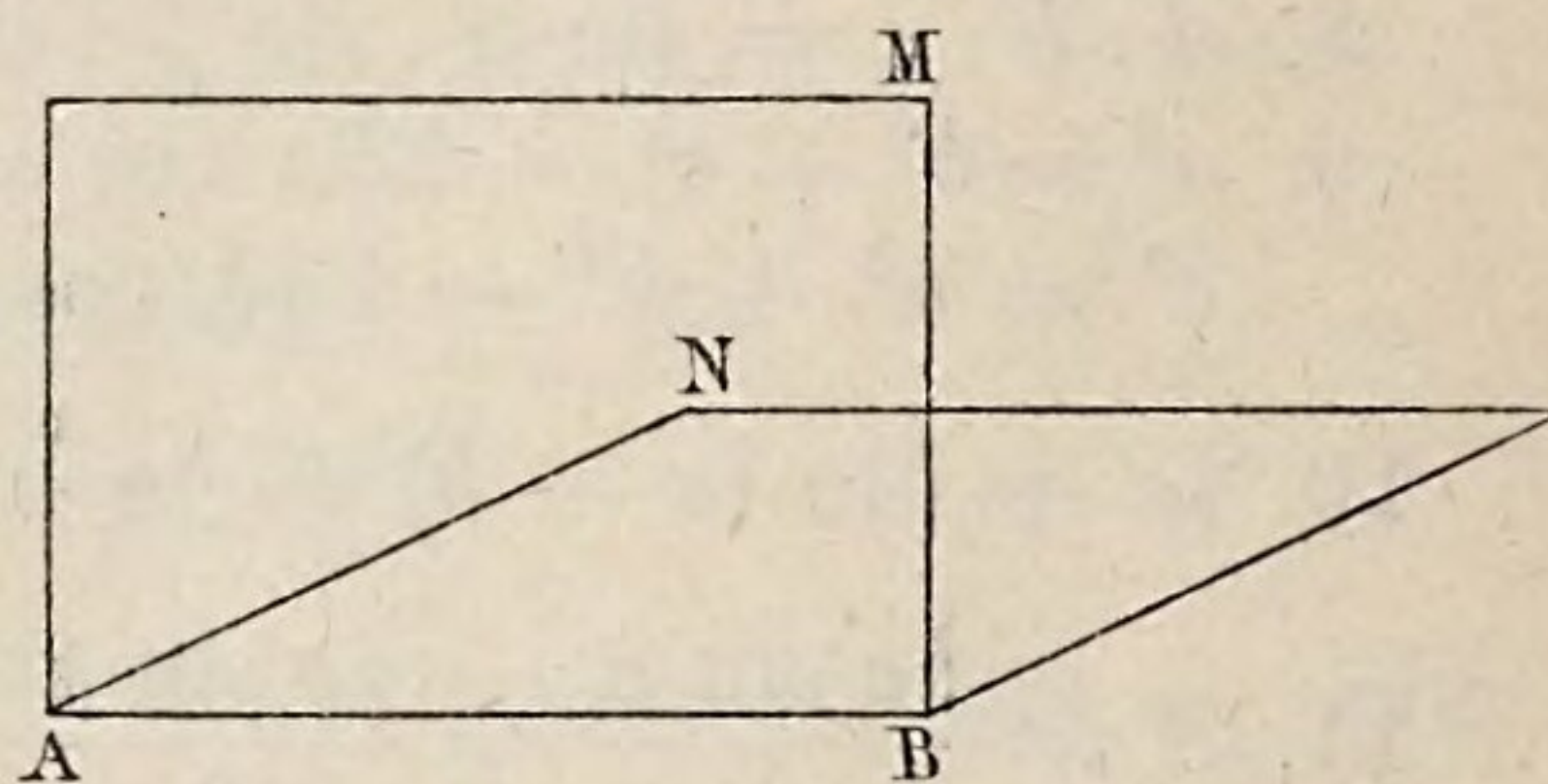
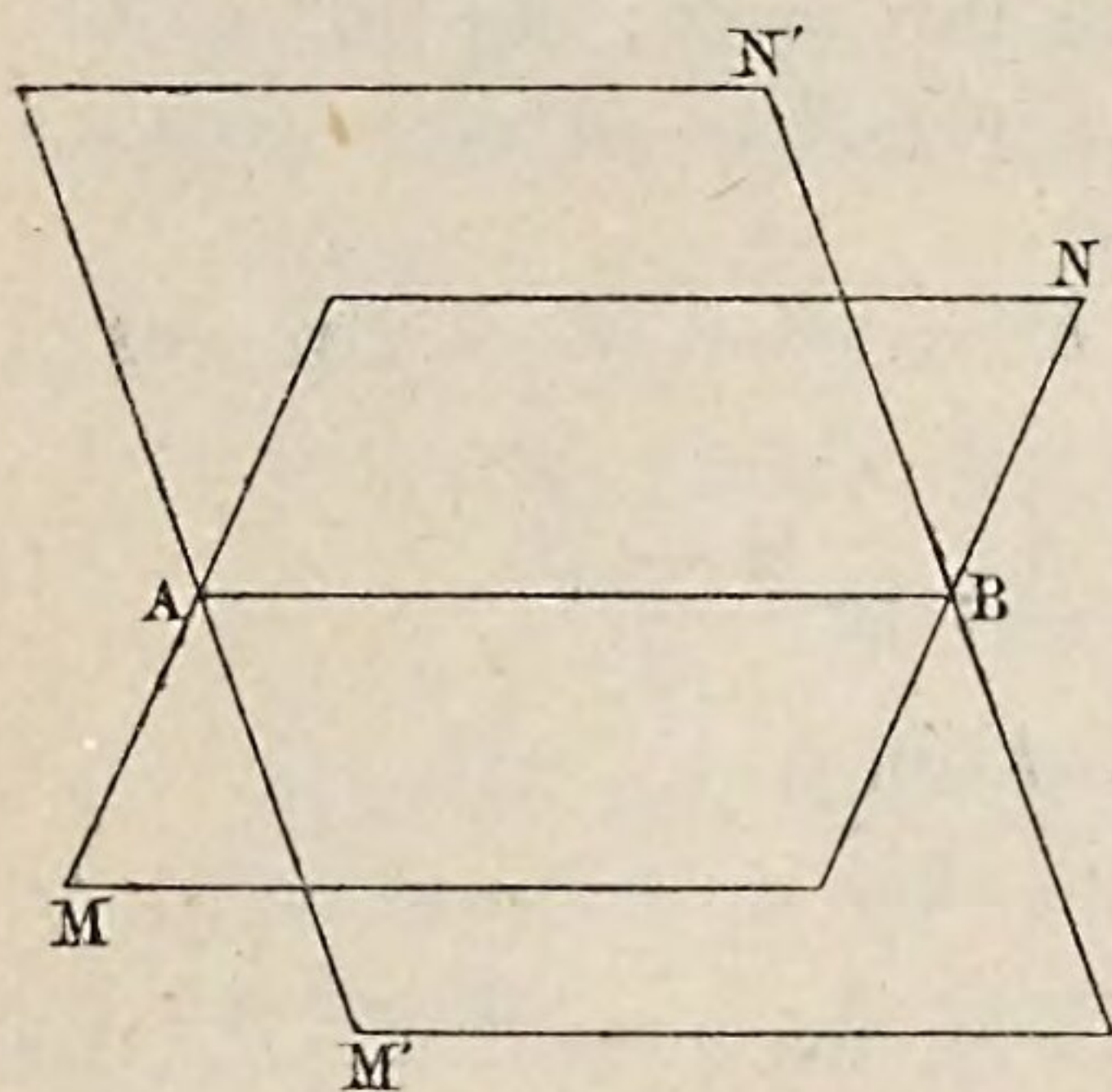
1. durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte (z. B. durch ABC ist die Ebene MN bestimmt);

2. durch eine Gerade und einen ausserhalb derselben liegenden Punkt;

3. durch zwei sich schneidende Geraden;

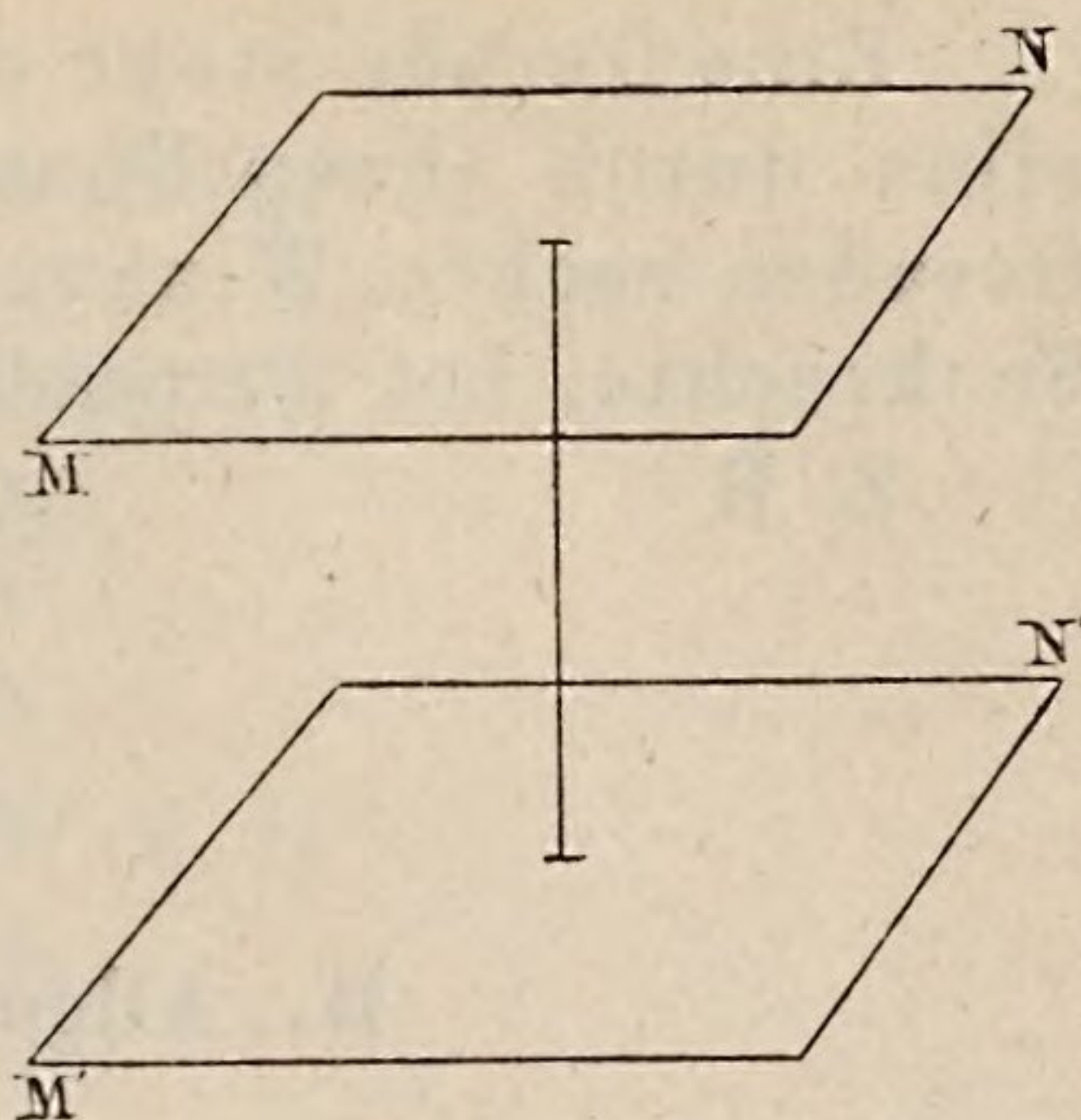
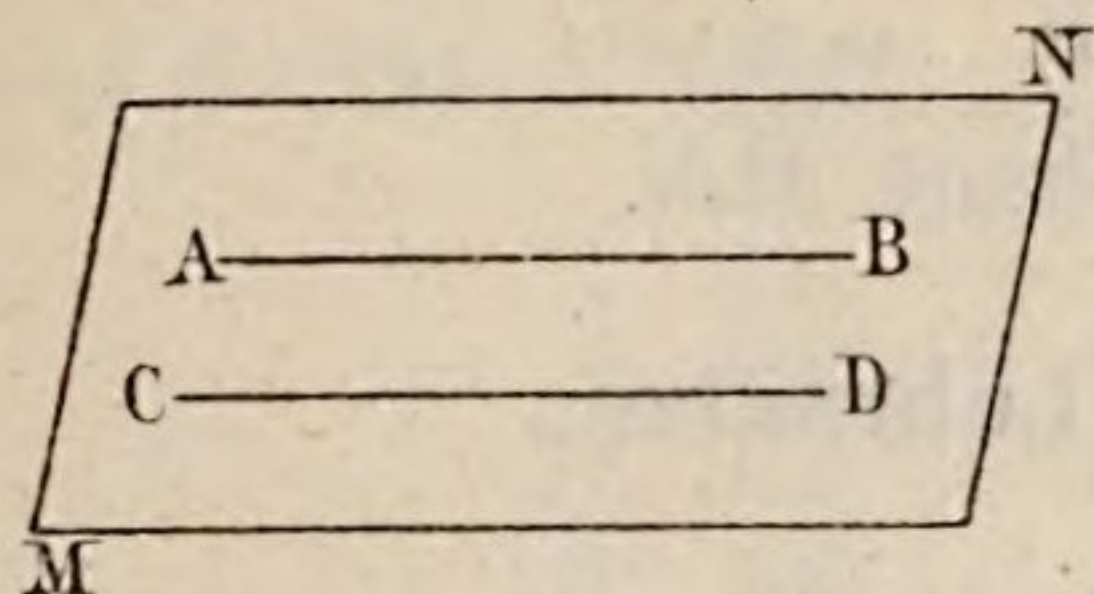
4. durch zwei Parallelen.

Durch zwei Punkte, welche auch im Raume die Lage einer Geraden bestimmen, ist die Lage einer Ebene nicht bestimmt. Vielmehr kann man sich durch zwei Punkte unendlich viele Ebenen gelegt denken.



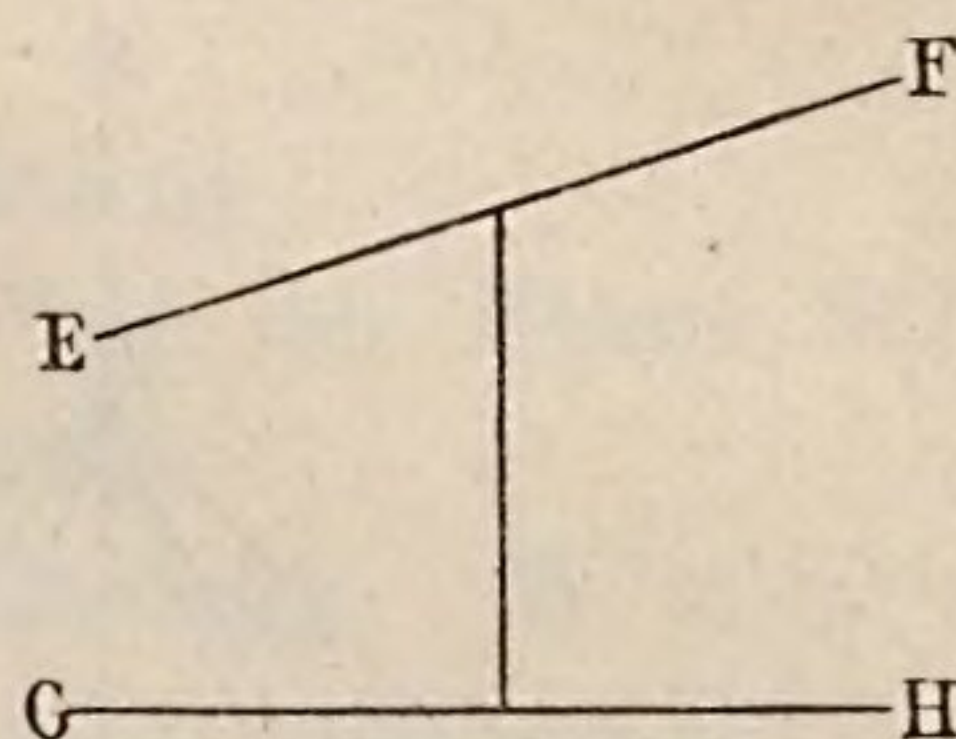
Erklärungen. Zwei Ebenen schneiden sich in einer geraden Linie. Z. B. Ebene MN und $M'N'$ schneiden sich in AB . Ebenso Ebene AM und BN schneiden sich in AB .

Zwei Ebenen, die bei beliebiger Erweiterung sich nicht schneiden, heissen parallel. Z. B. Ebene MN und $M'N'$ sind $\parallel$. (Beispiel: Fussboden und Decke eines Zimmers.)



Zwei gerade Linien sind parallel, wenn sie 1. in einer Ebene liegen und 2. sich nie treffen, soweit man sie auch verlängern mag. Z. B. $AB \parallel CD$.

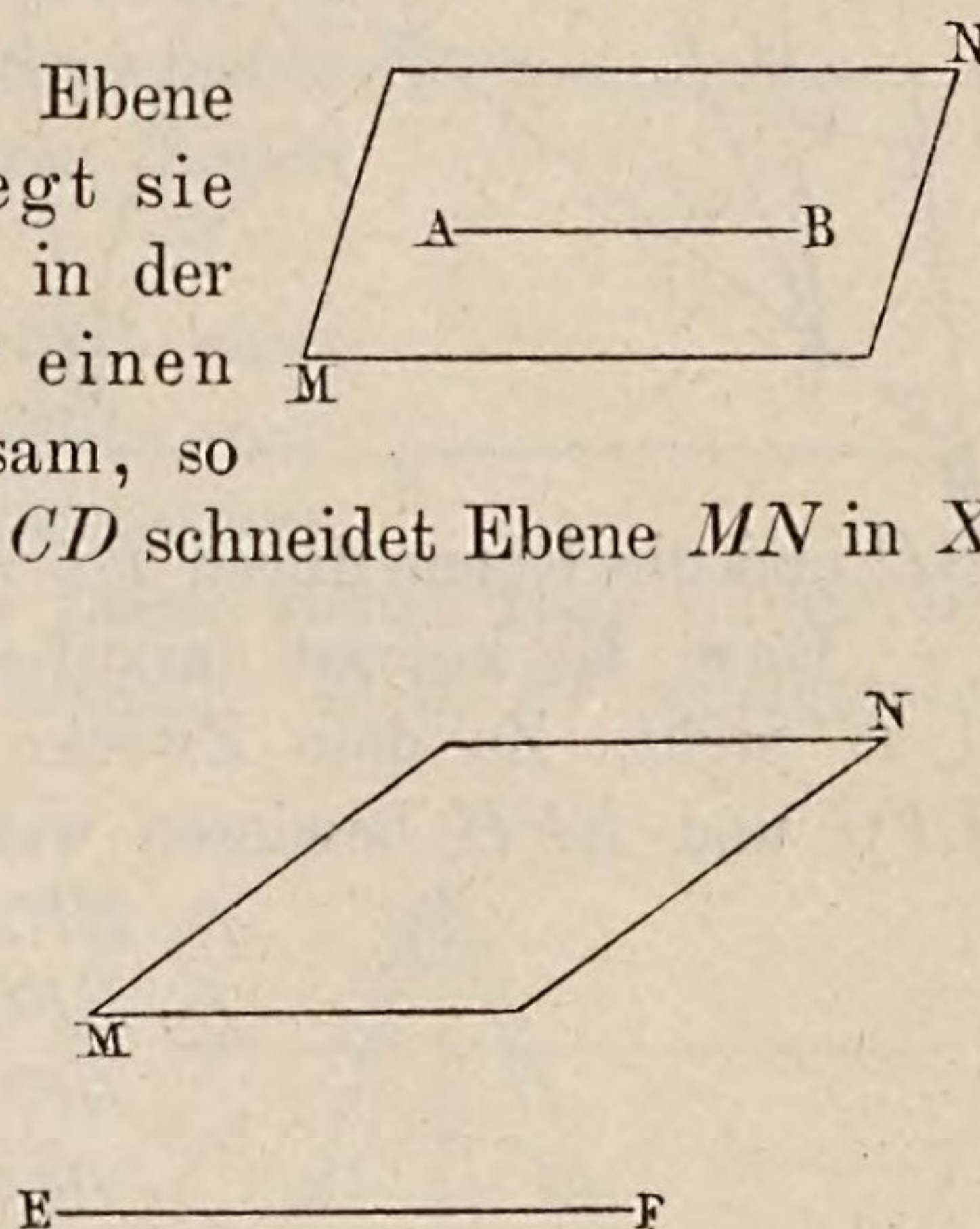
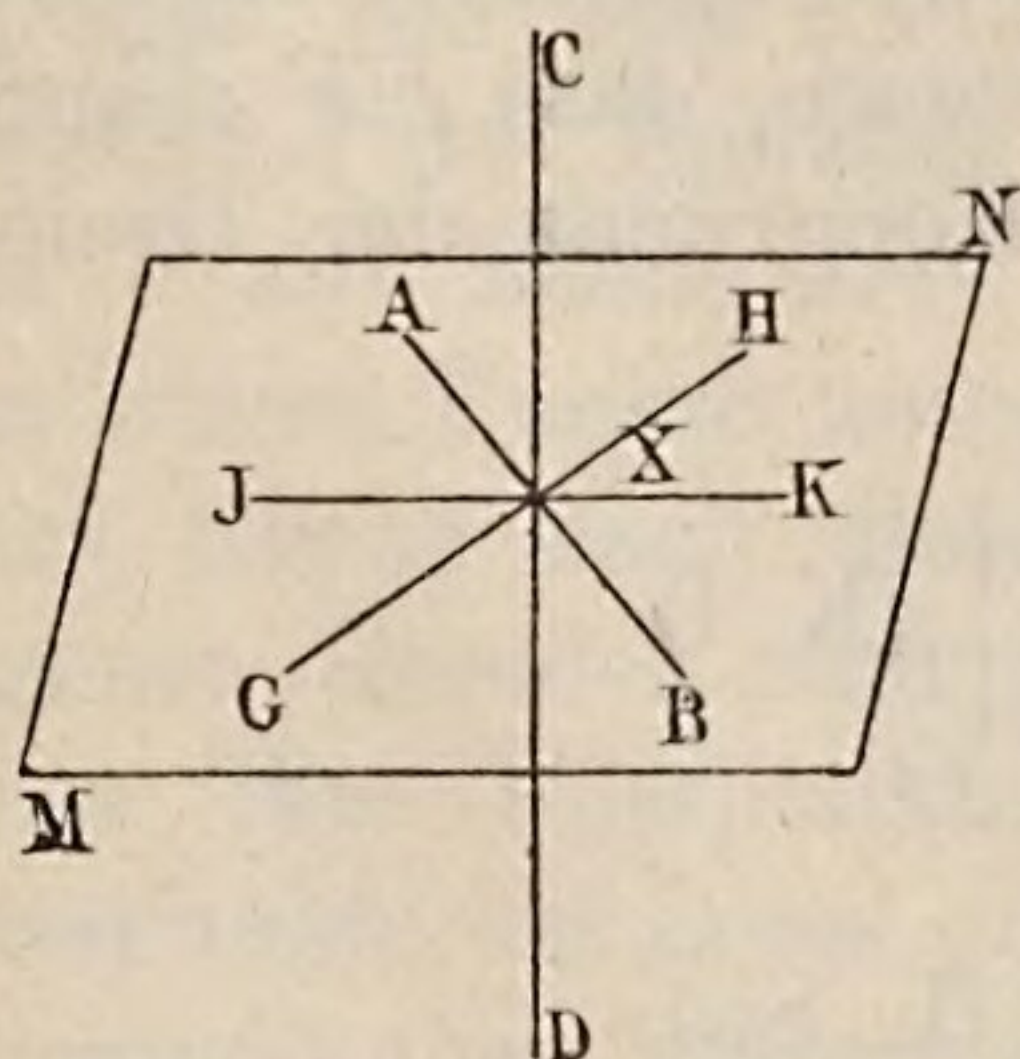
Zwei gerade Linien, die beliebig weit verlängert sich nicht schneiden und nicht in einer Ebene liegen, heissen sich kreuzende Linien. Z. B. EF und GH .



(Beispiel: Die auf dem Fussboden und der Decke eines Zimmers gezogenen Geraden sind im allgemeinen sich kreuzende Linien; sie sind parallel, wenn sie gleichzeitig in einer dritten Ebene, z. B. der Zimmerwand, liegen.)

Durch zwei Parallelen lässt sich immer eine Ebene legen.

Hat eine Gerade mit einer Ebene zwei Punkte gemeinsam, so liegt sie in der Ebene. Z. B. AB liegt in der Ebene MN . Hat eine Gerade nur einen Punkt mit einer Ebene gemeinsam, so schneidet sie die Ebene. Z. B. CD schneidet Ebene MN in X .



Hat eine Gerade, soweit man sie auch verlängern mag, keinen Punkt mit einer Ebene gemein, so ist sie der Ebene parallel. Z. B. $EF \parallel$ Ebene MN .

Eine Gerade steht auf einer Ebene $\perp$, wenn sie mit allen durch ihren Fusspunkt in der Ebene gezogenen Geraden rechte Winkel einschliesst. Diese Gerade heisst Senkrechte, Lot, Perpendikel oder Normale der Ebene.

Z. B.

$$CD \perp AB$$

$$CD \perp GH$$

$$CD \perp JK \quad \text{u. s. w.}$$

$$CD \perp \text{Ebene } MN.$$

II. Allgemeine Lehrsätze.

§ 227.

Lehrsatz. Eine Gerade steht zu einer Ebene senkrecht, wenn sie mit zwei durch ihren Fusspunkt in der Ebene gezogenen Geraden rechte Winkel bildet.

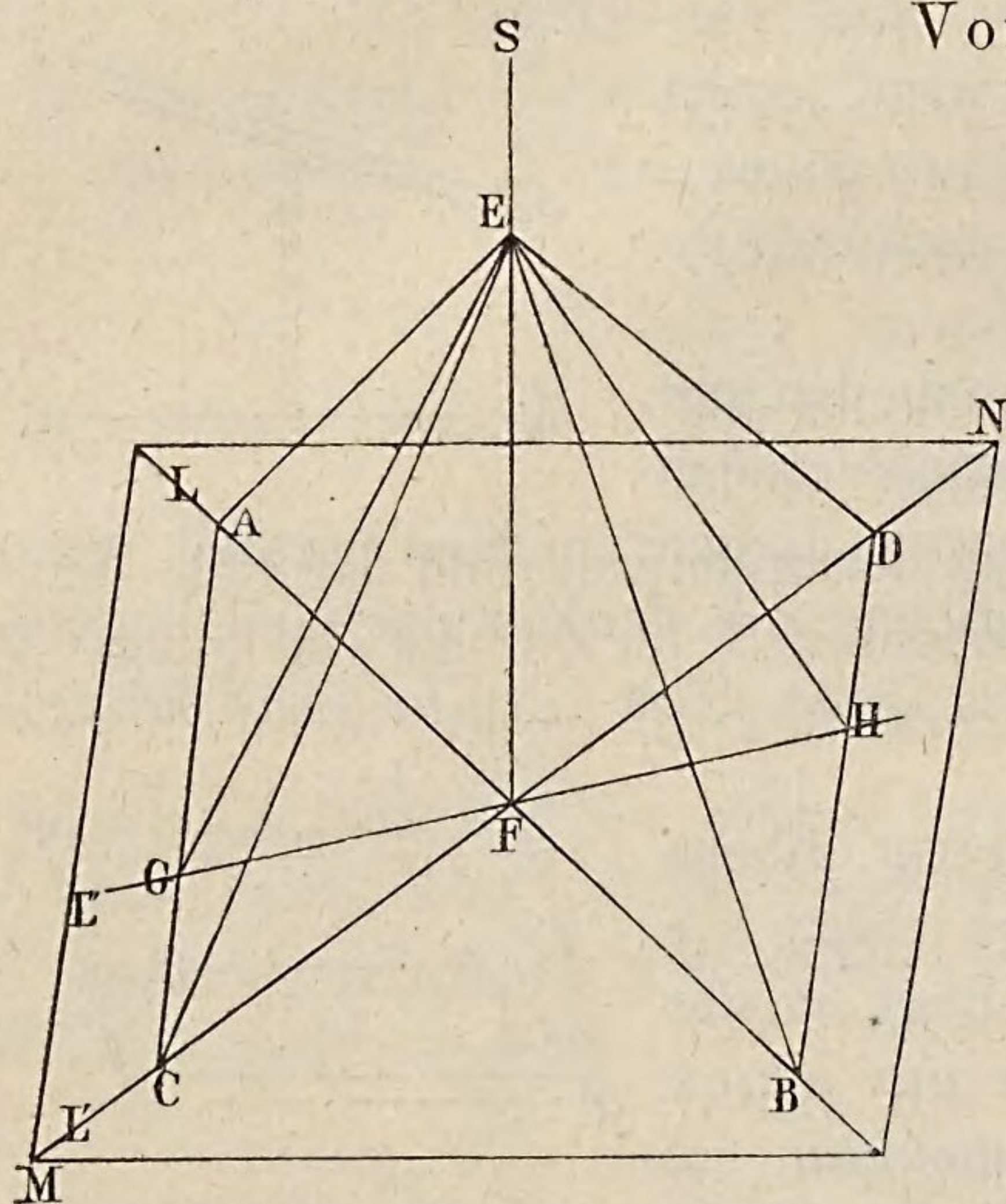
Vor. L, L' liegen in Ebene MN .

$$SF \perp L$$

$$SF \perp L'.$$

Beh. $SF \perp \text{Ebene } MN$.

H. K. Durch F ziehe ich in der Ebene MN eine beliebige dritte Gerade L'' . Ich nehme auf SF beliebig einen Punkt E an, lege durch EF einerseits und L, L' und L'' andererseits die Ebenen und mache $FA = FB$ und $FC = FD$. Dann lege ich durch E, A und C und durch E, B und D Ebenen, welche die Ebene MN in AC und



BD und die Ebene durch EF und L'' in EG und EH schneiden.

Bew. Es kommt darauf an, zu beweisen, dass EF ebenfalls $\perp L''$ steht. Zu dem Zwecke soll die Kongruenz der Dreiecke EFG und EFH bewiesen werden.

$$\left. \begin{array}{l} \triangle EFA \cong EFB \\ \triangle EFC \cong EFD \\ \triangle AFC \cong BFD \end{array} \right\} \text{ (K. I)}$$

$$\left. \begin{array}{l} EA = EB \\ EC = ED \\ AC = BD \end{array} \right\} \text{ (h. St.)}$$

$$\triangle EAC \cong EBD \text{ (K. III)}$$

$$1. \quad \angle EAG = \angle EBH \text{ (h. St.)}$$

Nun folgt aus:

$$\begin{array}{l} \triangle AFC \cong BFD \text{ (K. I):} \\ \sphericalangle GAF = HBF \text{ (h. St.)} \\ \hline \triangle GAF \cong HBF \text{ (K. II)} \\ 2. AG = BH \text{ (h. St.).} \\ 3. EA = EB \text{ (b.).} \end{array}$$

Aus 1. bis 3. folgt:

$$\begin{array}{l} \triangle EAG \cong EBH \text{ (K. I)} \\ \text{I. } EG = EH \text{ (h. St.)} \\ \text{II. } EF = EF \text{ (Gr. I).} \\ \text{III. } FG = FH \text{ (h. St. aus } \triangle GAF \cong HBF \text{).} \end{array}$$

Aus I. bis III. folgt:

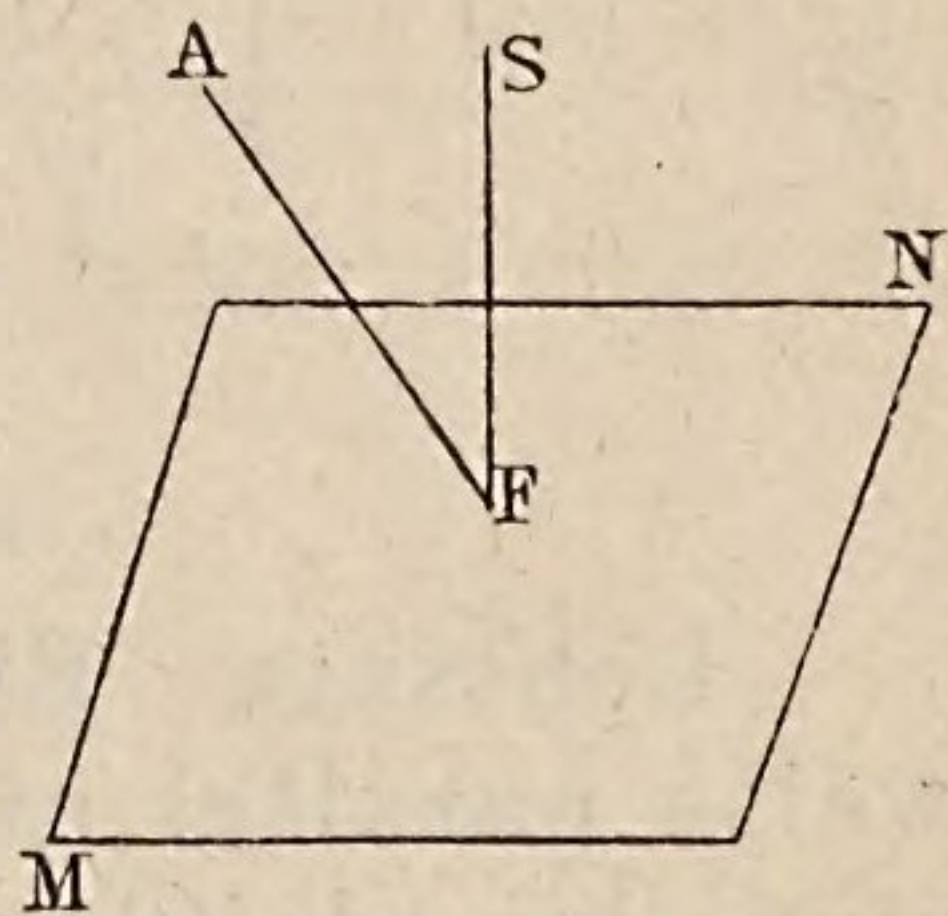
$$\begin{array}{l} \triangle EFG \cong EFH \text{ (K. III)} \\ \sphericalangle EFG = EFH \text{ (h. St.).} \\ \text{Dies sind aber N. } \sphericalangle. \\ \hline EF \perp L' \text{ (§ 13, Lehrsatz 2).} \end{array}$$

Dies kann offenbar von allen durch F in der Ebene MN gezogenen Geraden bewiesen werden, folglich

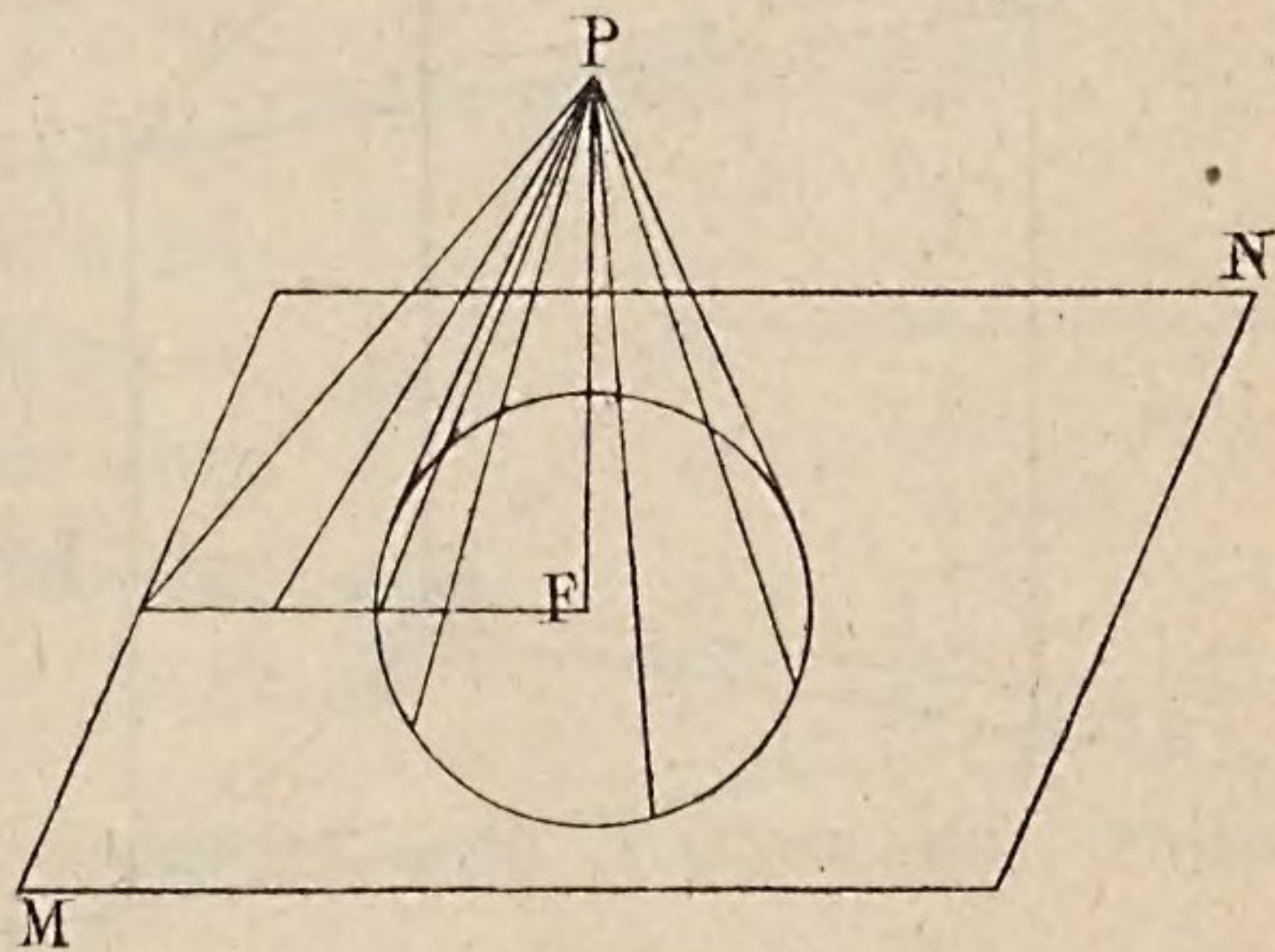
$EF \perp$ Ebene MN (Erklärung). W. z. b. w.

Anmerkung. Der hier gegebene Beweis rührt von Euklid her. Einfachere Beweise haben die französischen Mathematiker Cauchy und Legendre gegeben. Der Euklidsche Beweis dürfte aber den Schüler am besten in die stereometrische Anschauung einführen.

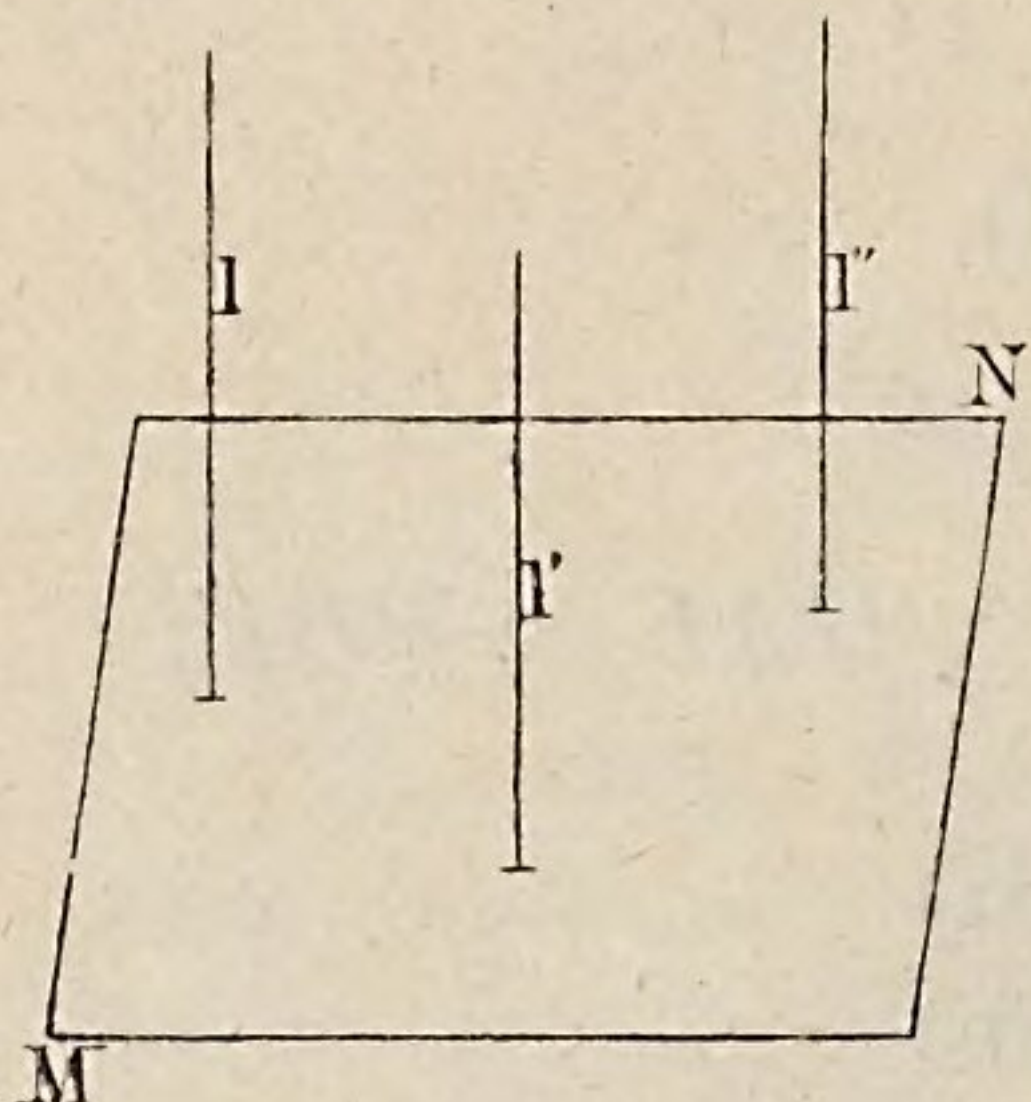
Zusätze. 1. In einem Punkte auf einer Ebene ist nur eine Senkrechte zu errichten möglich. Z. B. FS einzige Senkrechte in F auf Ebene MN ; alle übrigen Linien stehen schief, z. B. FA .



2. Von einem Punkte ausserhalb einer Ebene ist auf diese nur ein Lot zu fallen möglich. (S. Figur.) Dieses Lot ist die kürzeste Linie, die man von dem Punkt nach der Ebene ziehen kann (minimum; Abstand des Punktes von der Ebene). Z. B. PF einziges Lot von P auf Ebene MN . Alle von einem Punkte ausserhalb einer Ebene nach dieser gezogenen Geraden sind gleich, wenn ihre Fusspunkte vom Fusspunkte des Lotes gleichen Abstand haben, und sie werden um so grösser, je weiter sich ihre Fusspunkte vom Fusspunkte des Lotes entfernen.



Die Verbindungslinie des Fusspunktes des Lotes mit dem Fusspunkt der schiefstehenden Linie ist die Projektion der schiefen Linie auf die Ebene, und der von der Projektion und der schiefen Linie gebildete Winkel heisst der Neigungswinkel der schiefen Linie zur Ebene.



3. Alle auf einer Ebene senkrechten Geraden sind einander parallel.

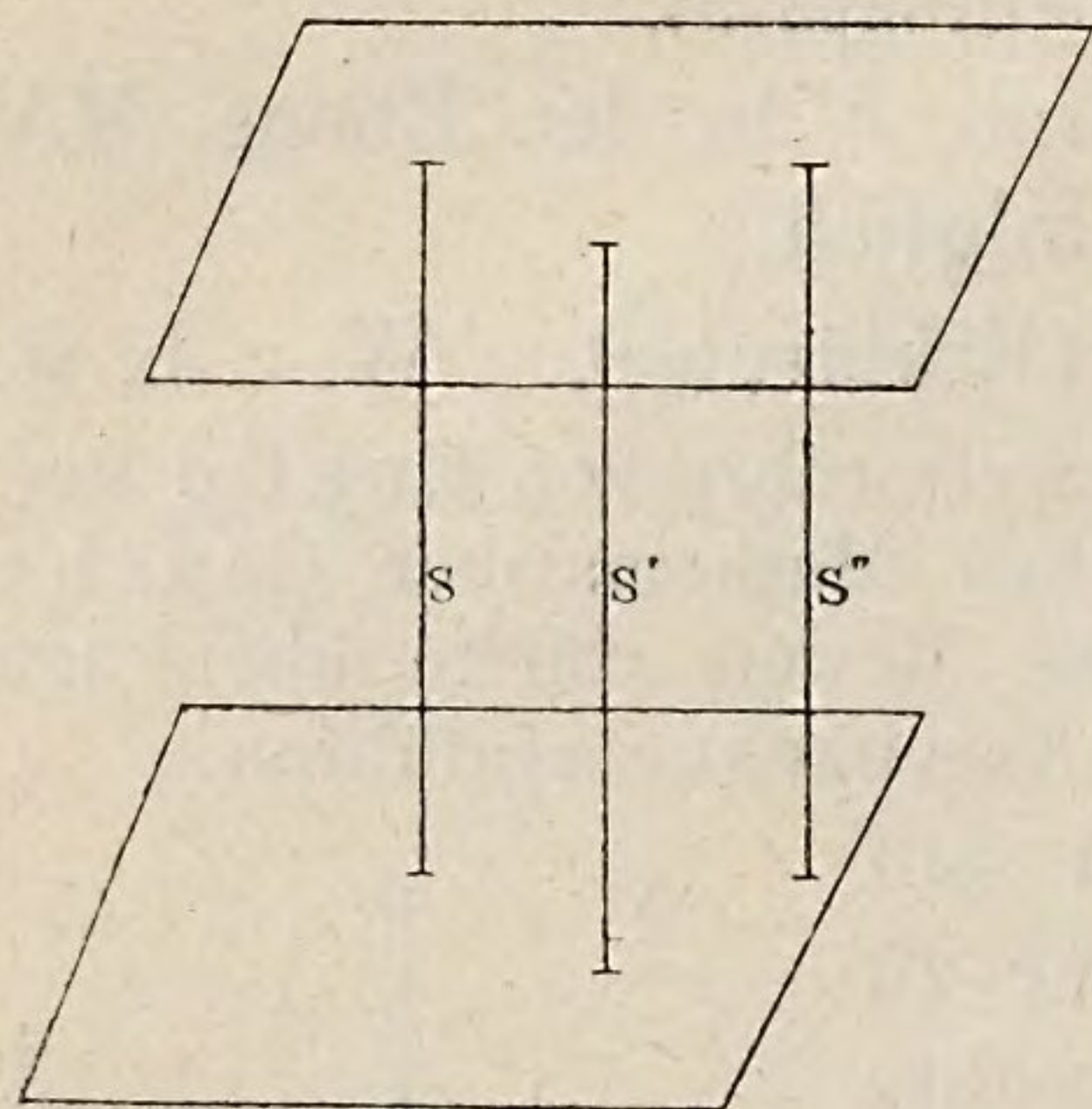
Z. B. $l \perp \text{Ebene } MN$

$$\begin{array}{l} l' \quad " \\ l'' \quad " \\ \hline l \parallel l' \parallel l'' \end{array}$$

(Beispiel: Die Bäume eines Waldes.)

4. Sind zwei Geraden einer dritten parallel, so sind sie auch untereinander parallel.

$$\begin{array}{l} l \parallel l' \\ l'' \parallel l' \\ \hline l \parallel l'' \end{array}$$



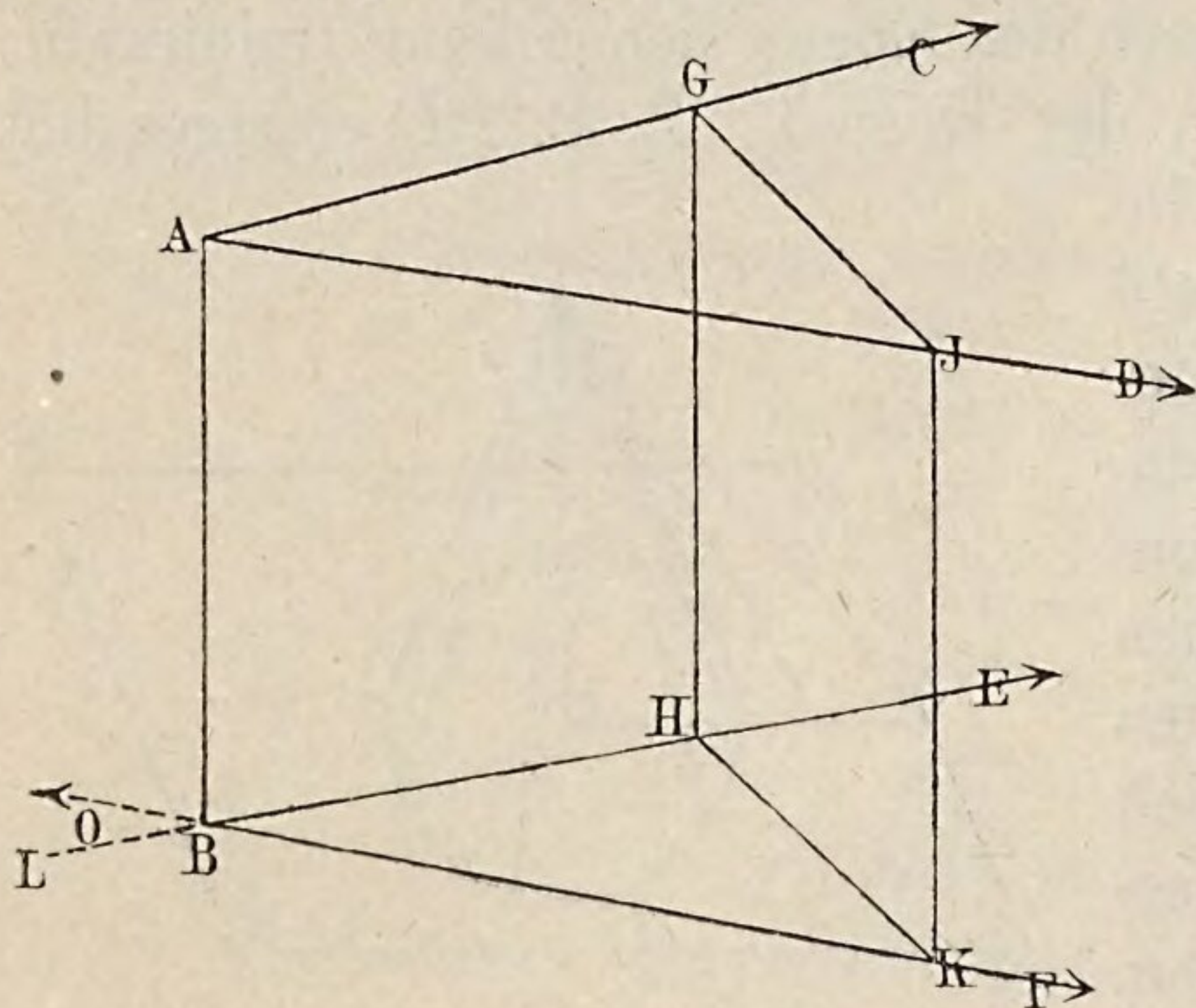
5. Alle Lote zwischen zwei parallelen Ebenen sind einander gleich. Das Lot von irgend einem Punkte der einen auf die andere gefällt ist daher der Abstand der beiden Ebenen.

Z. B. $\perp s = \perp s' = \perp s''$.

(Beispiel: Die Säulen eines Saales.)

§ 228.

Lehrsatz. Sind die Schenkel zweier Winkel paarweise parallel und gleich gerichtet, so sind die Winkel einander gleich.



Vor. $AC \parallel BE; AD \parallel BF$.

Beh. $\sphericalangle CAD = \sphericalangle EBF$.

H. K. $AG = BH$

$AJ = BK$.

Bew. $\left. \begin{array}{l} AG \parallel BH \\ AJ \parallel BK \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(Vor. u.)} \\ \text{H. K.)} \end{array}$

$\left. \begin{array}{l} ABHG \square \\ ABKJ \square \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\S 34, \text{Um-} \\ \text{kehrung}) \end{array}$

$\left. \begin{array}{l} GH \parallel AB \\ JK \parallel AB \end{array} \right\} (\S 34)$

$GH \parallel JK$ (Gr. III u. § 227, Zus. 4)

$GHKJ \square$ (§ 34, Umkehrung)

$GJ = HK$ (§ 34)

$\triangle GAJ \cong HBK$ (K. III)

$\sphericalangle CAD = EBF$ (h.St.) W. z. b. w.

Anmerkung. Haben zwei entsprechende Schenkel entgegengesetzte Richtung, so ergänzen sich die Winkel zu $2R$, z. B. $\sphericalangle EBO + \sphericalangle CAD = 2R$; haben beide Paare Schenkel entgegengesetzte Richtung, so sind die Winkel ebenfalls gleich, z. B. $\sphericalangle LBO = CAD$.

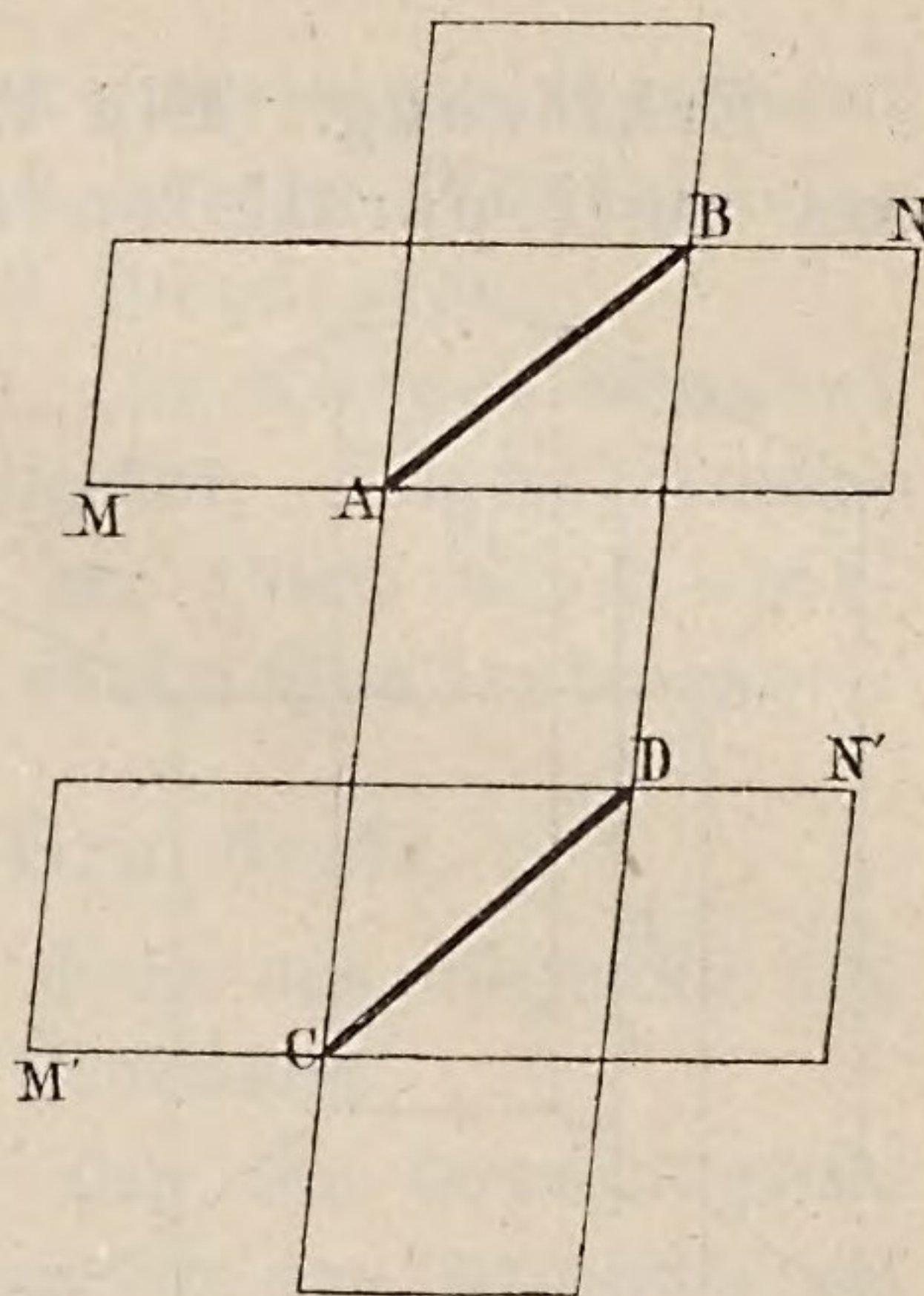
§ 229.

Lehrsatz. Parallele Ebenen werden von einer sie schneidenden Ebene in parallelen Durchschnittslinien geschnitten.

Vor. Ebene $MN \parallel$ Ebene $M'N'$.

Beh. $AB \parallel CD$.

Bew. AB und CD können, soweit man sie auch verlängern mag, keinen Punkt miteinander gemein haben; denn sonst müssten auch die Ebenen MN und $M'N'$ diesen Punkt miteinander gemein haben, was der Vor. widerspricht. Ausserdem liegen sie in einer Ebene, nämlich der durchschneidenden Ebene, also



$AB \parallel CD$ (Erklärung). W. z. b. w.

III. Von den Körpern.

§ 230.

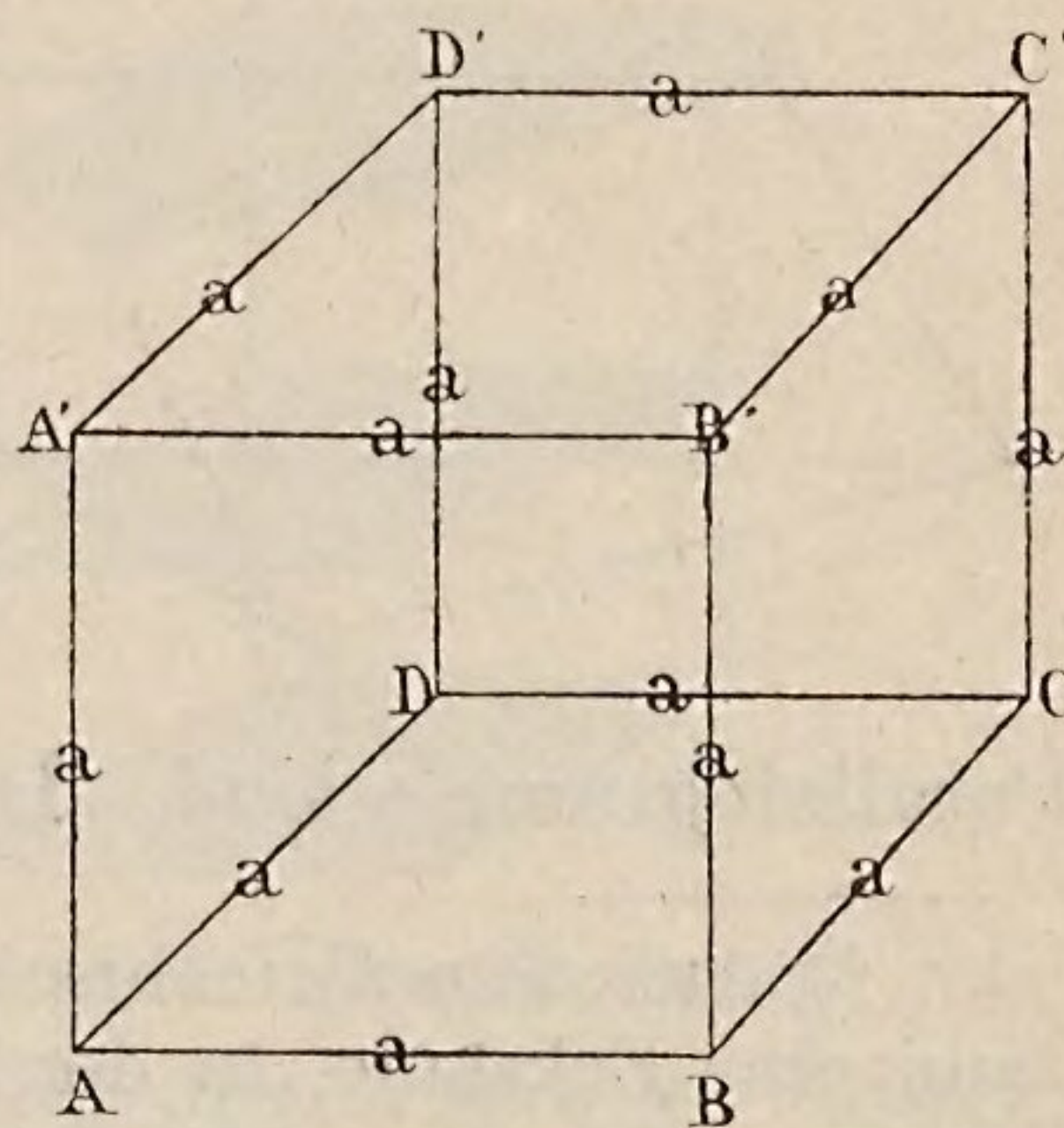
1. Einleitendes.

Ein Körper ist ein allseitig begrenzter Teil des Raumes (§ 4).

Wir unterscheiden:

1. Ebenflächner oder Polyeder*), d. s. Körper, die nur von Ebenen begrenzt sind, z. B. der Würfel,

2. Krummflächner, d. s. Körper, deren Grenzflächen sämtlich oder zum Teil krumm sind, z. B. die Kugel, der Kegel.



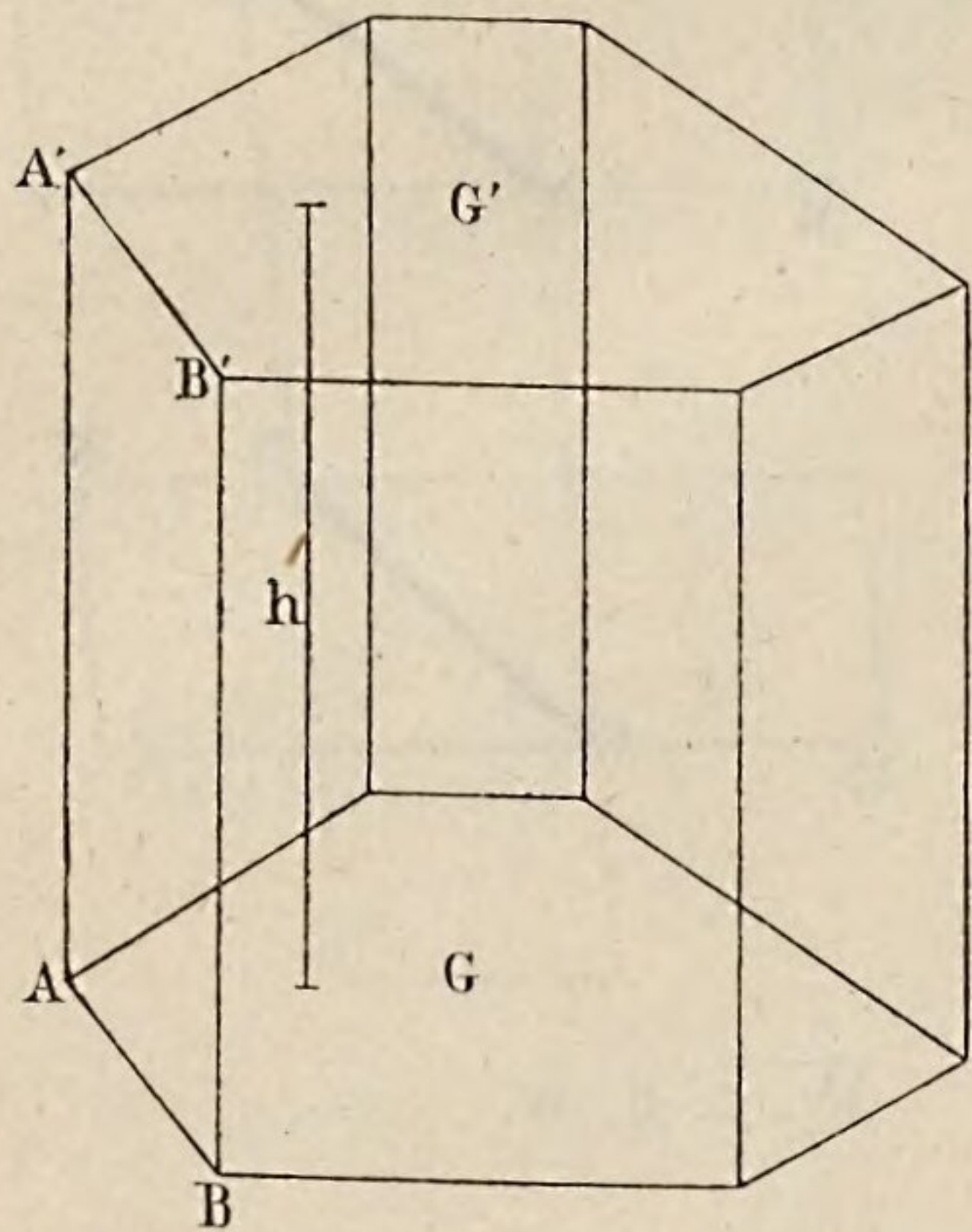
*) Aus dem Griechischen; bedeutet „ein Körper mit vielen Grundflächen“.

Die begrenzenden Flächen nennt man die Seitenflächen (die unteren und oberen auch Grundflächen) des Körpers, die Geraden, in denen sie sich schneiden, seine Kanten, und die Punkte, in denen diese zusammenstossen, seine Ecken, die man nach der Anzahl der in ihnen zusammenstossenden Seitenflächen dreiseitige, vierseitige u. s. w. nennt. Z. B. hat der Würfel 6 Seitenflächen, z. B. $ABCD$ u. s. w., 12 Kanten (a) und 8 dreiseitige Ecken, z. B. Ecke A u. s. w.

2. Vom Prisma.

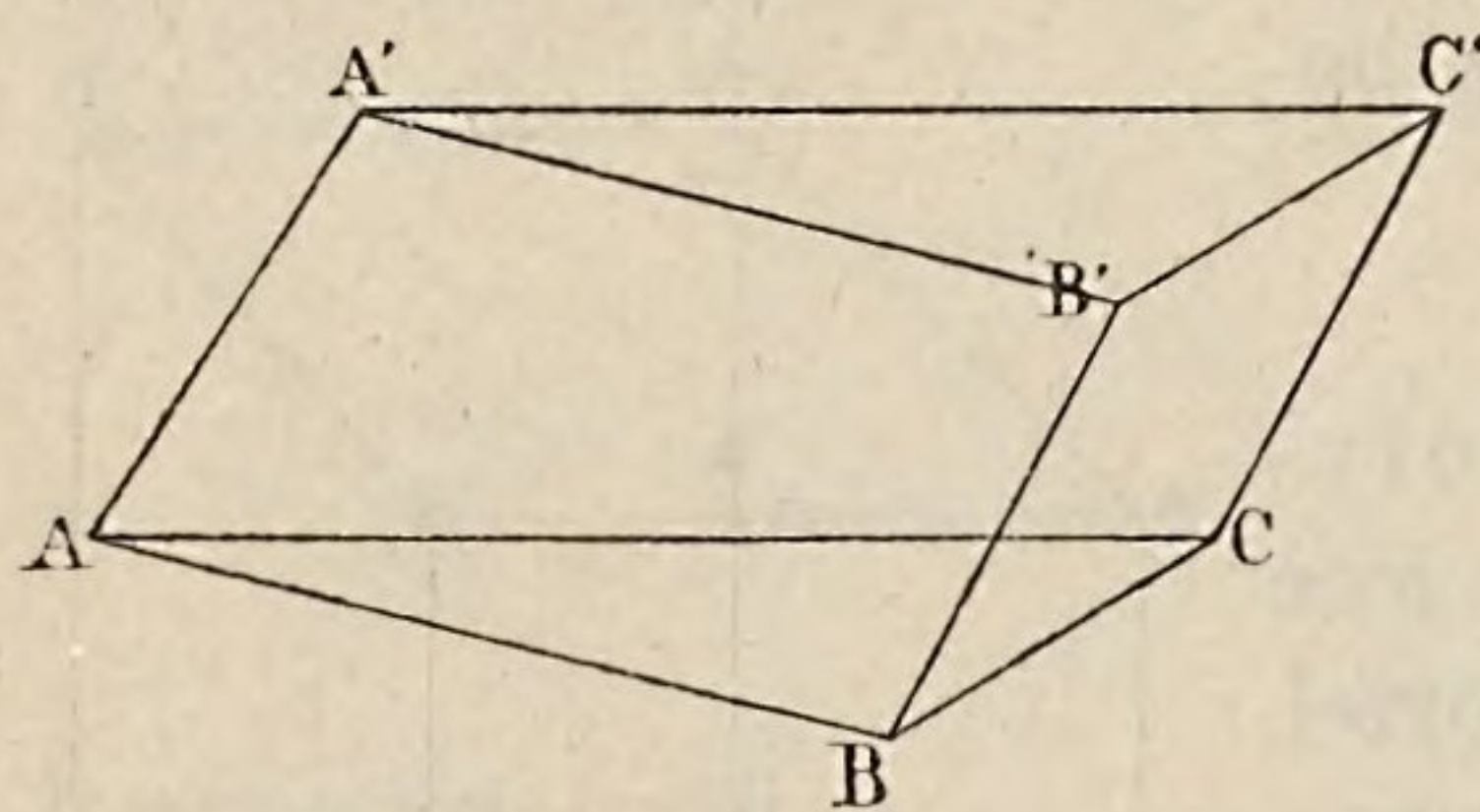
§ 231.

Erklärung. Ein Prisma*) ist ein Körper, begrenzt von zwei parallelen und kongruenten Polygonen als Grundflächen und soviel Parallelogrammen als Seitenflächen, wie die Polygone Seiten haben.



Nach der Anzahl dieser Seiten nennt man die Prismen dreiseitige, vierseitige . . . , allgemein n seitige, z. B. sechsseitiges Prisma, s. Figur. Die Seiten der Grundflächen heissen die Grundkanten, z. B. AB und $A'B'$, die der Seitenflächen die Seitenkanten, z. B. AA' und BB' .

Der Abstand der Grundflächen (G und G') heisst die Höhe des Prismas (h). Ein gerades Prisma ist ein solches, dessen Seitenkanten senkrecht auf den Grundflächen stehen, s. Figur; ein reguläres Prisma ist ein solches, dessen Grundflächen

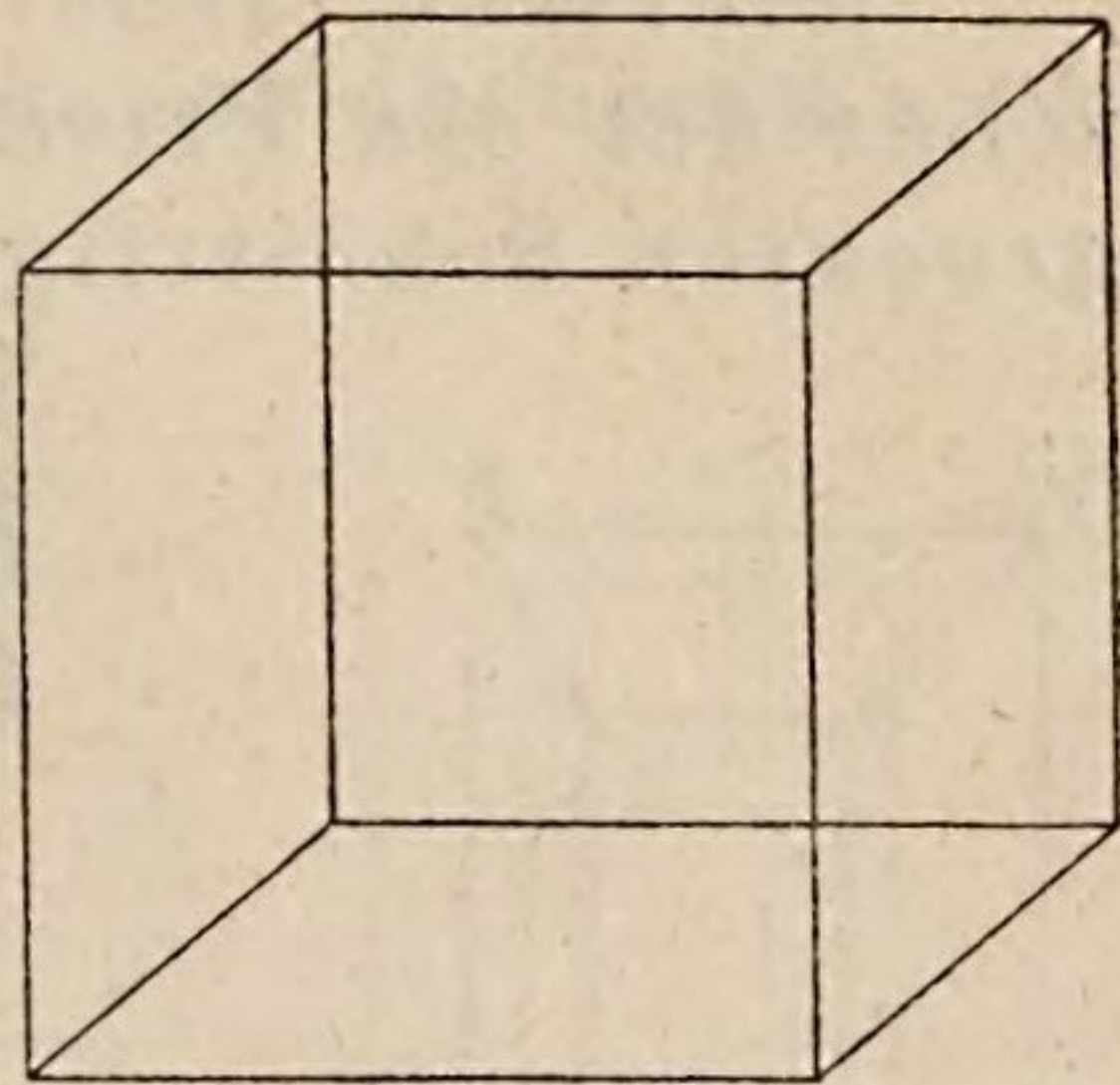


reguläre Polygone sind. Stehen die Seitenkanten schief auf den Grundflächen, so heisst das Prisma schief, z. B. $ABCA'B'C'$. Ein Parallelepipäeder (Parallelepipedon)**) ist ein Prisma, bei welchem auch die Grundflächen Parallelogramme sind. Demnach ist ein Parallelepipäeder ein

*) Aus dem Griechischen; bedeutet ursprünglich „das Gesägte“, dann eine Ecksäule, in der Physik ein meistens dreiseitig geschliffenes Glas zum Brechen der Lichtstrahlen.

**) Aus dem Griechischen; bedeutet „ein Körper mit parallelen Oberflächen“.

Körper, begrenzt von sechs Parallelogrammen. Ein gerader Parallellflächner ist ein solcher, dessen Seitenflächen Rechtecke sind; ein gerader Parallellflächner, bei dem auch die Grundflächen Rechtecke sind, heisst ein rechtwinkliger. Demnach ist ein rechtwinkliger Parallellflächner (abgekürzt: Rechtflächner, auch wohl Rechtecker oder Rechtskant oder Quader genannt) ein Körper, begrenzt von sechs Rechtecken (s. Figur). Sind in einem



Rechtflächner alle Grund- und Seitenkanten einander gleich, so heisst er ein Würfel oder Kubus. Demnach ist ein Würfel oder Kubus ein Körper, begrenzt von 6 Quadraten.

Der Würfel wird zum Messen der Körper benutzt.

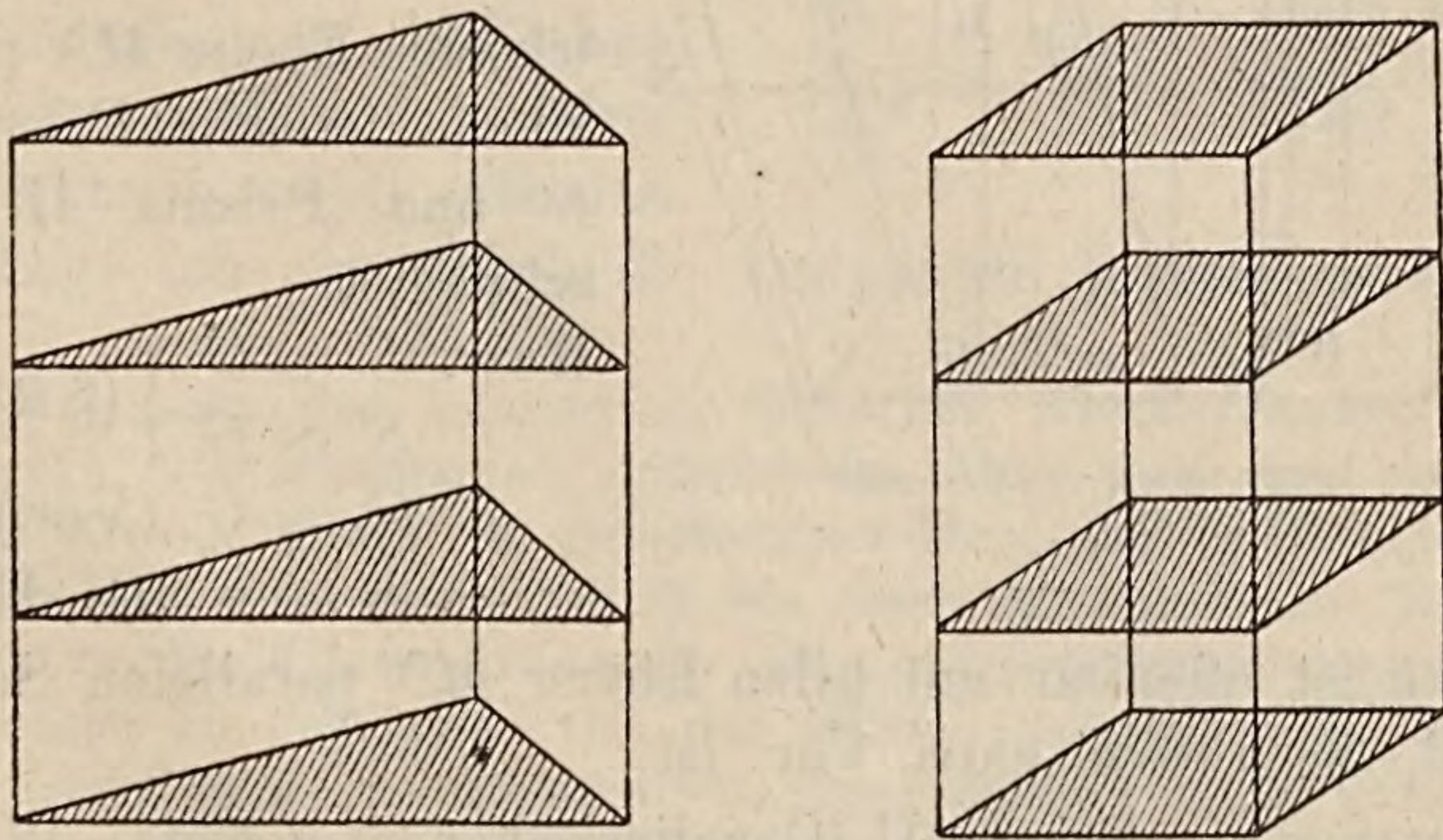
Als Masseinheit dient das Kubikmeter. Ein Kubikmeter (cbm) ist ein Würfel, dessen Kante 1 m ist. Oder: Ein Kubikmeter ist ein Körper begrenzt von sechs Quadratmetern.

§ 232. Cavalierischer Grundsatz.

Zur Inhaltsberechnung der Körper dient uns folgender von dem Italiener Cavalieri*) herrührender Grundsatz.

Körper sind inhaltsgleich, wenn alle den Grundflächen parallelen Schnitte in gleichen Abständen von den Grundflächen genommen einander gleich sind.

Erläuterung. Man denkt sich hierbei die Körper in unendlich viele, unendlich dünne Platten zerlegt. Sind nun alle



diese Platten einander gleich, so müssen auch ihre Summen, das sind aber die betreffenden Körper, einander gleich sein (s. Figur).

*) Cavalieri, 1598 zu Mailand geboren, ein Schüler des Galilei, war Professor der Mathematik und Astronomie zu Bologna, starb daselbst 1647.

§ 233.

Lehrsatz. Jeder den Grundflächen parallele Schnitt schneidet ein Prisma in einer den Grundflächen kongruenten Schnittfigur.

Vor. $S \parallel G \parallel G'$.

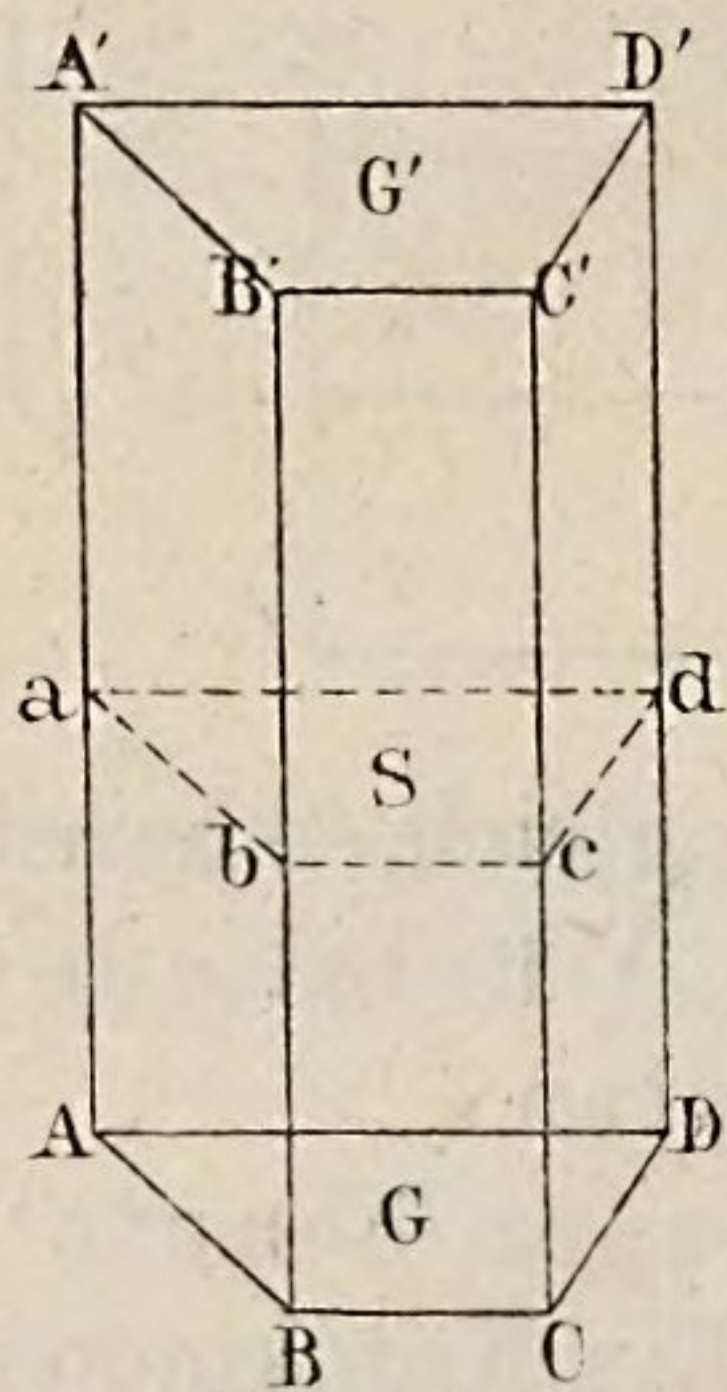
Beh. $S \cong G \cong G'$.

Bew. $\left. \begin{array}{l} ab = AB \\ bc = BC \\ cd = CD \\ ad = AD \end{array} \right\} (\S 229 \text{ u. } \S 34)$

$\left. \begin{array}{l} \sphericalangle bad = BAD \\ \sphericalangle abc = ABC \\ \sphericalangle bcd = BCD \\ \sphericalangle cda = CDA \end{array} \right\} (\S 228)$

$S \cong G$ (nach Erklärung der Kongruenz).

W. z. b. w.



§ 234.

Lehrsatz. Prismen von gleicher Grundfläche und Höhe sind einander gleich.

Vor. $G = G'$

$h = h'$.

Beh. Prisma I = Prisma II.
H. K. In gleichem Abstände von der gemeinsamen Grundebene MN , auf welche man die Prismen stellen kann, lege ich eine Ebene MN parallele Ebene, welche Prisma I in S und Prisma II in S' schneidet.

Bew. $\left. \begin{array}{l} S \cong G \\ S' \cong G' \end{array} \right\} (\S 233)$

$G = G'$ (Vor.)

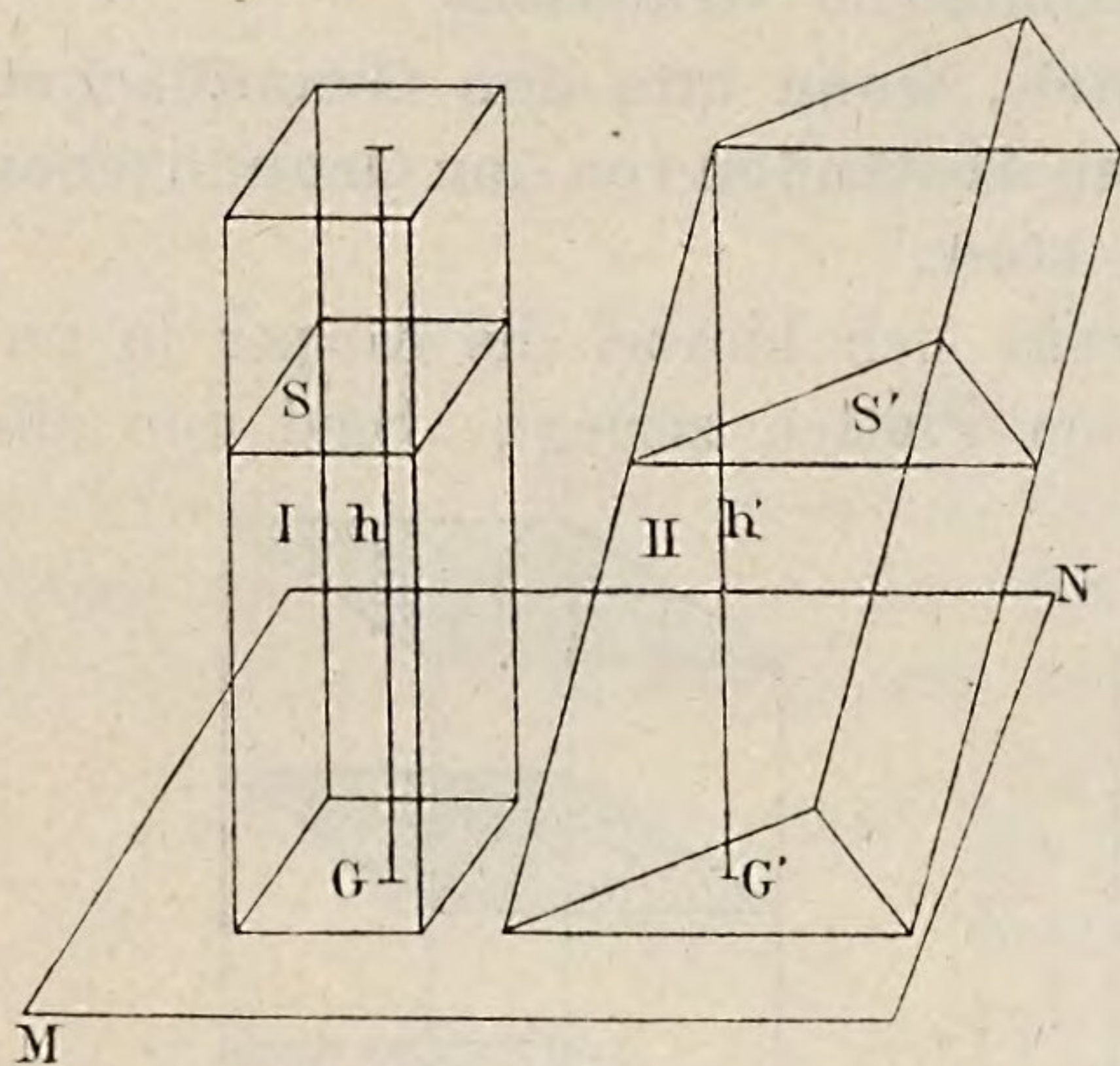
$S = S'$ (Gr. II).

Dies ist offenbar mit allen Ebene MN parallelen Schnitten der Fall, da $h = h'$ nach Vor. ist.

Prisma I = Prisma II (Cavalierischer Grundsatz). W. z. b. w.

§ 235. Inhalt des Prismas.

Der Inhalt eines Prismas ist gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe.



Formel: **Prisma** = $G \cdot h$.

Entwicklung der Formel*):

Lehrsatz 1. Rechtflächner, in denen die drei Kanten gleich sind, sind kongruent.

Vor. $a = x$

$b = y$

$c = z$.

Beh. Rechtflächner I $\cong$ Rechtflächner II.

Bew. Ich denke mir den Rechtflächner I aufgehoben und mit II zusammengelegt, dass

Rechteck $c \cdot b$ ganz auf das Rechteck $z \cdot y$ fällt (V.). Da nun $a \perp c \cdot b$ und $x \perp z \cdot y$ ist, muss auch a in die Richtung von x fallen. a fällt dann aber auch der Länge nach mit x zusammen, da $a = x$ ist (V.). Folglich müssen auch die Körper I und II ganz zusammenfallen, und folglich ist nach § 4

Rechtflächner I $\cong$ Rechtflächner II. W. z. b. w.

Lehrsatz 2. Rechtflächner mit zwei gleichen Kanten verhalten sich wie die dritten Kanten.

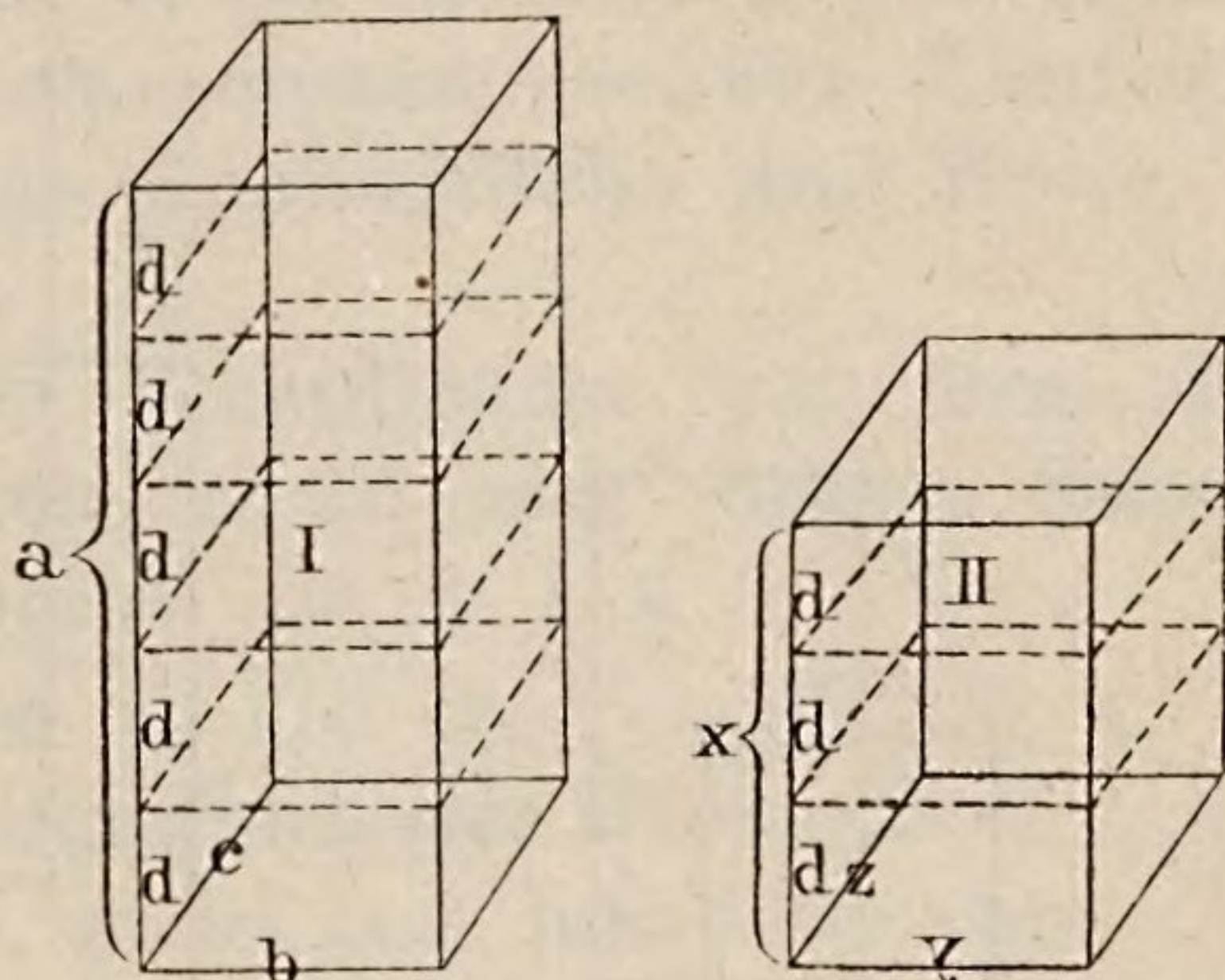
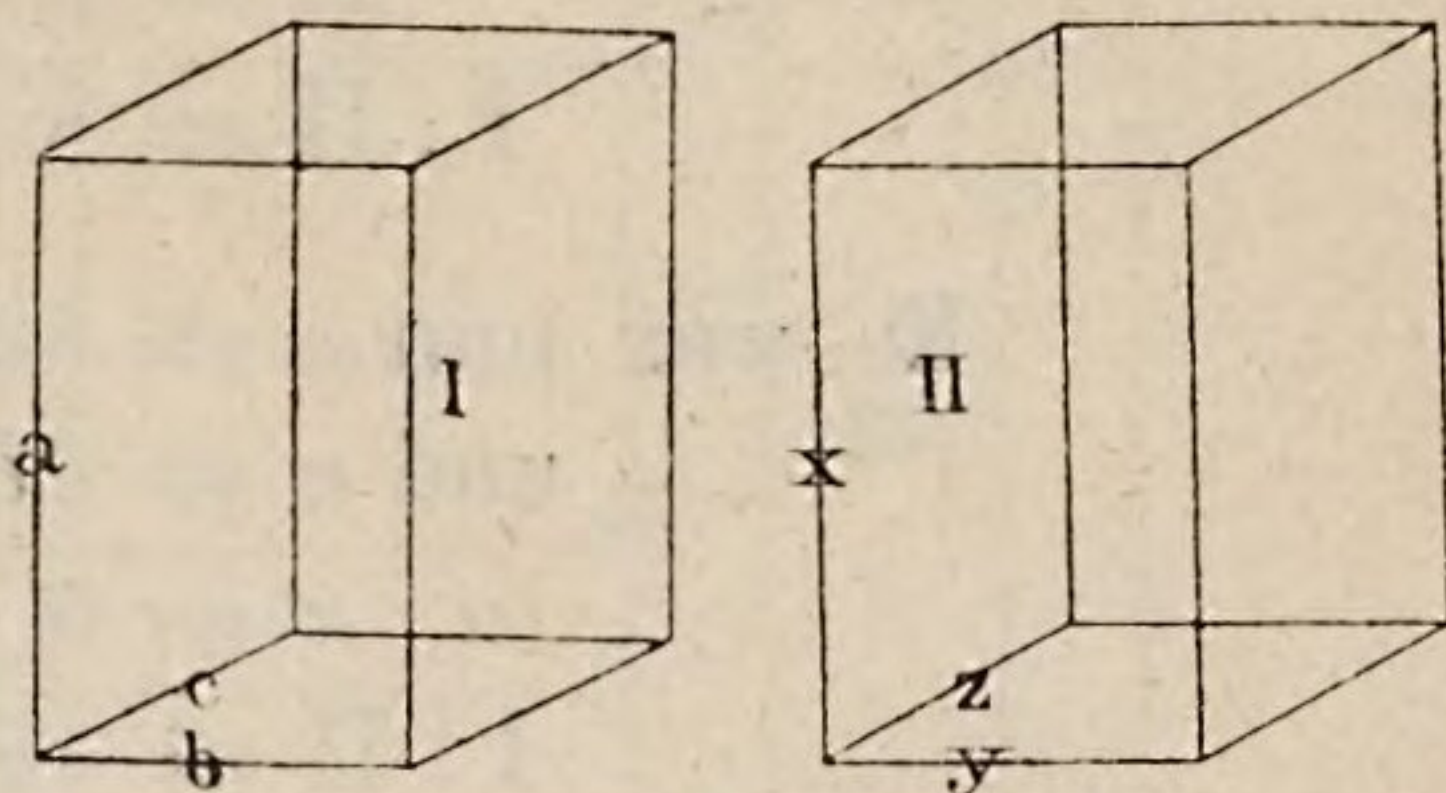
Vor. $b = y$

$c = z$.

Beh. Rechtflächner I : Rechtflächner II = $a : x$.

Bew. Ich denke mir die ungleichen Kanten durch ein gemeinsames Mass d geteilt. Dasselbe möge in a fünfmal (allgemein m mal) und in x dreimal (allgemein n mal) enthalten

sein. Lege ich nun durch die Teilpunkte Ebenen parallel den



*) Man kann den Lehrsatz 5, Seite 237, Rechtflächner = abc , auch direkt folgendermassen entwickeln: Man teilt drei zusammenstossende Kanten durch ein gemeinsames Mass, das in denselben a , b , c mal enthalten sein möge (vgl. § 56), und legt durch die Teilpunkte senkrecht zu den Kanten Ebenen. Durch die ersten Ebenen wird der Rechtflächner in a Schnitte von der Dicke 1 zerlegt, und durch die zweiten jeder Schnitt in b Streifen vom Querschnitt 1 . 1, der ganze Rechtflächner also in $a \cdot b$ solcher Streifen. Durch die dritten Ebenen zerfällt dann jeder Streifen in c Würfel von der Kante 1, der ganze Rechtflächner also in abc Würfel von der Kante 1, also Rechtflächner = abc .

Will der Lehrer diese Entwicklung zu Grunde legen, so können die Lehrsätze 1 bis 4 ganz fortfallen. Meines Erachtens ist aber die umständlichere Entwicklung in diesem Falle für den Schüler wertvoller.

Grundflächen, so entstehen in beiden Körpern Rechtflächner mit den Kanten c, b, d und z, y, d . Diese kleinen Rechtflächner (r) sind nach vorigem Lehrsatz einander $\cong$. Demnach ist:

$$\begin{array}{rcl} \text{Rechtflächner I} & = & 5r, \text{ allgemein} = m \cdot r \\ \text{„ II} & = & 3r, \text{ „} = n \cdot r \\ \hline \text{I : II} & = & 5 : 3, \text{ „} = m : n \quad (\text{Gr. V}_4). \end{array}$$

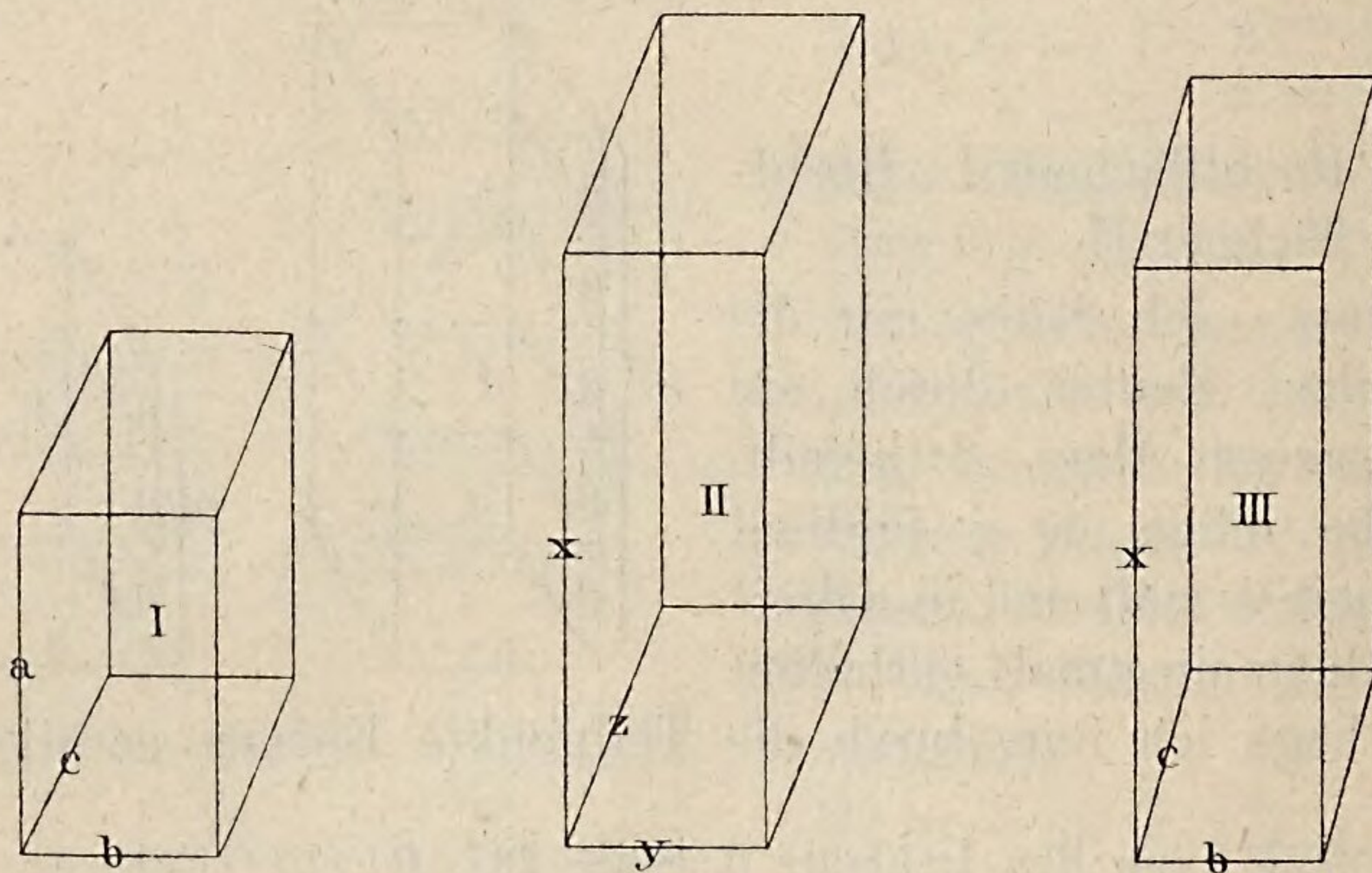
$$\begin{array}{rcl} \text{Es war nun } a & = & 5d, \text{ allgemein} = m \cdot d \\ \text{und } x & = & 3d, \text{ „} = n \cdot d \\ \hline a : x & = & 5 : 3, \text{ „} = m : n \quad (\text{Gr. V}_4) \\ \hline \text{I : II} & = & a : x \quad (\text{Gr. III}). \quad \text{W. z. b. w.} \end{array}$$

Lehrsatz 3. Rechtflächner mit einer gleichen Kante verhalten sich wie die Produkte aus den beiden ungleichen.

Vor. $b = y$.

Beh. Rechtflächner I : Rechtflächner II $= a \cdot c : x \cdot z$.

H. K. Ich zeichne einen dritten Rechtflächner (III) mit den Kanten b, c und x .

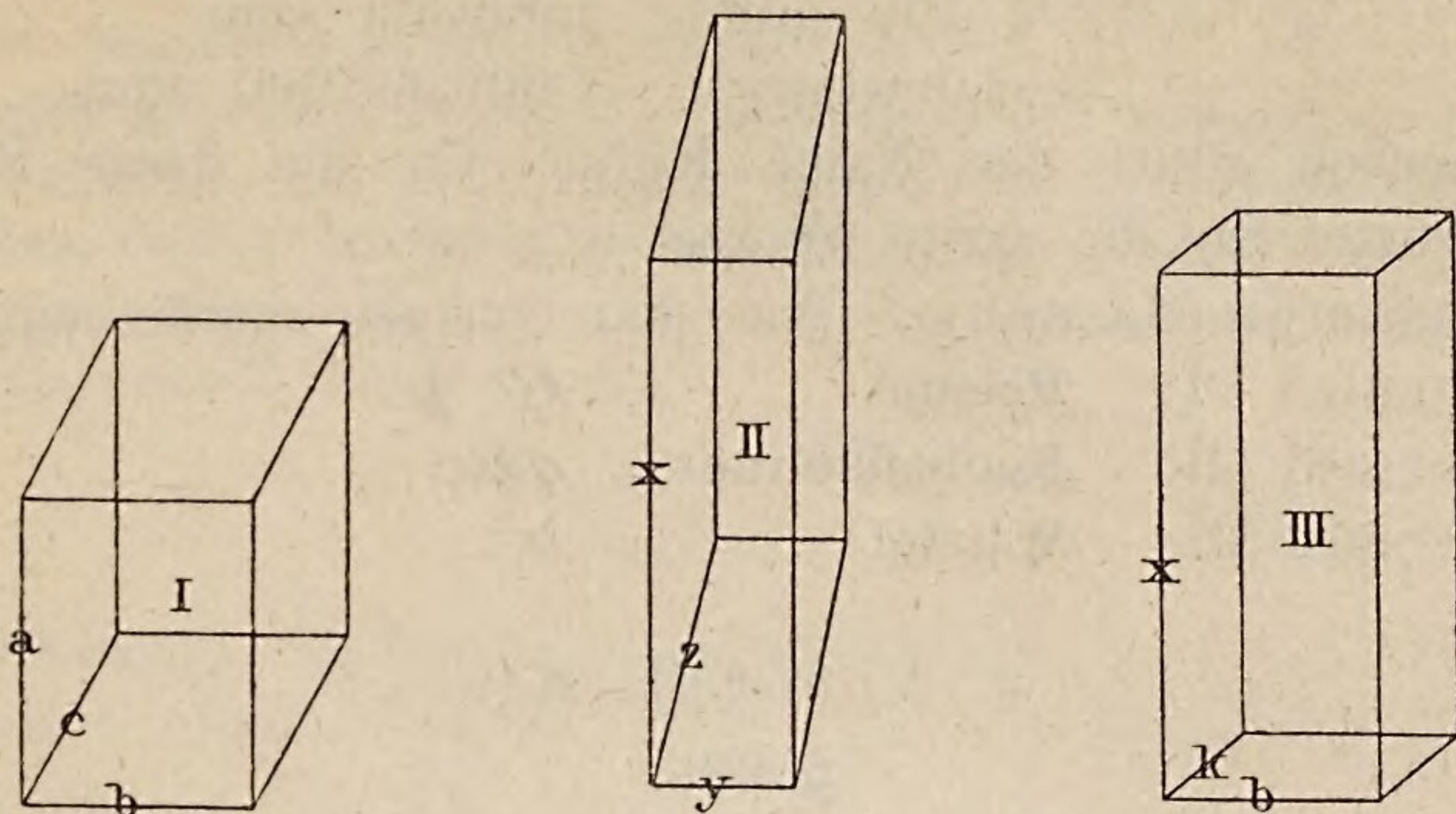


Bew. Der Rechtflächner III hat mit I und II je 2 gleiche Kanten. Demnach ist nach vorigem Satze:

$$\begin{array}{rcl} \text{I : III} & = & a : x \\ \text{III : II} & = & c : z \\ \hline \text{I : II} & = & a \cdot c : x \cdot z \quad (\text{Gr. V}_3). \\ & & \text{W. z. b. w.} \end{array}$$

Lehrsatz 4. Rechtflächner verhalten sich wie die Produkte aus ihren Kanten.

Beh. Rechtflächner I : Rechtflächner II = $abc : xyz$.



H. K. Ich zeichne einen dritten Rechtflächner mit den Kanten b und x und einer dritten beliebigen Kante k .

Bew. Der Rechtflächner III hat mit I und II je eine gleiche Kante. Demnach ist nach vorigem Satze:

$$\begin{aligned} \text{I : III} &= ac : xk \\ \text{III : II} &= bk : yz \\ \hline \text{I : II} &= abc : xyz \text{ (Gr. V}_3\text{). W. z. b. w.} \end{aligned}$$

Lehrsatz 5. Der Inhalt eines Rechtflächners ist gleich dem Produkt aus 3 zusammenstossenden Kanten oder gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe.

Beh. Rechtflächner = abc .

Bew. Vergleiche ich einen Rechtflächner mit dem als Körpermass dienenden Kubikmeter, so ist nach vorigem Satze:

$$\begin{aligned} \text{Rechtflächner : cbm} &= abc : 1.1.1 \\ \hline \text{Rechtflächner} &= abc \text{ cbm. W. z. b. w.} \end{aligned}$$

Ist z. B. ein rechtwinklig aufgeschichteter Haufen Holz 5 m lang, 4 m breit und 3 m hoch, so ist sein Inhalt 60 cbm.

Da nun beim Rechtflächner $b \cdot c = G$ und $a = h$ ist, so erhält man ebenfalls

$$\text{Rechtflächner} = G \cdot h,$$

in Worten: Der Inhalt eines Rechtflächners ist gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe.

Da nun nach § 234 jedes Prisma gleich einem Rechtflächner von gleicher Grundfläche und Höhe ist, so ist jedes

$$\text{Prisma} = G \cdot h.$$

Da der Würfel ein Rechtflächner mit gleichen Kanten ist ($a = b = c$), so erhalten wir:

$$\text{Würfel} = a^3.$$

In Worten: Der Inhalt eines Würfels ist gleich der dritten Potenz seiner Kante.

$$\begin{aligned} \text{Z. B. } 1 \text{ cbm} &= (10 \text{ dm})^3 = 1000 \text{ cdm} \\ &= (100 \text{ cm})^3 = 1\,000\,000 \text{ ccm} \\ &= (1000 \text{ mm})^3 = 1\,000\,000\,000 \text{ cmm.} \end{aligned}$$

Hiervon rührt der Name Kubus für die dritte Potenz, Kubikwurzel für die dritte Wurzel u. s. w.

Zusammenfassung: Aus dem vorigen merke man:

Formel I: Prisma $= G \cdot h$

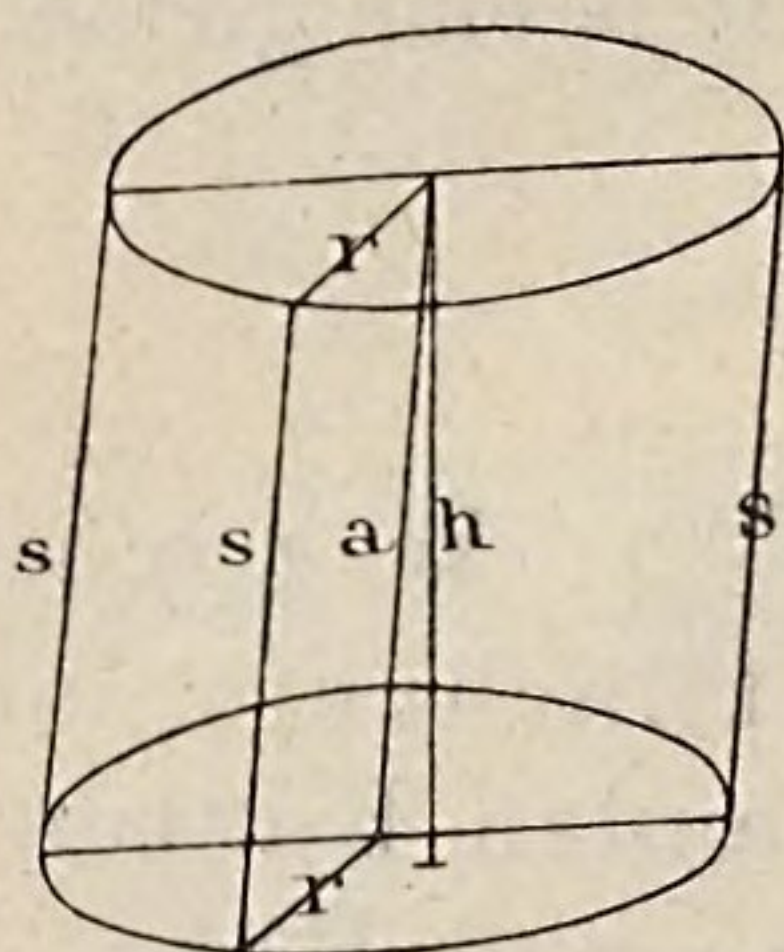
Formel II: Rechtflächner $= abc$

Formel III: Würfel $= a^3$.

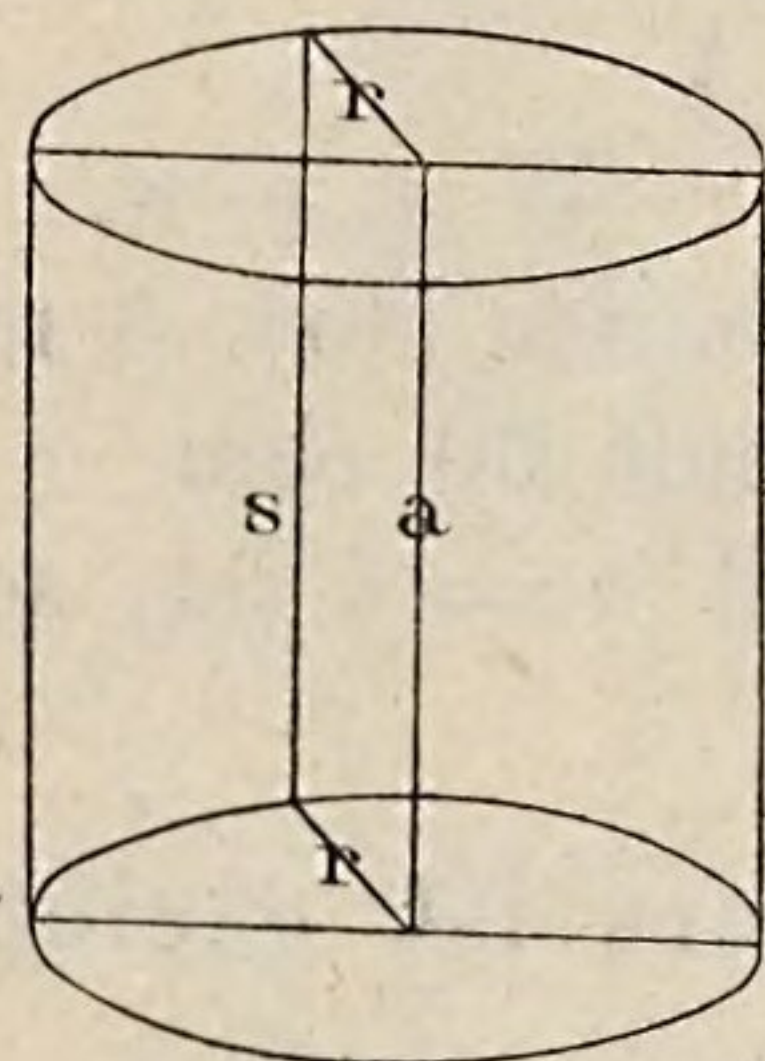
3. Vom Cylinder.

§ 236.

Erklärung. Ein Cylinder*) ist ein Körper, begrenzt von zwei parallelen und kongruenten Kreisen (den Grundkreisen) als Grundflächen und von einer krummen Seitenfläche (dem Mantel) von der Beschaffenheit, dass jede gerade Verbindungslinie der Endpunkte zweier paralleler Radien der Grundkreise ganz in sie fällt.



Die Verbindungslinie der beiden Centren heisst die Axe**) des Cylinders (a), die Verbindungslinien der Endpunkte paralleler Radien heissen die Seitenlinien (s). Die Seitenlinien bilden in ihrer Gesamtheit den Mantel. Der senkrechte Abstand der Grundkreise heisst die Höhe des Cylinders (h).



Fällt die Höhe des Cylinders mit seiner Axe zusammen, so heisst der Cylinder gerade, sonst schief. Ein gerader Cylinder ist demnach ein solcher, bei welchem die Axe senkrecht auf den Grundflächen steht (ebenso alle Seitenlinien), ein schiefer, bei dem sie schief steht (ebenso alle Seitenlinien). Alle Seitenlinien eines Cylinders sind einander und der Axe parallel und gleich.

Entstehung. Man kann sich einen Cylinder auf folgende Weise entstanden denken:

1. Bewegt sich eine Strecke mit dem einen Endpunkte auf der Peripherie eines Kreises als Leitlinie parallel mit sich selber, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt, so entsteht durch

*) Aus dem Griechischen; bedeutet „Rundsäule, Walze“.

**) Aus dem Lateinischen; bedeutet eine Gerade, die durch den Mittelpunkt eines Körpers geht.

diese Bewegung eine Cylinderfläche, und der von dieser, dem ursprünglichen und dem durch den anderen Endpunkt neu erzeugten Kreise begrenzte Körper ist ein Cylinder.

2. Werden bei einem Prisma die Grundflächen zu Kreisen, so entsteht ein Cylinder. Daher kann jeder Cylinder als ein Prisma angesehen werden, dessen Grundflächen zu Kreisen geworden sind. (Vgl. § 74.)
3. Ein gerader Cylinder entsteht durch Rotation eines Rechtecks um eine seiner Seiten als Axe.

§ 237.

Lehrsatz. Jeder den Grundflächen parallele Schnitt schneidet einen Cylinder in einem den Grundflächen kongruenten Kreise.

Vor. $S \parallel G \parallel G'$.

Beh. $S \odot$; $S \cong G \cong G'$.

H. K. Durch die Axe CC' lege ich zwei beliebige Ebenen, welche G , S und G' schneiden in CA , OB , $C'A'$, CD , OE und $C'E'$.

Bew. $OB \parallel AC$; $OE \parallel CD$ (§ 229)

$AB \parallel OC$; $DE \parallel OC$ (Seitenlinien)

$BO = AC$; $OE = CD$ (§ 34)

$AC = CD$ (r)

$BO = OE$ (Gr. III).

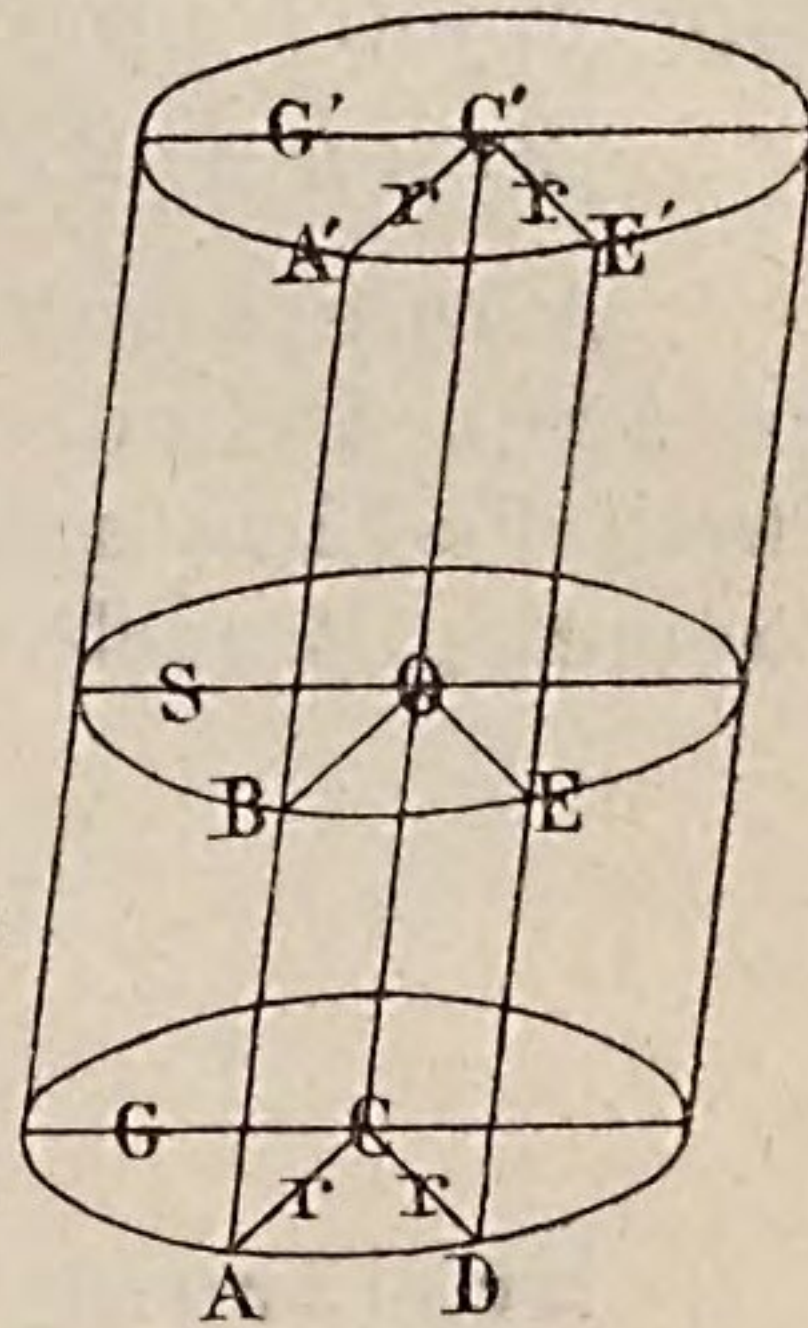
Dies kann man offenbar, indem man weitere Ebenen durch CC' legt, von allen Strecken beweisen, die man in der Schnittfigur von O aus nach ihrem Umfange zieht. Folglich

$S \odot$ mit O als Mittelpunkt.

$BO = AC = r$

$S \cong G \cong G'$ (Kreise mit gleichem r).

W. z. b. w.



§ 238. Inhalt des Cylinders.

Der Inhalt eines Cylinders ist gleich dem Produkt aus dem Grundkreise und der Höhe.

Formel: $\text{Cyl.} = r^2 \pi h$.

Entwicklung der Formel: Der Cylinder kann als ein Prisma von unendlich vielen, unendlich schmalen Seitenflächen angesehen werden (§ 236). Daher:

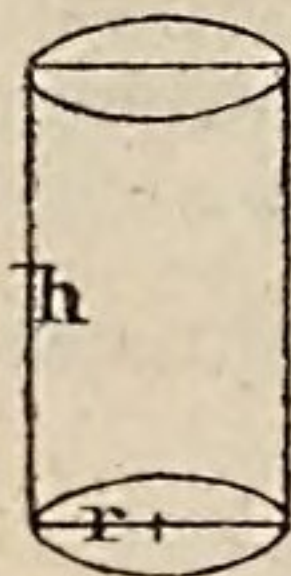
$\text{Cyl.} = G \cdot h$ (Formel I)

$G = \odot = r^2 \pi$ (§ 77)

Formel IV. $\text{Cyl.} = r^2 \pi h$ (Gr. II).

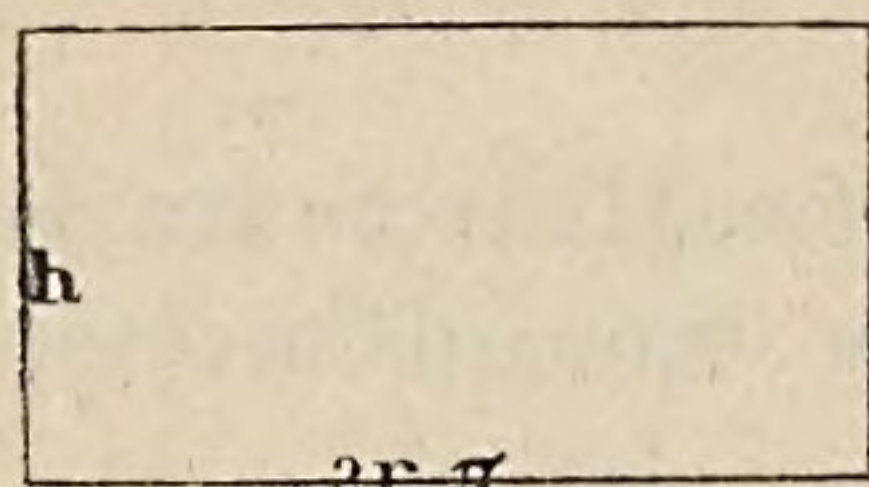
§ 239. Oberfläche des geraden Cylinders.

Der Mantel eines geraden Cylinders ist gleich dem Produkte aus seiner Höhe und der Peripherie des Grundkreises.



Formel: **Gerader Cylindermantel** = $2r\pi h$.

Entwicklung der Formel: Wenn man sich den Mantel eines geraden Cylinders in einer Seitenlinie aufgeschnitten denkt (vgl. § 236₃) und in eine Ebene



abwickelt, so entsteht ein Rechteck, dessen eine Seite gleich der Höhe des Cylinders und dessen andere Seite gleich der Peripherie des Grundkreises ist.

Demnach ist, da $P = 2r\pi$ ist (§ 76),

Formel V. **Gerader Cylindermantel** = $2r\pi \cdot h$.

Die Gesamtoberfläche des geraden Cylinders ist dann gleich dem Mantel plus den beiden Grundkreisen, also gleich

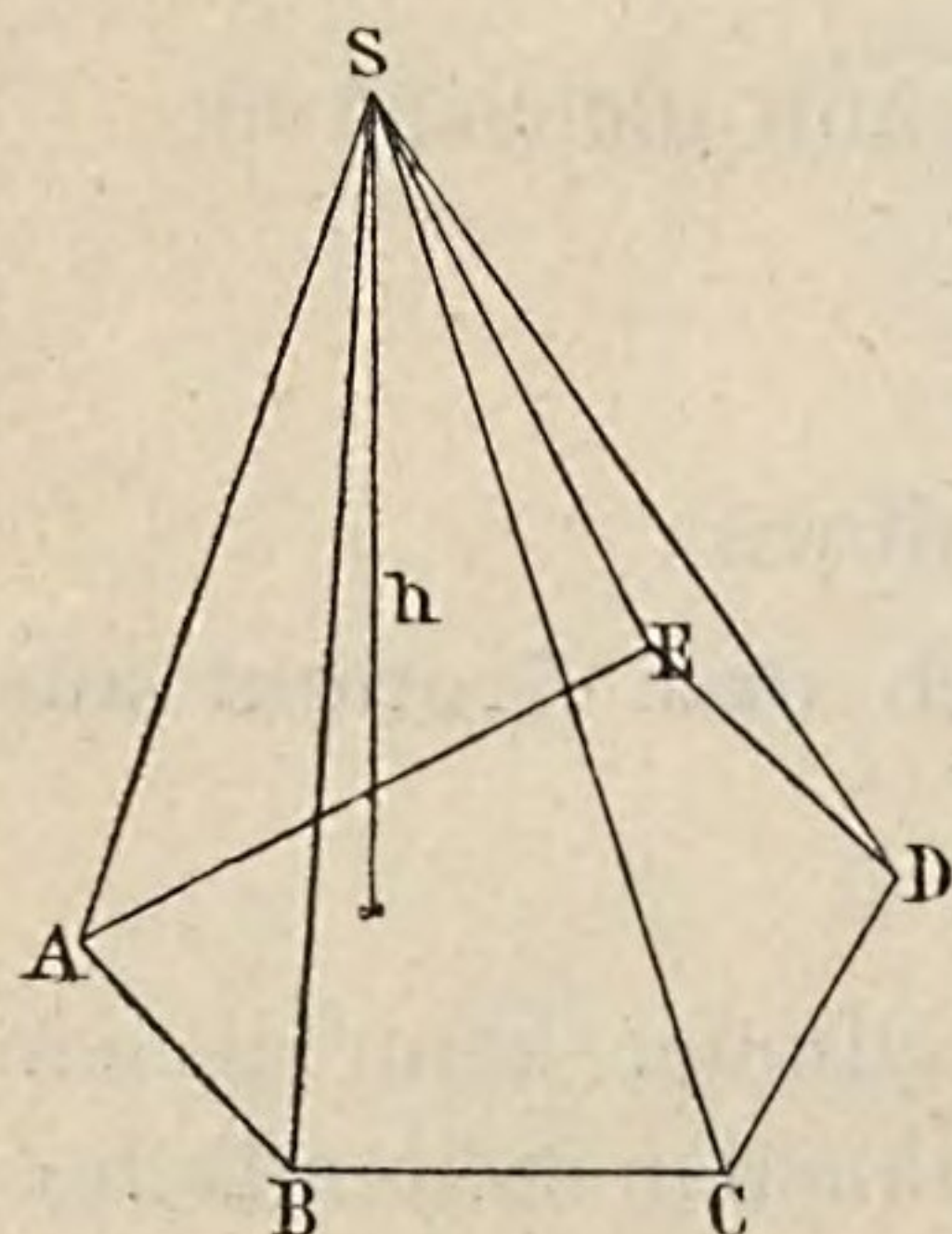
$$2r\pi h + 2r^2\pi, \text{ also: Oberfl. ger. Cyl.} = 2r\pi (h + r).$$

Anmerkung. Man merke wohl, dass diese Formel nur für den geraden Cylinder gilt. Der Mantel eines schiefen Cylinders kann durch die Elementarmathematik nicht berechnet werden. Die Inhaltsformel gilt auch für den schiefen Cylinder.

4. Von der Pyramide.

§ 240.

Erklärung. Eine Pyramide*) ist ein Körper, begrenzt von einem Polygon als Grundfläche und soviel sich in einem Punkte, der Spitze, vereinigenden Dreiecken als Seitenflächen, wie das Polygon Seiten hat.



Das von der Spitze auf die Grundfläche gefällte Lot heisst die Höhe der Pyramide. Nach der Anzahl der Seiten der Grundfläche heisst die Pyramide eine dreiseitige, vierseitige , allgemein n seitige. Z. B. $SABCDE$ fünfseitige Pyramide. Ist die Grundfläche ein reguläres Vieleck, so heisst die Pyramide eine reguläre.

*) Aus dem Griechischen, ursprünglich aus dem Ägyptischen; bedeutet „Spitzsäule“.

§ 241.

Lehrsatz. Wenn in einer Pyramide der Fusspunkt der Höhe gleichweit von den Ecken der Grundfläche entfernt ist, so sind sämtliche Seitenkanten einander gleich; die Pyramide heisst dann eine gerade.

Vor. $SF \perp G$; $FA = FB = FC = FD$.

Beh. $SA = SB = SC = SD$.

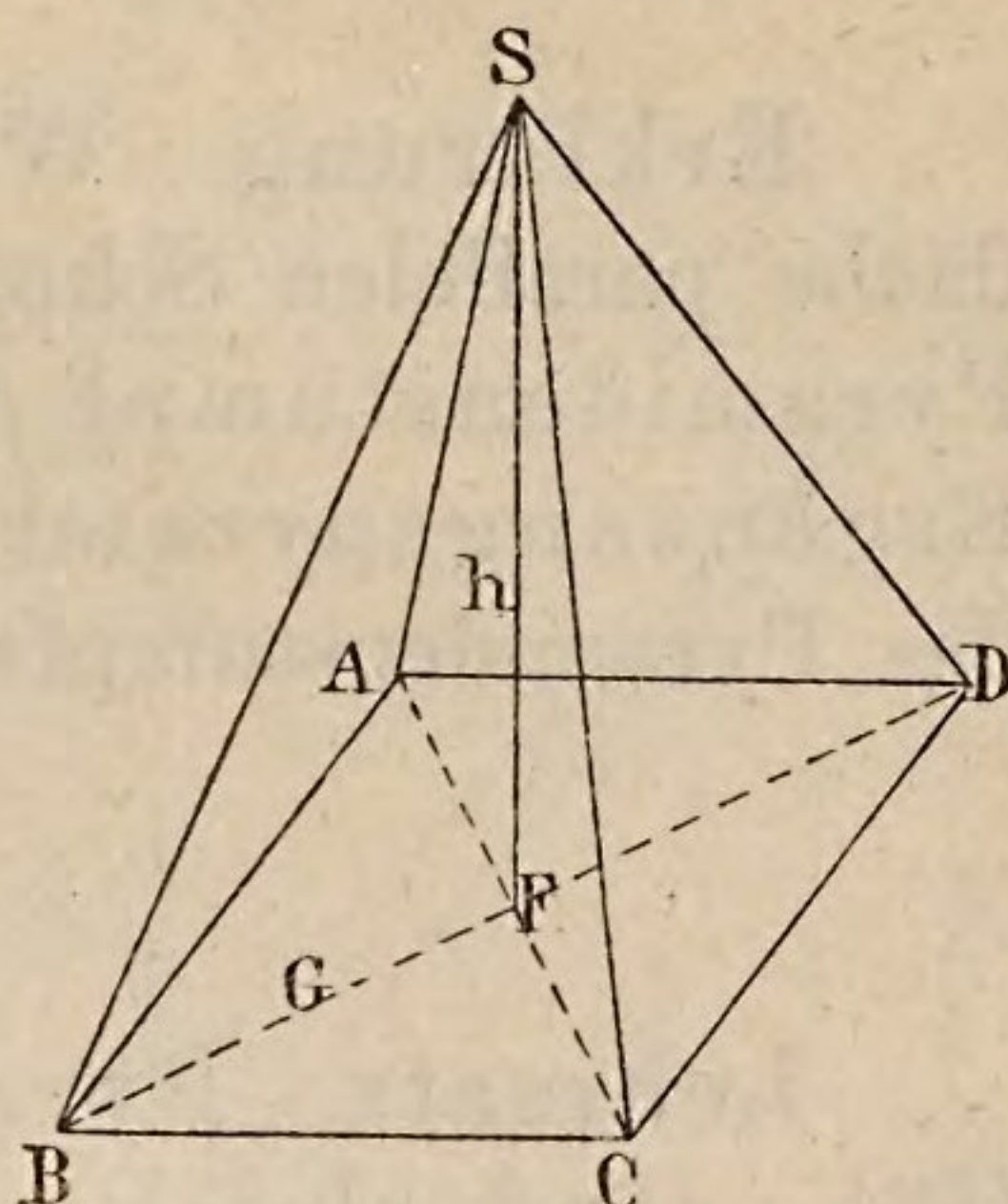
Bew. $\triangle SFA \cong \triangle SFB \cong \triangle SFC \cong \triangle SFD$ (K. I)

$SA = SB = SC = SD$ (h. St.)

W. z. b. w.

Aus obigem Lehrsatz folgt: Eine gerade Pyramide ist eine solche, deren Seitenkanten sämtlich einander gleich sind. Um die Grundfläche einer geraden Pyramide ist ein Kreis möglich; der Fusspunkt der Höhe ist sein Mittelpunkt.

In einer regulären geraden Pyramide sind die Seitenflächen kongruent (K. III). Die berühmten Pyramiden der alten Ägypter waren vierseitige, reguläre, gerade Pyramiden (s. Figur).



§ 242.

Lehrsatz. Jeder der Grundfläche parallele Schnitt schneidet eine Pyramide in einer der Grundfläche ähnlichen Schnittfigur; Schnittfigur und Grundfläche verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze.

Vor. $G' \parallel G$; $SF \perp G$ und G' .

Beh. I. $G' \sim G$

II. $G' : G = h'^2 : h^2$.

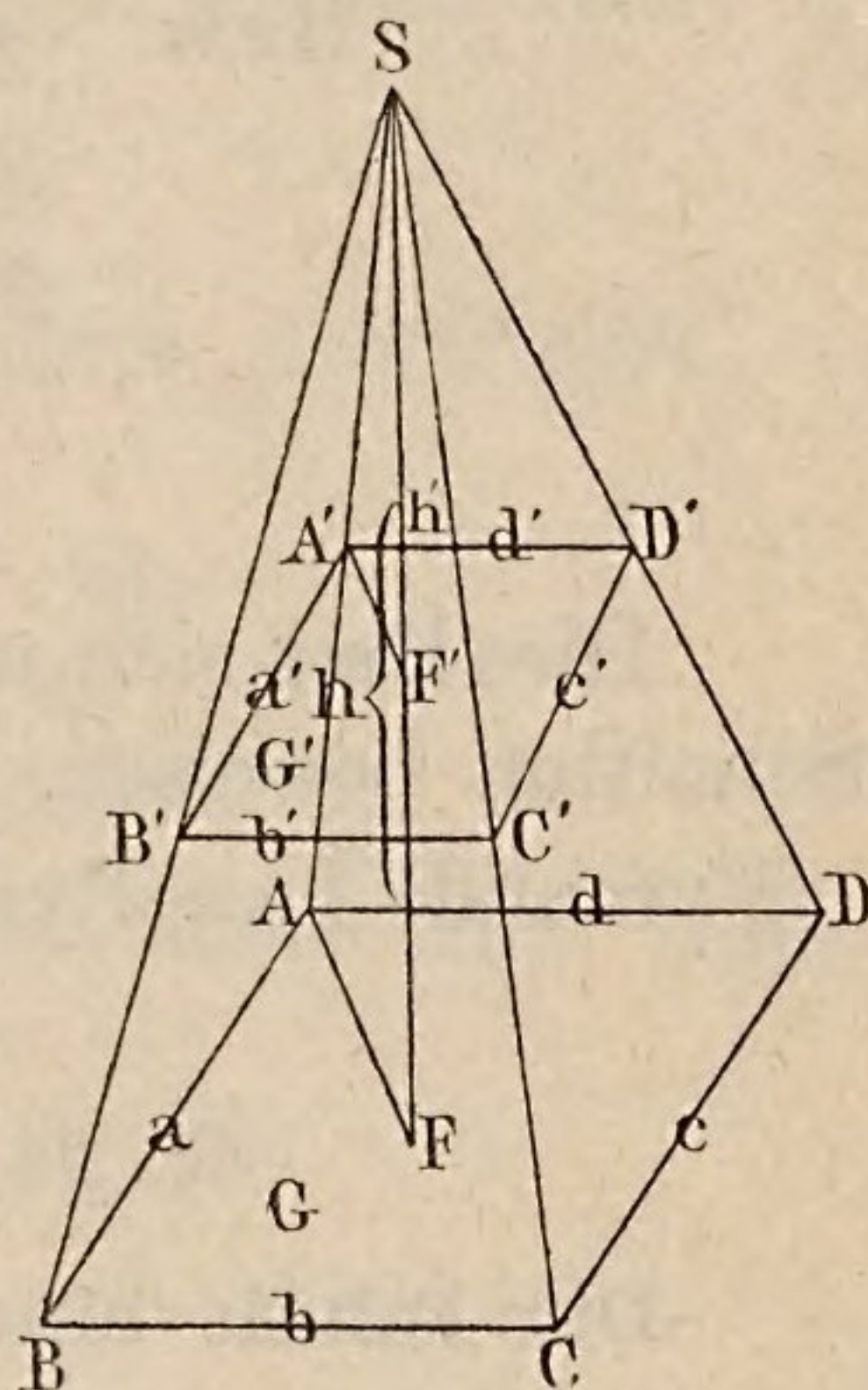
Bew. I. $A'B' : AB = SB' : SB$ (Proportionalitätssatz)
 $B'C' : BC = SB' : SB$

$A'B' : AB = B'C' : BC$ (Gr. III),

oder 1. $a' : b' = a : b$
 2. $b' : c' = b : c$
 3. $c' : d' = c : d$
 4. $d' : a' = d : a$ } (wird ebenso bewiesen)

5. $\sphericalangle B'A'D' = \sphericalangle BAD$
 6. $\sphericalangle C'B'A' = \sphericalangle CBA$
 7. $\sphericalangle B'C'D' = \sphericalangle BCD$
 8. $\sphericalangle C'D'A' = \sphericalangle CDA$ } (§ 228)

$G' \sim G$ (Erklärung der Ähnlichkeit).



II. $G' : G = a'^2 : a^2$ (§ 70, Folg.)

$$a' : a = SA' : SA = SF' : SF \quad (\text{Proportionalsatz}) = \\ = h' : h$$

$$\frac{G' : G = h'^2 : h^2}{\text{(Gr. II).}} \quad \text{W. z. b. w.}$$

Erklärung. Wird eine Pyramide durch einen der Grundfläche parallelen Schnitt geschnitten, so heisst der untere Teil Pyramidenstumpf (abgestumpfte Pyramide) und der obere Ergänzungspyramide. Der Abstand der beiden Grundflächen des Pyramidenstumpfs ist seine Höhe.

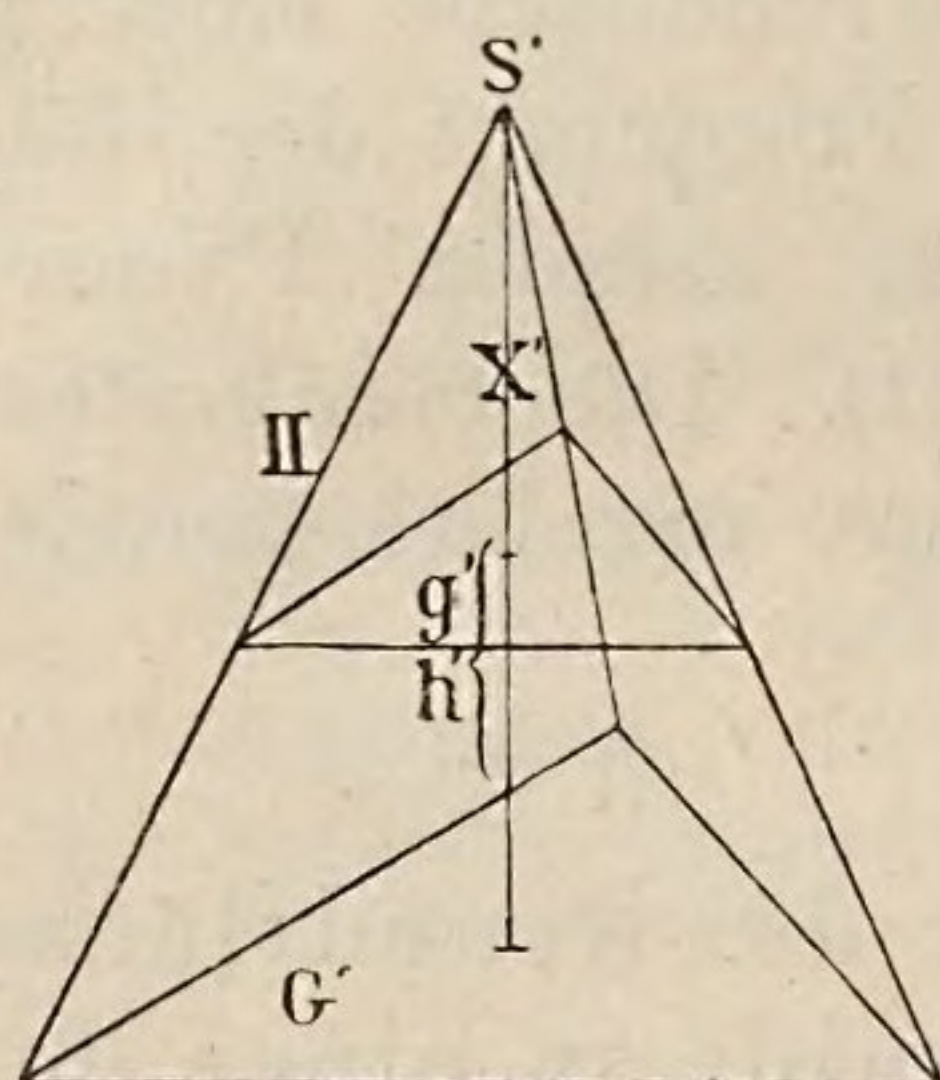
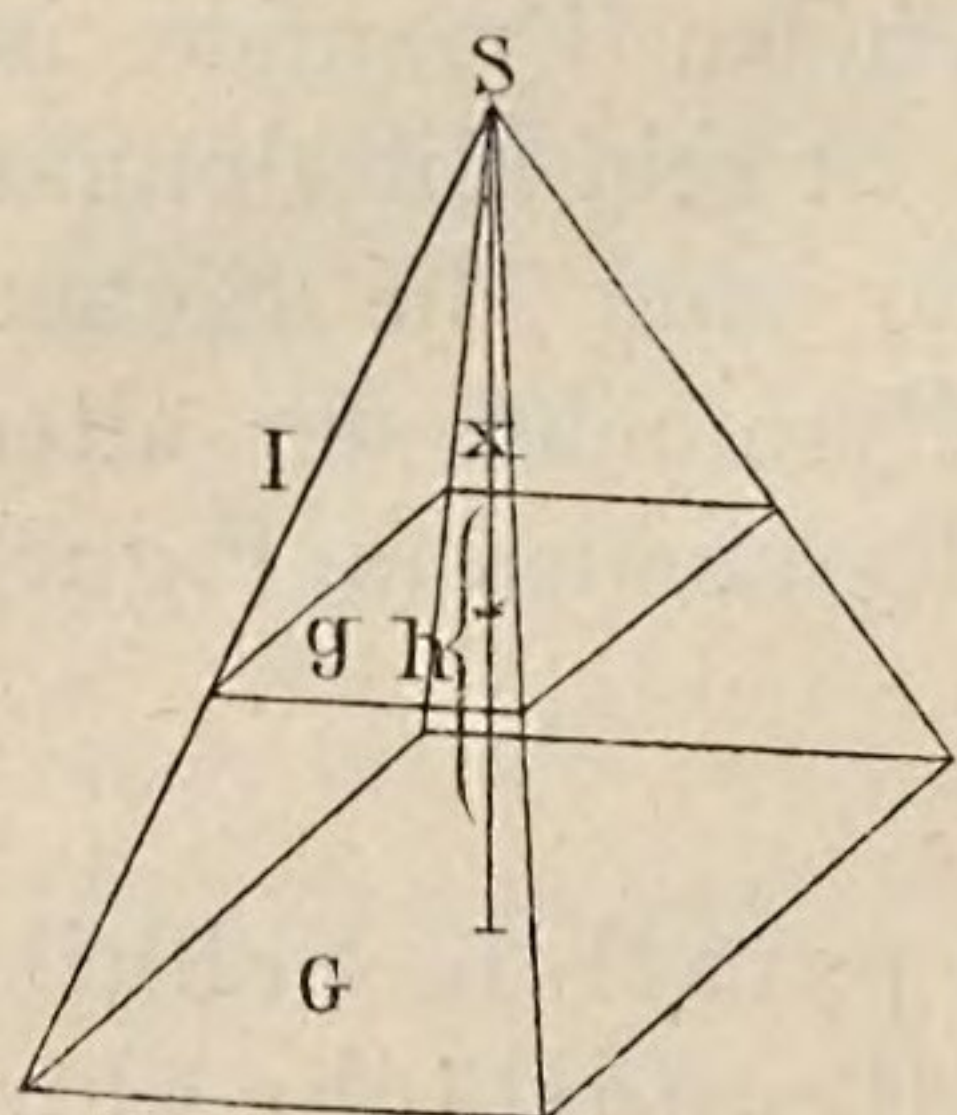
§ 243.

Lehrsatz. Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe sind gleich.

$$\text{Vor. } G = G' \\ h = h'.$$

Beh. Pyramide I = Pyramide II.

H. K. In demselben Abstände ($x = x'$ von der Spitze) lege ich einen den Grundflächen parallelen Schnitt, der die Pyramiden in g und g' schneidet.



$$\text{Bew. } \left. \begin{array}{l} g : G = x^2 : h^2 \\ g' : G' = x'^2 : h'^2 \end{array} \right\} (\S 242) \\ \frac{g : G = g' : G'}{G = G' \quad (\text{V.})} \quad (\text{Gr. III}) \\ \frac{G = G'}{g = g' \quad (\S 123, \text{Zus. 5}).}$$

Dies lässt sich offenbar von allen den Grundflächen parallelen Schnitten beweisen, folglich

Pyramide I = Pyramide II (Cavalierischer Gr.). W. z. b. w.

§ 244. Inhalt der Pyramide.

Der Inhalt einer Pyramide ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus Grundfläche und Höhe. *)

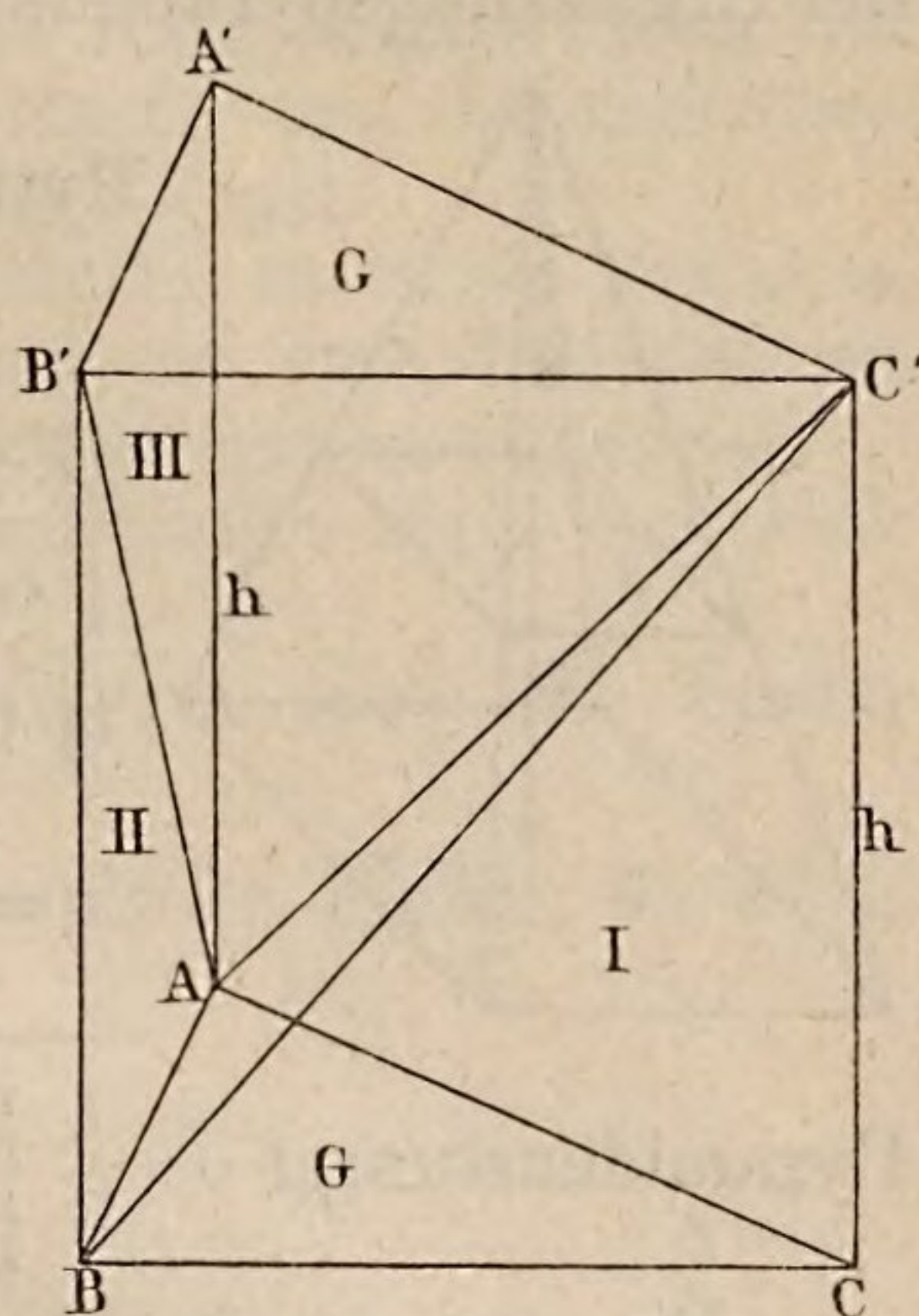
$$\text{Formel: } \text{Pyr.} = \frac{G \cdot h}{3}.$$

*) Dieser Satz soll von dem griechischen Mathematiker Eudoxos, 408 bis 355 v. Chr., einem Schüler Platos, gefunden worden sein.

Entwicklung der Formel. Wir gehen aus vom dreiseitigen Prisma.

Lehrsatz. Durch zwei Schnitte kann man jedes dreiseitige Prisma in drei untereinander gleiche dreiseitige Pyramiden zerlegen.

Beweis: In dem dreiseitigen Prisma $A'B'C'ABC$ mit der Grundfläche G und der Höhe h lege ich den ersten Schnitt durch C' und AB . Dadurch wird die dreiseitige Pyramide I ($C'ABC$) mit der Grundfläche G und der Höhe h abgeschnitten. In der übrig gebliebenen vierseitigen Pyramide $C'A'B'BA$ lege ich durch C' und die Diagonale $B'A$ den zweiten Schnitt.



Hierdurch entstehen zwei neue dreiseitige Pyramiden II ($C'B'BA$) und III ($C'A'B'A$) mit der gemeinsamen Spitze C' und den Grundflächen $B'BA$ und $A'B'A$. Da nun diese Grundflächen als kongruente Dreiecke (§ 34) einander gleich sind und die beiden Pyramiden dieselbe Höhe haben ($\perp$ von C' auf $A'B'BA$), so ist

$$\text{Pyr. II} = \text{Pyr. III} \quad (\S 243).$$

Die Pyramide III kann aber auch angesehen werden als dreiseitige Pyramide mit der Spitze A und der Grundfläche $A'B'C'$. Als solche hat sie die Grundfläche G und die Höhe h , und es ist demnach:

$$\text{Pyr. III} = \text{Pyr. I} \quad (\S 243)$$

$$\text{Pyr. I} = \text{Pyr. II} = \text{Pyr. III} = \frac{1}{3} \text{ Prisma } A'B'C'ABC.$$

Da nun nach Formel I

$$\text{Prisma } A'B'C'ABC = G \cdot h \text{ ist,}$$

$$\text{so ist jede dreiseitige Pyramide} = \frac{G \cdot h}{3}.$$

Da aber Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe einander gleich sind (§ 243), so erhält man

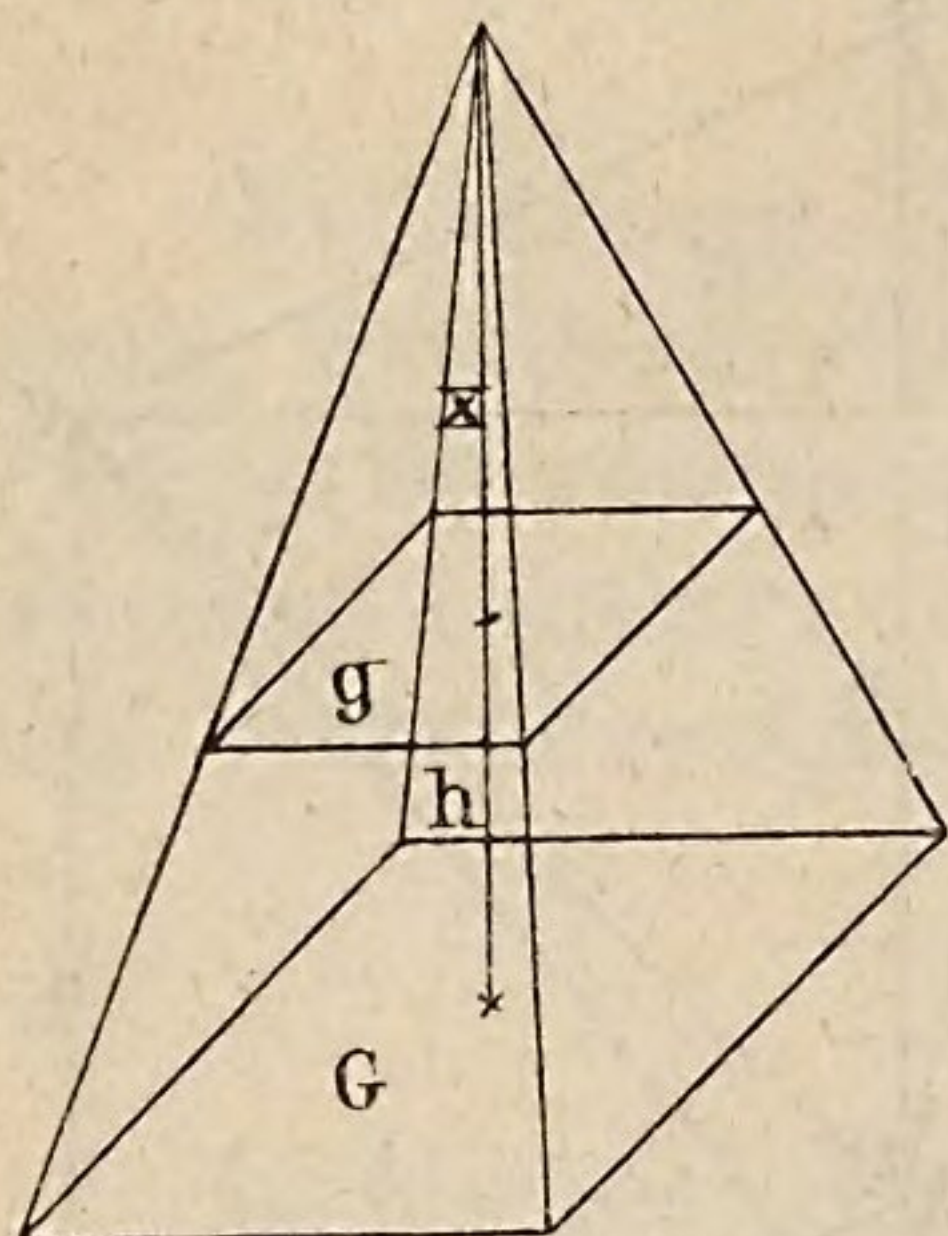
$$\text{Formel VI: Pyramide} = \frac{G \cdot h}{3}.$$

§ 245. Inhalt des Pyramidenstumpfs.

Bezeichnet man bei einem Pyramidenstumpf die beiden Grundflächen mit G und g und seine Höhe mit h , so gilt die

$$\text{Formel: Pyramidenstumpf} = (G + \sqrt{G \cdot g} + g) \frac{h}{3}.$$

Entwicklung der Formel. Ergänzt man den Stumpf von der Höhe h zu einer Pyramide und bezeichnet man die Höhe der Ergänzungspyramide mit x , so ist nach vorigem Paragraphen:



$$\begin{aligned} \text{Pyramidenstumpf} &= \frac{G(h+x)}{3} - \frac{g \cdot x}{3} = \\ &= \frac{1}{3} [Gh + (G-g)x] \end{aligned}$$

$$G : g = (h+x)^2 : x^2 \quad (\S 242)$$

$$\sqrt{G} : \sqrt{g} = (h+x) : x \quad (\text{Gr. V}_6)$$

$$(\sqrt{G} - \sqrt{g}) : \sqrt{g} = h : x \quad (\text{K. S.})$$

$$x = \frac{h \cdot \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$$

$$\text{Pyramidenstumpf} = \frac{1}{3} \left[G \cdot h + \frac{(G-g) h \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} \right].$$

Da nun gemäss der Formel $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$G - g = (\sqrt{G} + \sqrt{g})(\sqrt{G} - \sqrt{g})$ ist, so ist

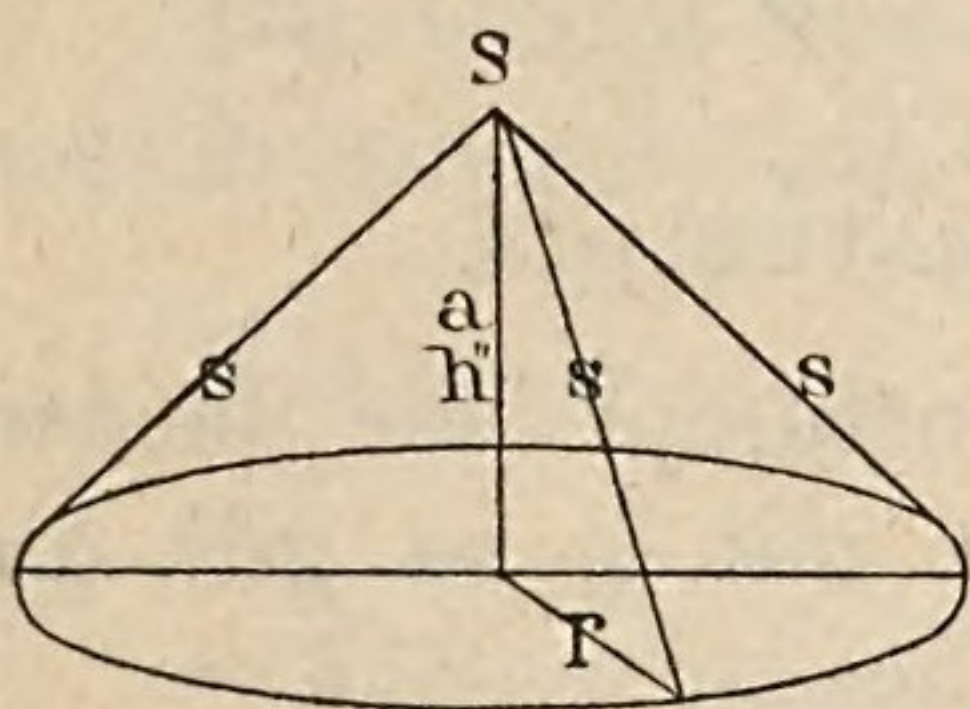
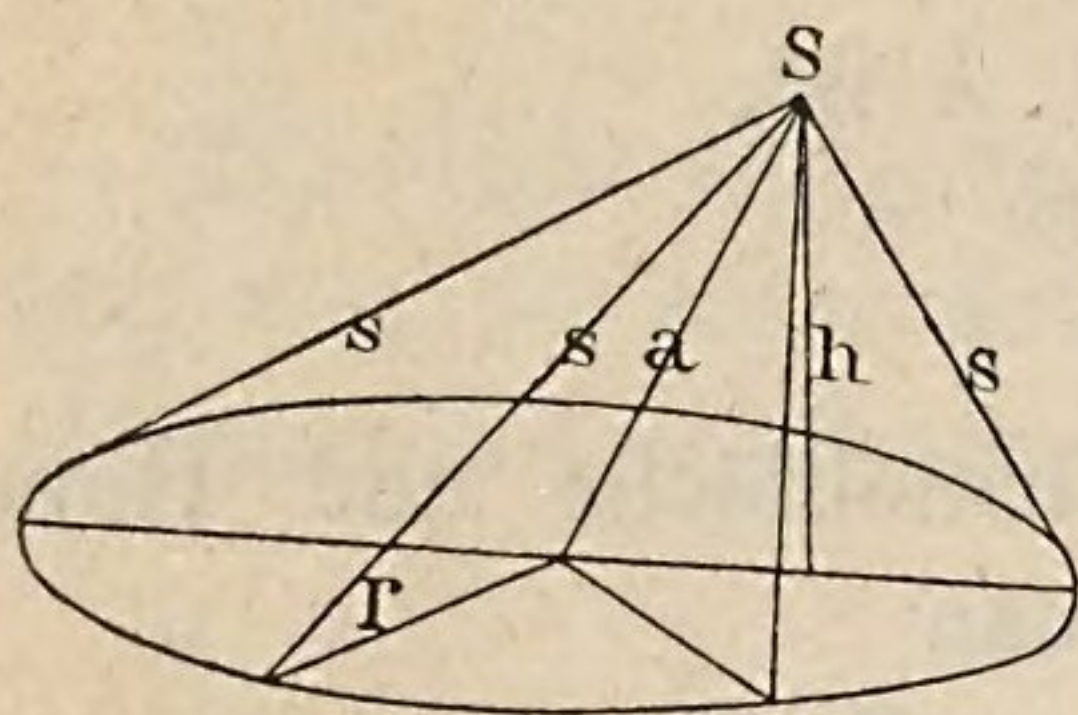
Pyramidenstumpf $= \frac{1}{3} [G \cdot h + (\sqrt{G} + \sqrt{g}) h \sqrt{g}]$ oder

Formel VII: **Pyramidenstumpf** $= (G + \sqrt{G \cdot g} + g) \frac{h}{3}.$

5. Vom Kegel.

§ 246.

Erklärung. Ein Kegel ist ein Körper, begrenzt von einem Kreise als Grundfläche und von einer krummen von einem Punkte (der Spitze) ausgehenden Seitenfläche (dem Mantel) von der Beschaffenheit, dass jede von der Spitze nach einem Punkte der Peripherie des Grundkreises gezogene Gerade ganz in sie fällt.



Die Verbindungslinie des Centrums des Grundkreises mit der Spitze heisst die Axe (a) des Kegels, die Verbindungslinien der Spitze mit der Peripherie des Grundkreises sind die Seitenlinien (s). Die Seitenlinien bilden in ihrer Gesamtheit den Mantel. Der Abstand der Spitze vom Grundkreise heisst die Höhe des Kegels (h). Fällt die Höhe des Kegels mit seiner Axe zusammen, so heisst der Kegel gerade, sonst schief. Ein gerader Kegel ist demnach ein solcher, bei welchem die Axe senkrecht auf dem Grundkreise steht.

Entstehung. Man kann sich einen Kegel auf folgende Weise entstanden denken:

1. Bewegt sich eine in einem Punkte festgelegte Gerade so, dass sie nacheinander alle Punkte der Peripherie eines Kreises durchläuft so entsteht durch diese Bewegung eine Kegelfläche, und der von dieser und dem Grundkreise begrenzte Körper heisst Kegel.

2. Wird bei einer Pyramide die Grundfläche zu einem Kreise, so entsteht ein Kegel. Daher kann jeder Kegel als eine Pyramide angesehen werden, deren Grundfläche zu einem Kreise geworden ist.

3. Ein gerader Kegel entsteht durch Rotation eines rechtwinkligen Dreiecks um eine seiner Katheten.

Zusätze: 1. Bei einem geraden Kegel sind alle Seitenlinien einander gleich.

2. Sind bei einem Kegel alle Seitenlinien gleich, so ist er gerade.

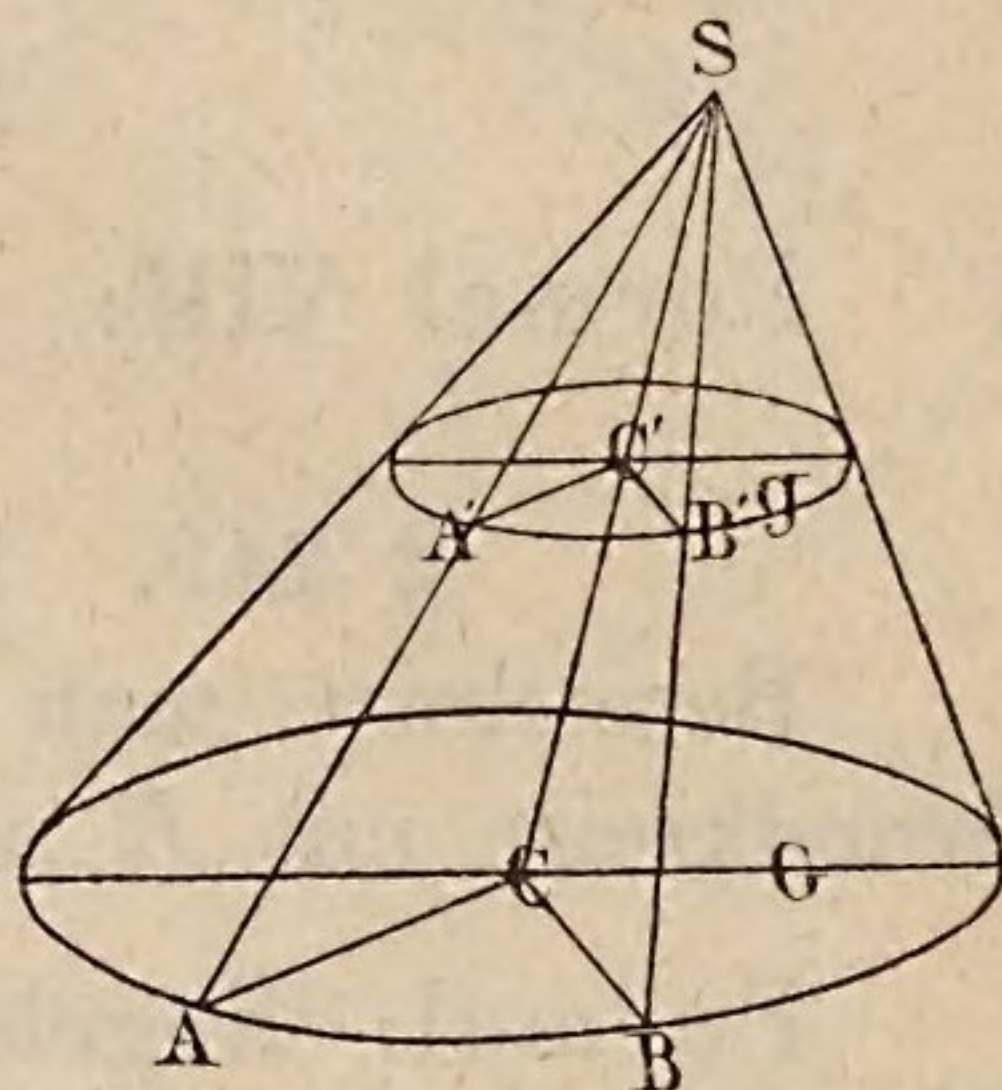
§ 247.

Lehrsatz. Jeder dem Grundkreise parallele Schnitt schneidet den Kegel in einem Kreise.

Vor. $g \parallel G$.

Beh. $g \odot$.

H. K. Durch die Axe SC lege ich zwei beliebige Ebenen, welche G und g in CA , $C'A'$, CB und $C'B'$ schneiden.



Bew.
$$\left. \begin{array}{l} C'A' : CA = SC' : SC \\ C'B' : CB = SC' : SC \end{array} \right\} \text{ (Proportionalsatz)}$$

$$\hline C'A' : CA = C'B' : CB \text{ (Gr. III)}$$

$$CA = CB \text{ (r)}$$

$$\hline C'A' = C'B' \text{ (§ 123, Zus. 5).}$$

Dies kann man offenbar, indem man weitere Ebenen durch SC legt, von allen Strecken, die man in der Schnittfigur von C' aus nach ihrem Umfange zieht, beweisen, folglich

$g \odot$ mit C' als Mittelpunkt. W. z. b. w.

Anmerkung. Schiefe Schnitte des Kegels ergeben die als „Kegelschnitte“ bekannten drei Kurven Ellipse, Parabel und Hyperbel. Eine Ellipse entsteht, wenn alle Seitenlinien geschnitten werden, der Schnitt also keiner Seitenlinie parallel ist, eine Parabel, wenn der Schnitt einer Seitenlinie parallel ist, und eine Hyperbel, wenn der Schnitt zwei Seitenlinien parallel ist.

Erklärung. Wird ein Kegel durch einen der Grundfläche parallelen Schnitt geschnitten, so heisst der untere Teil Kegelstumpf (abgestumpfter Kegel) und der obere Ergänzungskegel. Der Abstand seiner beiden Grundkreise ist seine Höhe.

Zusatz. Ein der Grundfläche eines Kegels paralleler Schnitt und die Grundfläche verhalten sich wie die Quadrate der Abstände von der Spitze.

Beweis s. § 242.

§ 248. Inhalt des Kegels.

Der Inhalt eines Kegels ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus Grundkreis und Höhe.

$$\text{Formel: Kegel} = \frac{r^2 \pi h}{3}.$$

Entwicklung der Formel: Der Kegel kann als eine Pyramide von unendlich vielen, unendlich schmalen Seitenflächen angesehen werden (s. § 246). Daher

$$\text{Kegel} = \frac{G \cdot h}{3} \quad (\text{Formel VI})$$

$$G = r^2 \pi \quad (\S 77)$$

$$\text{Formel VIII: Kegel} = \frac{r^2 \pi h}{3}.$$

§ 249. Inhalt des Kegelstumpfes.

Bezeichnet man bei einem Kegelstumpf die Radien der Grundkreise mit R und r und seine Höhe mit h , so gilt die

$$\text{Formel: Kegelstumpf} = (R^2 + Rr + r^2) \frac{\pi h}{3}.$$

Entwicklung der Formel: Ergänzt man den Stumpf von der Höhe h zu einem Kegel, und bezeichnet man die Höhe des Ergänzungskegels mit x , so ist nach vorigem Paragraphen:

$$\text{Kegelstumpf} = \frac{R^2 \pi (h + x)}{3} - \frac{r^2 \pi x}{3} =$$

$$= \frac{\pi}{3} [R^2 h + (R^2 - r^2) x]$$

$$\frac{R:r = (h+x):x \quad (\text{Proportionalatz})}{(R-r):r = h:x \quad (\text{K. S.})}$$

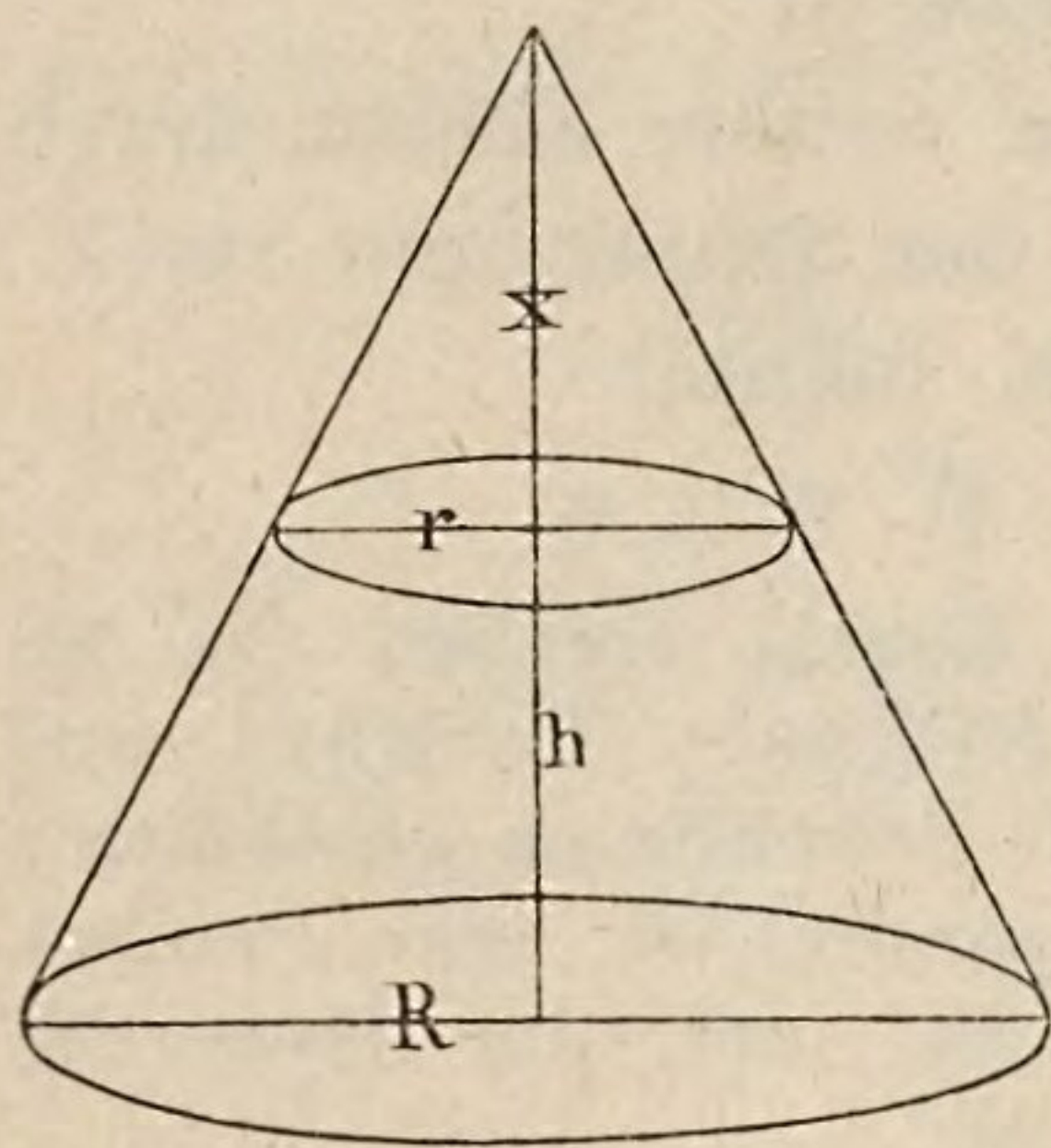
$$x = \frac{rh}{R-r}$$

$$\text{Kegelstumpf} = \frac{\pi}{3} \left[R^2 h + \frac{(R^2 - r^2) rh}{R - r} \right] =$$

$$= \frac{\pi h}{3} [R^2 + (R+r)r], \text{ oder}$$

$$\text{Formel IX: Kegelstumpf} = (R^2 + Rr + r^2) \frac{\pi h}{3}.$$

Anmerkung. Man kann diese Formel auch unmittelbar aus § 245 folgern.

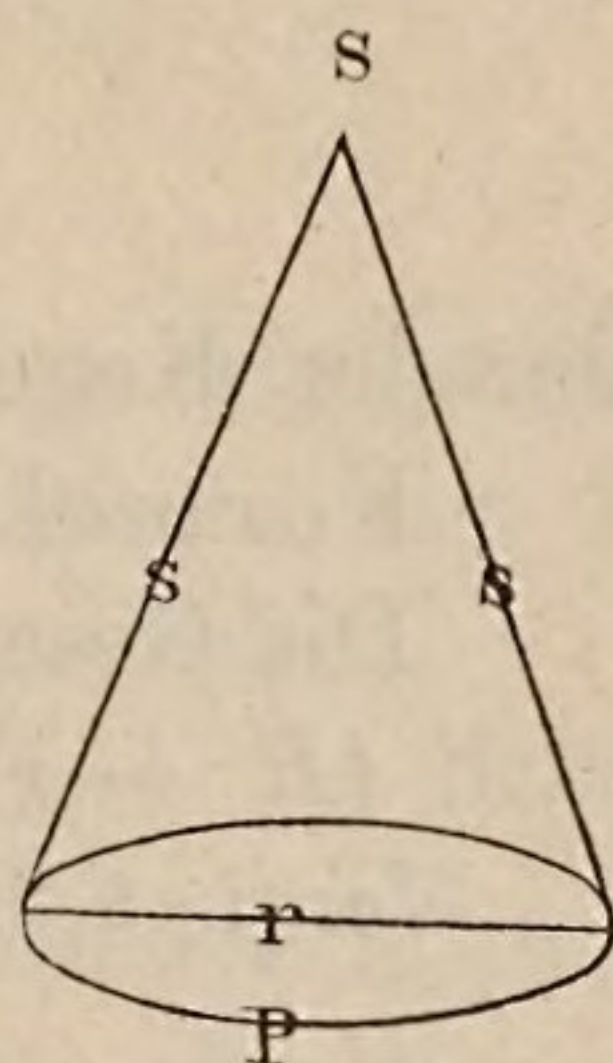


§ 250. Oberfläche des geraden Kegels.

Für den Mantel eines geraden Kegels von der Seitenlinie s und dem Radius r des Grundkreises gilt die

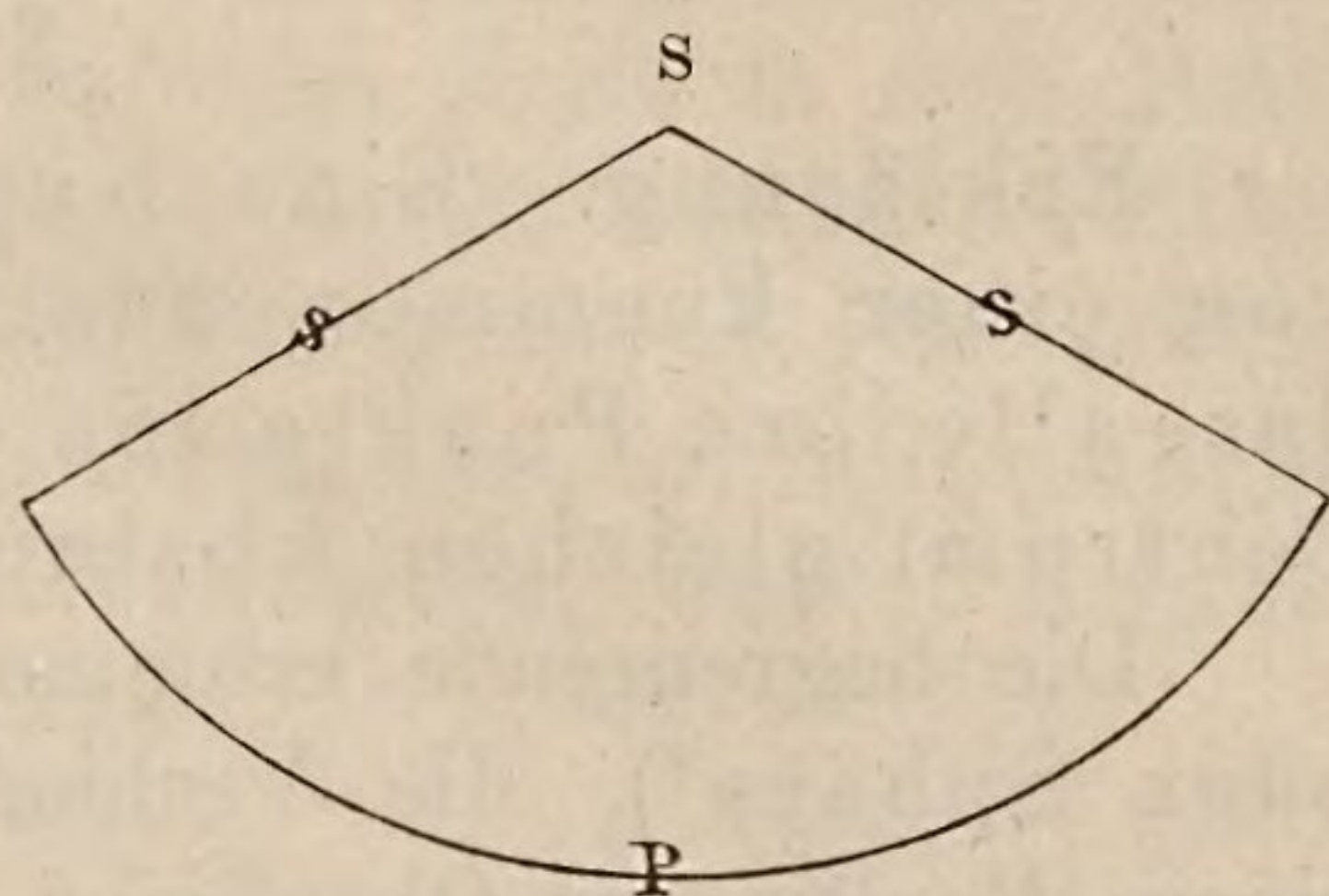
Formel: Gerader Kegelmantel $= r\pi s$.

Entwicklung der Formel: Wenn man sich den Mantel eines geraden Kegels in einer Seitenlinie aufgeschnitten denkt (vgl. § 246₃) und in eine Ebene abwickelt, so legen sich die einzelnen Seitenlinien von der Spitze aus als Radien eines Kreisbogens aneinander. Es entsteht dann ein Kreissektor, in welchem S zum Mittelpunkt, s zum Radius und die Peripherie des Grundkreises zum zugehörigen Bogen wird.



Nun ist nach § 78 der Kreissektor $= \frac{b \cdot r}{2}$. Auf den

Kegelmantel angewendet wird r zu s , b zu $2r\pi$ (r hier der Radius des Grundkreises des Kegels), folglich



Gerader Kegelmantel $\frac{2r\pi \cdot s}{2}$, oder

Formel X: **Gerader Kegelmantel** $= r\pi s$.

Die Gesamtoberfläche des geraden Kegels ist dann gleich dem Mantel plus dem Grundkreise, also gleich

$$r\pi s + r^2\pi \text{ oder } r\pi (s + r).$$

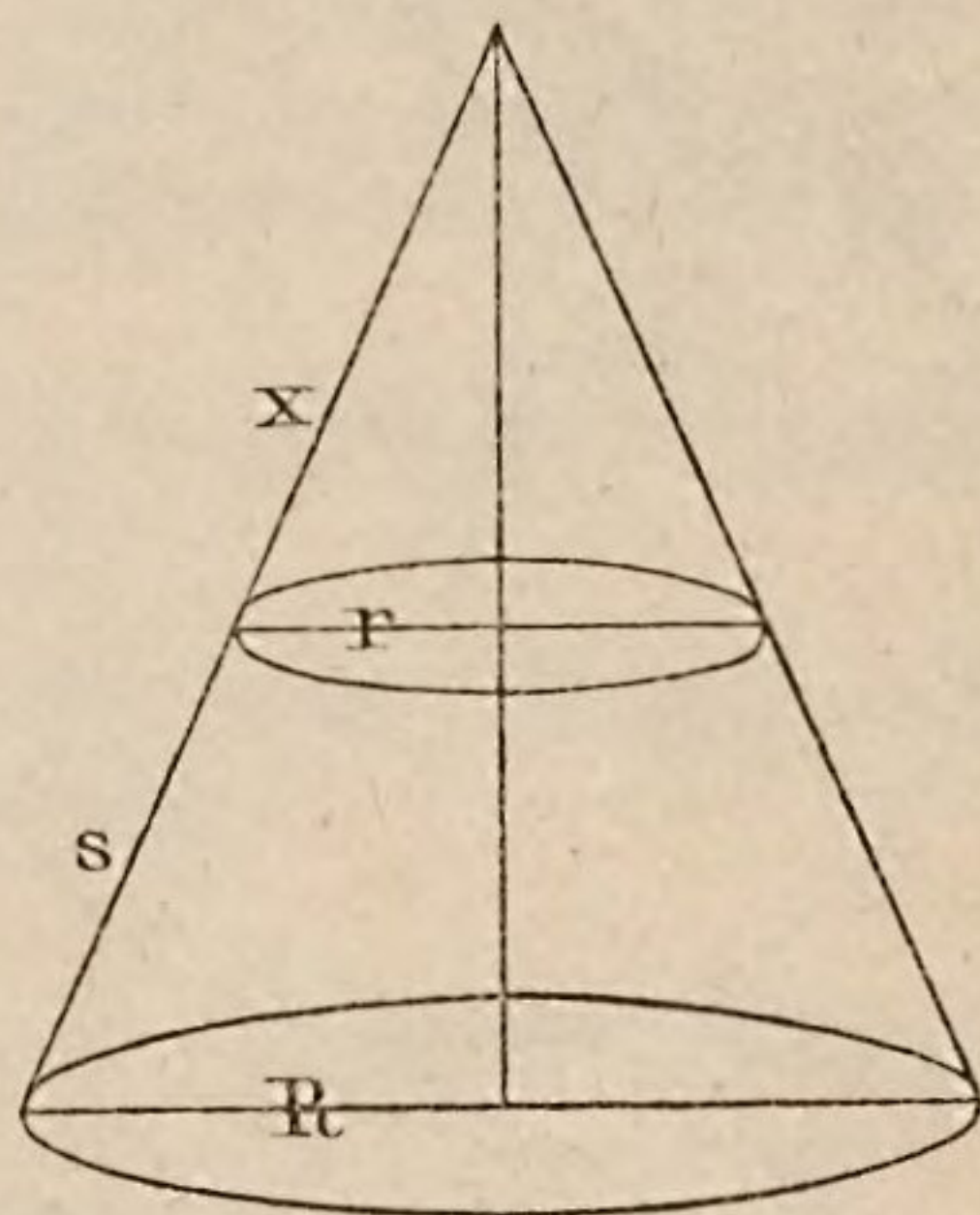
Anmerkung. Man merke wohl, dass die entwickelte Formel nur für den geraden Kegel gilt. Der Mantel eines schiefen Kegels kann durch die Elementarmathematik nicht berechnet werden. Die Inhaltsformel gilt auch für den schiefen Kegel.

§ 251. Oberfläche des geraden Kegelstumpfes.

Bezeichnet man bei einem geraden Kegelstumpf die beiden Radien mit R und r und die Seitenlinie mit s , so gilt die Formel: Gerader Kegelstumpfman-
tel $= (R + r)\pi s$.

Entwicklung der Formel: Ergänzt man den Mantel des Stumpfes von der Seitenlinie s zu dem Mantel eines ganzen Kegels, so ist, wenn man die Seitenlinie des Ergänzungskegels mit x bezeichnet, gerader Kegelstumpfman-
tel

$$\begin{aligned} &= R(s + x)\pi - rx\pi = \\ &= \pi[Rs + (R - r)x]. \end{aligned}$$



Nun ist:

$$R : r = (s + x) : x \quad (\text{Proportionalsatz})$$

$$(R - r) : r = s : x \quad (\text{K. S.})$$

$$x = \frac{r \cdot s}{R - r}, \text{ folglich}$$

Gerader Kegelstumpfmantel $= \pi (Rs + rs)$, oder

Formel XI: **Gerader Kegelstumpfmantel** $= (R + r) \pi s$.

Die Gesamtoberfläche eines geraden Kegelstumpfes ist demnach $(R + r) \pi s + R^2 \pi + r^2 \pi$.

Vergl. § 250, Anmerkung.

6. Von der Kugel.

§ 252.

Erklärung. Eine Kugel ist ein Körper, begrenzt von einer krummen Fläche von der Beschaffenheit, dass alle ihre Punkte von einem Punkte innerhalb (dem Centrum) gleichen Abstand haben.

Die begrenzende krumme Fläche heisst Kugeloberfläche oder Sphäre*), die Verbindungslinie des Mittelpunktes mit einem Punkte der Oberfläche Radius oder Halbmesser, die Verbindungslinie zweier Punkte der Oberfläche Sehne, und eine Sehne, die durch das Centrum geht, Durchmesser.

Eine Kugel entsteht, wenn sich ein Halbkreis um seinen Durchmesser dreht, bis er wieder in die ursprüngliche Lage zurückkehrt.

- Zusätze.**
1. Alle Radien einer Kugel sind gleich.
 2. Der Durchmesser ist gleich dem doppelten Radius. $d = 2r$. $r = \frac{1}{2}d$.
 3. Kugeln mit gleichen Radien sind kongruent.

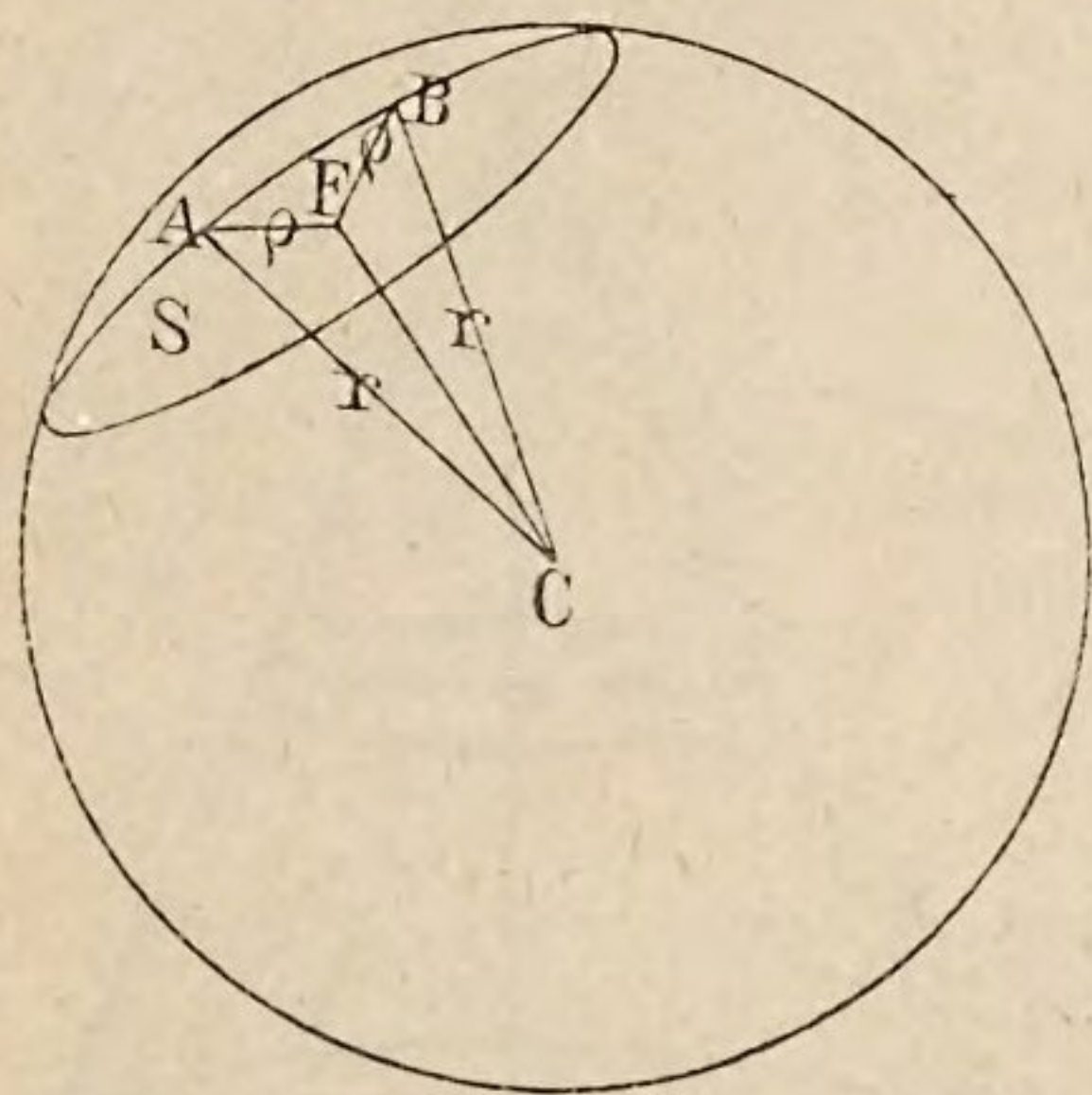
§ 253.

Lehrsatz. Jeder ebene Schnitt einer Kugel ist ein Kreis.

Vor. S ebener Schnitt durch die Kugel um C .

Beh. $S \odot$.

H. K. Ich fälle von C das Lot CF auf S und lege durch CF zwei beliebige Ebenen, welche S in FA und FB schneiden.



*) Aus dem Griechischen; bedeutet „Kugel, Ball“.

$$\begin{array}{l}
 \text{Bew.} \quad CF = CF \text{ (Gr. I)} \\
 \sphericalangle CFA = CFB \text{ (R)} \\
 CA = CB \text{ (Radien der Kugel)} \\
 \hline
 \triangle CFA \cong CFB \text{ (K. IV)} \\
 \hline
 FA = FB \text{ (h. St.).}
 \end{array}$$

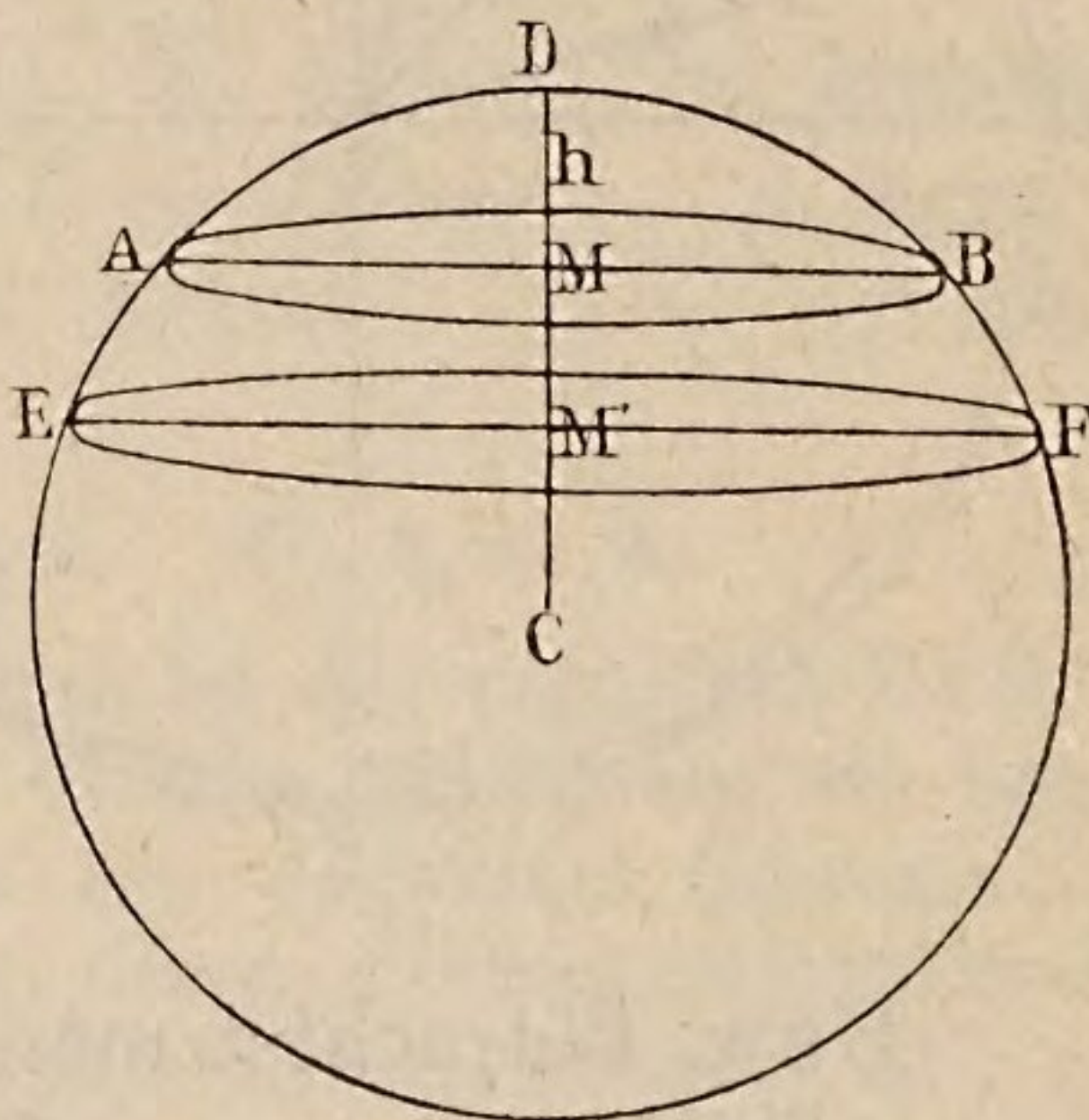
Dies kann offenbar, indem man weitere Ebenen durch CF legt, von allen Strecken, die man in der Schnittfigur von F aus nach ihrem Umfange zieht, bewiesen werden, folglich

$S \odot$ und F der Mittelpunkt. W. z. b. w.

Erklärungen. 1. Geht der Schnittkreis durch den Mittelpunkt der Kugel, so heisst er ein grösster Kreis der Kugel (Grosskreis), z. B. der Äquator und die Meridiane der Erdkugel. Die Kugel zerfällt durch einen grössten Kreis in zwei Halbkugeln. Ein von drei Bogen grösster Kreise begrenztes Stück der Kugeloberfläche heisst sphärisches Dreieck (vgl. § 200).

2. Das Stück einer Kugeloberfläche, welches durch einen Schnittkreis abgeschnitten wird, heisst Kugelmütze, Kugelkappe, Kugelschale oder Calotte*), z. B. ABD . Die im Mittelpunkt des Schnittkreises auf ihm errichtete und bis zur Oberfläche verlängerte Senkrechte heisst die Höhe der Kugelmütze, z. B. $DM = h$.

3. Das Stück einer Kugeloberfläche, welches von zwei parallelen Schnittkreisen begrenzt wird, heisst Kugelzone**), z. B. $AEFB$. Der Abstand der Schnittkreise heisst die Höhe der Kugelzone, z. B. MM' . Z. B. Die heisse und die beiden gemässigten Zonen der Erde.



Die beiden kalten Zonen der Erde sind mathematisch betrachtet Kugelmützen. Man beachte, dass Calotten und Zonen krumme Flächen sind; die zugehörigen körperlichen Teile der Kugel heissen Kugelabschnitte oder Kugelsegmente und körperliche Kugelzonen oder Kugelschichten.

Zusätze. 1. Das Lot vom Centrum einer Kugel auf einen Schnittkreis gefällt trifft dessen Mittelpunkt.

2. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte einer Kugel und eines Schnittkreises steht auf diesem senkrecht.

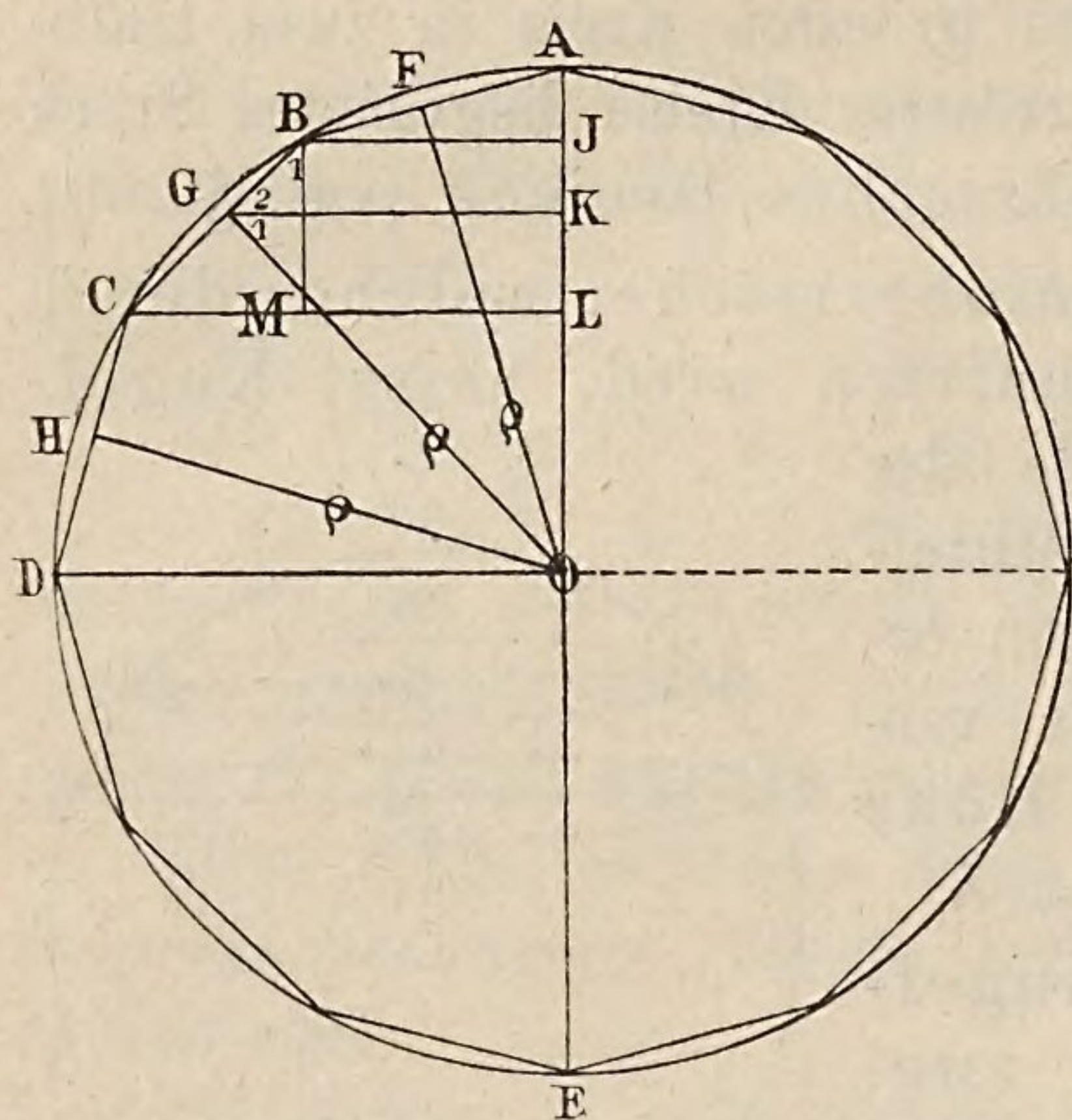
*) Wahrscheinlich aus dem Arabischen; bedeutet „Kappe, Plattmütze“.

**) Aus dem Griechischen; bedeutet „Gürtel“.

3. Die auf einem Schnittkreise in dessen Centrum errichtete Senkrechte geht durch den Kugelmittelpunkt, wird also verlängert zum Kugeldurchmesser. Man nennt letzteren auch *Axe* und seine Endpunkte *Pole**).

§ 254. Der Inhalt der Kugeloberfläche, der Kugelmütze und Kugelzone.

Hilfssatz: Rotiert ein reguläres Polygon um einen seiner grossen Durchmesser, so ist die Oberfläche des entstehenden Rotationskörpers**) gleich dem Produkte aus diesem Durchmesser und der Peripherie des in das Polygon beschriebenen Kreises.



Vor. $ABCD \dots$ reguläres Polygon.

AE Durchmesser des umschriebenen Kreises.

$OF \perp AB$
 $OG \perp BC$
 $OH \perp CD$ } Radien des einbeschriebenen Kreises $= \varrho$.

Beh. Oberfläche Rotationsk. $= AE \cdot 2\varrho\pi$.

H. K. $\left. \begin{array}{l} BJ \\ GK \\ CL \end{array} \right\} \perp AE$.
 $BM \perp CL$.

Bew. Betrachtet man die einzelnen Teile des bei der Rotation von $ABCD \dots$ um AE entstehenden Körpers, nämlich:

Rotationsk. I = Rotationsk. zu BJA

„ II = „ „ $CLJB$

„ III = „ „ $DOLC$ u. s. w.,

so erkennt man, dass die einzelnen Teile gerade Kegel oder abgestumpfte gerade Kegel sind, und dass demnach die gesuchte Oberfläche aus den Mänteln gerader Kegel und gerader Kegelschäfte besteht. Man erhält demnach nach den Formeln X und XI:

$$\text{Oberfläche I} = BJ \cdot AB\pi$$

$$\text{„ II} = (CL + BJ) BC\pi$$

$$\text{„ III} = (DO + CL) CD\pi \text{ u. s. w.}$$

*) Aus dem Griechischen; bedeutet „Drehpunkte“.

**) Aus dem Lateinischen; bedeutet „Drehungskörper“.

$$\begin{aligned} \text{Nun ist } \triangle ABJ &\sim \triangle AFO \text{ (Ä. II)} \\ \frac{BJ : AJ = \varrho : AF \text{ (h. St.)}}{BJ \cdot AF = \varrho \cdot AJ} \\ AF &= \frac{AB}{2} \text{ (§ 52)} \end{aligned}$$

$$\frac{BJ \cdot AB = 2\varrho \cdot AJ}{}$$

$$1. \text{ Oberfläche I} = 2\varrho\pi \cdot AJ.$$

Weiter ist $\triangle BCM \sim GOK \left\{ \begin{array}{l} \text{(Ä. II, da } \sphericalangle B_1 = G_1 \text{ ist als} \\ \text{Komplemente zu } \sphericalangle G_2) \end{array} \right.$

$$\frac{BM : BC = GK : \varrho \text{ (h. St.)}}{GK \cdot BC = BM \cdot \varrho}$$

$$GK = \frac{CL + BJ}{2} \text{ (§ 39)}$$

$$BM = JL \text{ (§ 34)}$$

$$\frac{(CL + BJ) \cdot BC = 2\varrho \cdot JL}{}$$

$$2. \text{ Oberfläche II} = 2\varrho\pi \cdot JL.$$

Ebenso kann man beweisen:

$$3. \text{ Oberfläche III} = 2\varrho\pi \cdot LO \text{ u. s. w.}$$

Addiert man die Oberflächen I, II, III u. s. w., so kommt
Oberfläche Rotationsk. = $(AJ + JL + LO + \dots) 2\varrho\pi$.

Man sieht leicht, dass $AJ + JL + LO + \dots = AE$ ist,
und erhält demnach:

$$\text{Oberfläche Rotationsk.} = AE \cdot 2\varrho\pi. \quad \text{W. z. b. w.}$$

Anmerkung. In dem vorigen Beweise ist ein reguläres Zwölfeck, allgemein ein reguläres Polygon von gerader Seitenzahl als Beispiel genommen. Nimmt man ein solches von ungerader Seitenzahl, so entsteht in der Mitte ein gerader Cylinder, dessen Mantel unmittelbar $= 2\varrho\pi$ mal dem betreffenden Stück des Rotationsdurchmessers ist.

Anwendung auf die Kugel.

Wird das rotierende Polygon zu einem Kreise vom Radius r , so wird der entstehende Rotationskörper eine Kugel; AE wird $2r$ und $\varrho = r$. Dann erhält man:

$$\text{Kugeloberfläche} = 2r \cdot 2r\pi, \text{ oder}$$

$$\text{Formel XII: Kugeloberfläche} = 4r^2\pi.$$

Die Oberfläche I wird, wenn das rotierende Polygon zum Kreise wird, zu einer Kugelmütze und Oberfläche II zu einer Kugelzone. Die entsprechenden Stücke des Rotationsdurchmessers werden dann die Höhen der Mütze und Zone. Man erhält in beiden Fällen $2r\pi h$ und hat demnach

$$\text{Formel XIII: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Kugelmütze} \\ \text{Kugelzone} \end{array} \right\} = 2r\pi h.$$

§ 255. Der Inhalt der Kugel.

Formel: **Kugelinhalt** $= \frac{4}{3} r^3 \pi$.

Entwicklung der Formel: Die Kugeloberfläche kann man sich in unendlich viele unendlich kleine sphärische Dreiecke $g_1, g_2, g_3 \dots$ zerlegt denken. Denkt man sich alle ihre Eckpunkte mit dem Kugelmittelpunkt verbunden und Ebenen durch je zwei auf einander folgende Radien gelegt, so zerfällt hierdurch die Kugel in unendlich viele Pyramiden von den Grundflächen $g_1, g_2, g_3 \dots$ und der Höhe r , da man die unendlich kleinen sphärischen Dreiecke als eben ansehen kann. Man erhält demnach gemäss Formel VI:

$$\begin{aligned} \text{Kugelinhalt} &= \frac{g_1 \cdot r}{3} + \frac{g_2 \cdot r}{3} + \frac{g_3 \cdot r}{3} + \dots = \\ &= \frac{r}{3} (g_1 + g_2 + g_3 + \dots). \end{aligned}$$

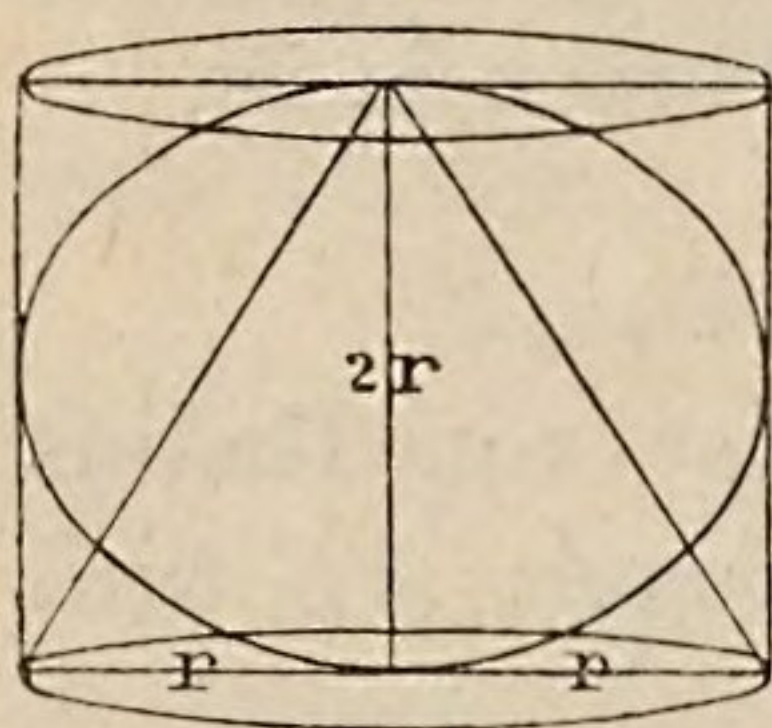
Offenbar ist aber $g_1 + g_2 + g_3 + \dots =$ der Oberfläche der Kugel $= 4r^2\pi$ (Formel XII). Man erhält demnach:

$$\text{Kugelinhalt} = \frac{r}{3} \cdot 4r^2\pi, \text{ oder}$$

Formel XIV: **Kugelinhalt** $= \frac{4}{3} r^3 \pi$.

§ 256. Lehrsatz des Archimedes.*)

Kegel, Kugel und Cylinder verhalten sich wie $1 : 2 : 3$, wenn der Kegel und Cylinder einen grössten Kreis der Kugel als Grundfläche und den Durchmesser der Kugel als Höhe haben.



Bew. Kegel $= \frac{r^2 \pi h}{3}$ (Formel VIII)

Kugel $= \frac{4}{3} r^3 \pi$ (Formel XIV)

Cylinder $= r^2 \pi h$ (Formel IV)
 $h = 2r$

Kegel $= \frac{2r^3 \pi}{3}$

Kugel $= \frac{4r^3 \pi}{3}$

Cylinder $= 2r^3 \pi$

*) Auf obigen Lehrsatz legte Archimedes (vgl. § 75) besonders grossen Wert und ordnete an, dass eine Kugel und ein Cylinder mit den Zahlen $2 : 3$ auf sein Grabmal gesetzt würden. Daran hat der bekannte römische Redner Cicero das verloren gegangene Grabmal des Archimedes wieder erkannt.

$$\text{Kegel : Kugel : Cylinder} = \frac{2}{3} : \frac{4}{3} : 2 = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} : 1, \text{ oder}$$

$$\text{Kegel : Kugel : Cylinder} = 1 : 2 : 3.$$

IV. Anhang.

257. Die wichtigsten Formeln der Stereometrie.

Als stereometrische Formeln hat der Schüler zu merken:

I. Prisma $= G \cdot h$.

II. Rechtflächner $= abc$.

III. Würfel $= a^3$.

IV. Cylinder $= r^2 \pi h$.

V. Gerader Cylindermantel $= 2 r \pi h$.

VI. Pyramide $= \frac{G \cdot h}{3}$.

VII. Pyramidenstumpf $= (G + \sqrt{G \cdot g} + g) \frac{h}{3}$.

VIII. Kegel $= \frac{r^2 \pi h}{3}$.

IX. Kegelstumpf $= (R^2 + Rr + r^2) \frac{\pi h}{3}$.

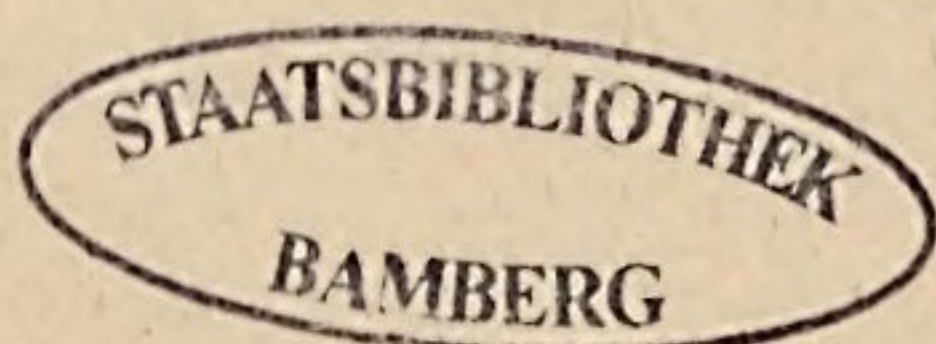
X. Gerader Kegelmantel $= r \pi s$.

XI. Gerader Kegelstumpfmantel $= (R + r) \pi s$.

XII. Kugeloberfläche $= 4 r^2 \pi$.

XIII. Kugelmütze und Kugelzone $= 2 r \pi h$.

XIV. Kugelinhalt $= \frac{4}{3} r^3 \pi$.



Druck von Hesse & Becker in Leipzig.

Raydt, Hermann,

Lehrbuch der Elementarmathematik Planimetrie, Arithmetik, Trigonometrie
und Stereometrie, Pensum bis zur Einjährig-Freiwilligen Prüfung ; für Hö-
here Schulen und zum Selbststudium

Leipzig 1899

Bamberg, Staatsbibliothek -- AGB P 83
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11830141-8